

Поступила 11 I 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шмидт. Абляционные материалы в космической технике. *Вопр. ракетн. техн.*, 1970, № 6.
2. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 1.
3. Апштейн Э. З. Разрушение стекловидного тела в гиперзвуковом потоке газа с учетом лучистой теплопроводности внутри тела. *Инж.-физ. ж.*, 1969, т. 17, № 1.
4. Апштейн Э. З., Ефимова Л. Г. О лучистом переносе внутри оплавливающегося тела. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 1.
5. Кучеров Р. Я., Рикенглас Л. Э. О гидродинамических граничных условиях при испарении и конденсации. *ЖЭТФ*, 1959, т. 57, вып. 1(7).
6. Стулов В. П., Шапиро Е. Г. Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 1.
7. Апштейн Э. З. Эффект возрастания скорости абляции оплавливающегося материала при снижении теплового потока. *Докл. АН СССР*, 1972, т. 203, № 2.

УДК 536.3

## РАСЧЕТ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ПЛОСКИМИ СТРУЯМИ СЕРОГО ГАЗА

Н. В. КИРСАНОВ (Москва)

Часто при решении задач о лучистом теплообмене в движущемся газе рассматриваются одномерные уравнения переноса излучения, в которых интенсивность излучения является функцией координаты и угла [1]. Чтобы точно учесть зависимость от направления, надо дивергенцию лучистого потока, входящую в уравнение энергии, выразить через интегроэкспоненциальные функции и свести задачу к квадратурам.

При решении таких задач конечно-разностными методами приходится делать дополнительные предположения о виде зависимости подынтегральных функций от координат, что позволяет получить выражение для дивергенции лучистого потока в каждой точке разностной схемы.

Однако реализация такого подхода связана с большими затратами машинного времени и памяти, так как в большом числе расчетных узлов приходится проводить громоздкие вычисления рядов, описывающих интегроэкспоненциальные функции или находить их из таблиц. Поэтому до настоящего времени такие методы решения задач не использовались.

В данной работе изложен конечно-разностный метод расчета лучистого потока, позволяющий строго учесть зависимость излучения от угла, и в качестве примера его применения решена модельная задача о струйном течении излучающего газа. Исследованы вопросы, связанные с ускорением процесса счета и определена зависимость точности вычисления интегроэкспоненциальных функций в виде рядов от числа учитываемых членов, а так же область применения асимптотических приближений.

1. Рассмотрим задачу о лучистом теплообмене между струей газа, содержащей объемные источники выделения энергии и истекающей из бесконечной плоской щели, и спутным потоком газа, считая картину течения симметричной.

Пусть температура струи в процессе движения меняется из-за выделения энергии объемными источниками и переноса энергии излучением, а температура потока, не содержащего объемных источников энергии, повышается за счет поглощения излучения.

Ограничим рассмотрение случаем, когда перенос энергии теплопроводностью пренебрежимо мал по сравнению с излучением и конвекцией. Кроме того, предположим, что продольные градиенты интенсивности излучения и лучистого потока много меньше соответствующих градиентов в поперечном направлении, и справедливо приближение локального одномерного слоя, при котором излучение в каждом поперечном сечении считается одномерным, но зависящим от значений температуры, плотности и других параметров, изменяющихся вдоль оси.

Система уравнений плоского пограничного слоя для струйного течения излучающего серого газа с учетом сделанных предположений имеет вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial H}{\partial y} + \rho f \sin \frac{\pi x}{x_0}$$

$$H = 2\pi \int_0^{\pi/2} (I^+ - I^-) \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\cos \theta \frac{dI^+}{dy} = k \left( I^+ - \frac{\sigma T^4}{\pi} \right)$$

$$\cos \theta \frac{dI^-}{dy} = -k \left( I^- - \frac{\sigma T^4}{\pi} \right)$$

$$P = \rho RT$$

где  $x_0$  — длина расчетного участка струи,  $f$  — параметр, характеризующий скорость изменения выделяемой энергии в единице массы газа. Остальные обозначения общепринятые.

Здесь не уточняется природа объемных источников выделения энергии, которая может быть электромагнитной, индукционной, ядерной и т. д. Предполагается, что выделяемая энергия пропорциональна плотности газа и распределена вдоль оси струи по синусоиде, что объясняется наличием краевого эффекта во многих технических устройствах.

Замыкают систему уравнений зависимости теплофизических и оптических свойств газов от температуры, которые считаются известными.

Для простоты рассмотрим случай, когда осевая скорость постоянна во всем поле течения. Очевидно, в этом случае останутся справедливыми все соотношения теории пограничного слоя, а уравнение движения удовлетворится тождественно.

Решать задачу будем при следующих граничных условиях:

$$T = T(y) \quad (x = 0)$$

$$T = T_\infty, \quad I^+ = \sigma T_\infty^4 / \pi \quad (x > 0, \quad y \rightarrow y_\infty)$$

$$\partial T / \partial y = 0, \quad I^- = I^+ \quad (y = 0)$$

Граничное условие для  $I^+$  означает, что на большом расстоянии от оси  $I^+$  равна равновесной интенсивности излучения газа, а граничное условие для  $I^-$  связано с симметричностью течения.

Отнесем интенсивность излучения к равновесной интенсивности на оси струи  $\sigma T_0^4 / \pi$ , а остальные переменные — к своим осевым значениям  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $T_0$  и т. п., при этом безразмерные переменные обозначим так же, как ранее обозначали размерные. Переходя к переменным Мизеса и вводя функцию тока  $\psi$ , после соответствующих преобразований получим систему уравнений

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} = a_1 k \left[ \int_0^{\pi/2} (I^+ + I^-) \sin \theta d\theta - 2T^4 \right] + a_2 \rho \sin \pi x \quad (1.1)$$

$$\cos \theta \frac{dI^+}{d\psi} = \frac{a_3 k}{\rho} (I^+ - T^4) \quad (1.2)$$

$$\cos \theta \frac{dI^-}{d\psi} = -\frac{a_3 k}{\rho} (I^- - T^4) \quad (1.3)$$

$$1 = \rho RT \quad (1.4)$$

$$a_1 = \frac{2\sigma T_0^4 k_0 x_0}{\rho_0 u_0 c_p T_0}, \quad a_2 = \frac{f x_0}{c_p T_0 u_0}, \quad a_3 = k_0 x_0$$

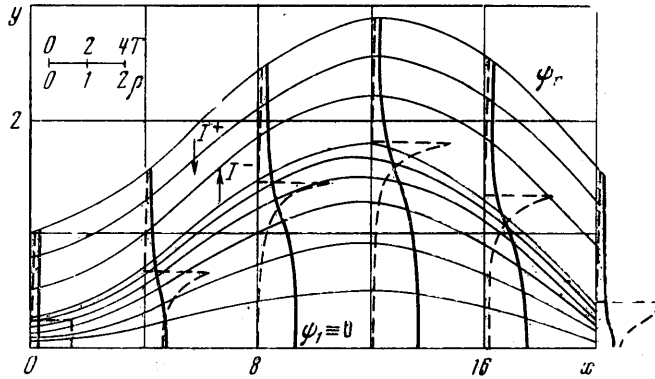
Для численного счета выберем прямоугольную сетку  $x$ ,  $\psi$  и перенесем граничные условия из бесконечности на достаточно удаленную от оси струи линию тока, вблизи которой все параметры меняются слабо. Примем ее, а также нулевую функцию тока, совпадающую с осью симметрии, за граничные линии тока. Тогда гра-

ничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} T &= T(\psi) \quad (x = 0) \\ T &= T_r, \quad I_r^+ = T_r^k \quad (x > 0, \quad \psi = \psi_r) \\ \partial T / \partial \psi &= 0, \quad I_1^- = I_1^+ \quad (\psi = \psi_1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где 1 и  $r$  — индексы двух ограничивающих расчетную область течения линий тока разностной сетки.

Решение задачи проводится по неявной разностной схеме. При переходе в направлении оси  $x$  к новому слою сетки температура определяется по уравнению (1.1), а затем по известной температуре согласно уравнениям (1.2) — (1.4) находятся интенсивности и потоки излучения. В следующей итерации уточняется температура и т. д. до получения нужной точности счета.



Фиг. 1

Пусть в какой-либо итерации во всех узлах некоторого поперечного слоя температура известна. Тогда уравнение (1.2) можно проинтегрировать

$$I_m^+ = \exp \left( \frac{1}{\cos \theta} \int_{\psi_{m+1}}^{\psi_m} p \, d\psi \right) \left[ - \frac{1}{\cos \theta} \int_{\psi_{m+1}}^{\psi_m} p T^k \exp \left( - \frac{1}{\cos \theta} \int_{\psi_{m+1}}^{\psi_m} p \, d\psi \right) d\psi + I_{m+1}^+ \right]$$

где  $p = a_3 k / \rho$ ,  $m$  — номер узла сетки.

Предположим, что в интервалах между узлами  $p$  постоянна,  $T^k = a\psi + b$ , где  $a$  и  $b$ , так же как и  $p$ , могут быть выражены через значения функций на концах интервала. Очевидно, что чем меньше меняются  $T$ ,  $k$ ,  $\rho$  в пределах одного интервала, тем более обосновано такое предположение. Получим

$$\begin{aligned} I_m^+ &= \exp \left[ - \frac{1}{\cos \theta} p_{m+0.5} (\psi_{m+1} - \psi_m) \right] \left[ - T_{m+1}^k - \left( \frac{a}{p} \right)_{m+0.5} \cos \theta + I_{m+1}^+ \right] + \\ &\quad + T_m^k + \left( \frac{a}{p} \right)_{m+0.5} \cos \theta \\ ((a/p)_{m+0.5} &= (T_{m+1}^k - T_m^k) (\rho_{m+1} + \rho_m) / (\psi_{m+1} - \psi_m) (k_{m+1} + k_m)) \end{aligned}$$

Применяя эту формулу последовательно ко всем узлам поперечного слоя от  $\psi_1$  и исключая все промежуточные интенсивности, получим рекуррентную формулу для интенсивности в любом слое

$$\begin{aligned} I_m^+ &= \cos \theta \sum_{i=r}^{m+1} \exp \left[ - \frac{1}{\cos \theta} \sum_{j=i}^{m+1} p_{j-0.5} (\psi_j - \psi_{j-1}) \right] \times \\ &\times \left[ \left( \frac{a}{p} \right)_{i+0.5} - \left( \frac{a}{p} \right)_{i-0.5} \right] + \left( \frac{a}{p} \right)_{m+0.5} \cos \theta + T_m^k \end{aligned}$$

Аналогично, записывая  $I_m^-$  для узлов в направлении от  $\psi_1$  к  $\psi_r$  и исключая все промежуточные интенсивности, кроме осевой, которая известна из предыдущей формулы и граничных условий (1.5), получим

$$I_m^+ = \cos \theta \sum_{i=1}^{m-1} \exp \left( -\frac{1}{\cos \theta} \sum_{j=i}^{m-1} p_{j+0.5} (\psi_{j+1} - \psi_j) \left[ \left( \frac{a}{p} \right)_{i+0.5} - \left( \frac{a}{p} \right)_{i-0.5} \right] \right) + \\ + \exp \left[ -\frac{1}{\cos \theta} \sum_{j=1}^{m-1} p_{j+0.5} (\psi_{j+1} - \psi_j) \right] (-T_1^4 + I_1^-) - \left( \frac{a}{p} \right)_{m-0.5} \cos \theta + T_m^4$$

Если сделать замену переменных  $\cos \theta = u^{-1}$  и провести соответствующие преобразования, то интеграл, входящий в выражение градиента лучистого потока, выражается через интегроэкспоненциальные функции

$$\int_0^{\pi/2} (I_m^+ + I_m^-) \sin \theta d\theta = \sum_{n=r}^{m+1} M_n E_3 \left( \sum_{k=n-1}^m N_k \right) + 2T_m^4 + \\ + \frac{M_m}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} M_n E_3 \left( \sum_{k=n}^{m-1} N_k \right) + M_1 E_3 \left( \sum_{k=1}^{m-1} N_k \right) + \\ + \sum_{n=r}^2 M_n E_3 \left( \sum_{k=1}^{m-1} N_k + \sum_{k=n-1}^1 N_k \right) \quad (1.6)$$

$$M_m = a_3^{-1} [(T_{m+1}^4 - T_m^4) (\rho_{m+1} + \rho_m) / (\psi_{m+1} - \psi_m) (k_{m+1} + k_m) - \\ - (T_m^4 - T_{m-1}^4) (\rho_m + \rho_{m-1}) / (\psi_m - \psi_{m-1}) (k_m + k_{m-1})]$$

$$N_m = a_3 (k_{m+1} + k_m) (\psi_{m+1} - \psi_m) / (\rho_{m+1} + \rho_m)$$

На границе между невязкой струей и спутным потоком существует разрыв оптических и термодинамических свойств, при переходе через который должен сохраняться лучистый поток [2]. Можно показать, что для выполнения этого условия к интегралу (1.6) надо добавить член

$$2[T^4(\psi_{m\Gamma}) - T^4(\psi_{m\Gamma+1})] E_2 \left( \sum_{j=m\Gamma+1}^{m-1} N_j \right) \quad (1.7)$$

где  $\psi_{m\Gamma}$  и  $\psi_{m\Gamma+1}$  — функции тока до и после разрыва.

Были проведены вспомогательные расчеты интегроэкспоненциальных функций и сравнение с таблицами [3] для выбора областей изменения аргументов, в которых формулы рядов или асимптотические формулы дают лучший результат. Установлено, что на участке  $0 \leq \psi \leq 7$  удовлетворительный результат дают расчеты по формулам рядов

$$E_n(\psi) = \zeta + \tau \quad (n = 2, 3)$$

$$\zeta = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n-1}}^{\infty} (-\psi)^k / k! (n-1-k) \quad (1.8)$$

$$\tau = \begin{cases} 1 + \psi (\ln \psi - 0.422784) & (n = 2) \\ 0.5 - 0.5\psi^2 (\ln \psi - 0.922784) & (n = 3) \end{cases}$$

а при  $\psi > 7$  по асимптотическим формулам

$$E_n(\psi) = \exp(-\psi) / (\psi + n) \quad (n = 2, 3) \quad (1.9)$$

Расчеты показали, что число членов в формуле (1.8) очень велико (исключение составляют малые  $\psi$ ) и слабо зависит от точности вычисления. Так, при  $\psi = 7$  оно изменяется от 28 до 25 при изменении ошибки вычисления функций от  $10^{-3}$  до  $10^{-2}$ . Следовательно, снижение точности вычисления функций не является эффективным средством уменьшения времени счета.

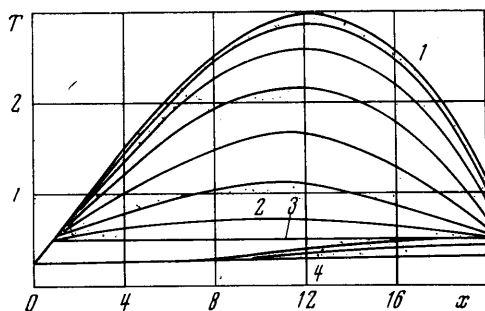
2. По формулам (1.1)–(1.9) были рассчитаны функции тока, температура и плотность газа во всем поле течения. Спутный поток состоял из водородной плазмы, термодинамические и оптические свойства которой брались из работы [4]. Коэффициенты поглощения при нескольких температурах представлены в этой работе как функции частоты. Каждая из них была усреднена во всем спектральном интервале по методу Росселанда [4], что позволило получить необходимую для расчетов зависимость усредненного коэффициента поглощения от температуры.

Зависимости плотности, теплоемкости и коэффициента поглощения газа струи от температуры выбирались такими же, как в спутном потоке, но их абсолютные значения были увеличены соответственно в 50, 200 и 1000 раз, чтобы свойства этого модельного газа отличались от свойств спутного потока.

На фиг. 1 показаны положение линий тока  $\psi$ , а также температура и плотность газа (сплошные и штриховые линии) в нескольких поперечных сечениях по длине до  $x = 20$ . Давление и характерная температура газа в расчетах равнялись  $1 \text{ ат}$  и  $10^4 \text{ К}$ , а безразмерные параметры  $a_1 = 10^3$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 10^5$ . Обращает на себя внимание сильная немонотонность  $\rho$  вблизи границы струи, что связано с наличием разрыва плотности и большого градиента температур. Это является одной из причин плохой сходимости итерационного процесса в точках, близких к границе  $\psi_{\text{мг}}$ . Другая причина заключается в сильной зависимости лучистого потока от температуры,

так что небольшая ошибка в определении температуры в какой-либо итерации приводит к сильному перегреву или переохлаждению газа в последующей итерации.

На фиг. 2 представлена температура газа в канале в нескольких линиях тока (линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям  $\psi_0$ ,  $\psi_{\text{мг}}$ ,  $\psi_{\text{мг}+1}$ ,  $\psi_r$ ). При принятом симметричном законе выделения объемной энергии с максимумом в середине расчетного участка область максимальной температуры газа смещена вниз по потоку. Разрыв температур  $T(\psi_{\text{мг}}) - T(\psi_{\text{мг}+1})$  на границе струи и потока достигает наибольшего значения



Фиг. 2

в начале расчетного участка и практически отсутствует в конце.

Изложенный метод решения может быть обобщен на случай течения излучающего газа с селективным коэффициентом поглощения.

Поступила 14 XII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бай Ш и — и. Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
3. Пагурова В. И. Таблицы интегроэкспоненциальных функций. М., ВЦ АН СССР, 1959.
4. Греков Л. И., Москвин Ю. В., Фаворский О. Н., Романовичев В. А. Справочник. М., «Машгиз», 1964.

УДК 538.4

### ОСАЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОЛЛЕКТОРЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. Д. ИВАНОВ, В. Н. КИРИЧЕНКО, Н. Н. СУПРУН

(Обнинск)

Изучение закономерностей электростатического осаждения аэрозолей на проводящих коллекторах связано с попыткой их использования для измерения концентрации сильно заряженных частиц микронного диапазона в приземном слое атмосферы, где скорости набегающего потока достигают нескольких метров в секунду. При этих условиях вклад инерционной силы в механизм захвата может оказаться существенным, однако учет этого фактора в теоретических расчетах представляет большие трудности. В пренебрежении инерцией Л. М. Левин [1], используя теорему С. С. Духина и Б. В. Дерягина [2] о постоянстве концентрации аэрозольных частиц в соленоидальном поле внешних сил, получил выражение для коэффициен-