УДК 533.6.011.5

ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ У ЭЛЛИПСОИДОВ

А. Н. МИНАЙЛОС

(*Москва*)

Для эллипсоидов вращения с отношением осей, изменяющимся от 0 (плоский торец) до 2, получены аппроксимационные формулы, справедливые в диапазонах $2 \leqslant M_\infty \leqslant \infty$ и $0.05 \leqslant K \leqslant 0.5$ как в совершенном, так и в равновеснодиссоциирующем газе (K — отношение плотностей в прямой ударной волне перед эллипсоидом).

Исследованы отход ударной волны на оси симметрии, градиент скорости в критической точке, размеры области влияния, коэффициент сопротивления.

1. Течение у затупленного тела при сверхзвуковых скоростях определяется формой тела и условиями набегающего потока. В случае равновесно-диссоциирующего газа набегающий поток может характеризоваться двумя параметрами: отношением плотности в набегающем потоке к плотности за прямой ударной волной K и числом Маха. При гиперзвуковых скоростях определяющим является параметр K, который в случае совершенного газа зависит только от $\varkappa = C_p / C_v$. Это позволяет рассматривать величину K как параметр и в случае совершенного газа. Переход к интегральному рассмотрению величины K в ударном слое [1] позволяет, по-видимому, обобщить полученные результаты и на неравновесные течения. На примерах сегментального тела [2] и сферы [3] показано, что течение равновесно-диссоциирующего газа можно моделировать течением совершенного газа в том случае, если эти течения имеют одинаковые значения K и M_∞. Таким образом как в случае совершенного, так и равновесно-диссоциирующего газа (а, видимо, также и для неравновесных течений) параметрами, определяющими набегающий поток, являются значения K и M_∞.

При разработке критериев подобия к ним предъявлялись следующие требования.

При переходе к гиперзвуковым скоростям критерии должны удовлетворять законам гиперзвуковых течений. Влияние параметров K и M_∞ можно разделить, если учесть, что при очень больших сверхзвуковых скоростях справедлив принцип независимости течения от числа M_∞. Это разделение и позволяет построить критерии подобия, в которых главные члены являются функциями величины K и определяются на основе теории гиперзвуковых скоростей. А зависимость от числа M_∞ вводится эмпирически при обработке точных численных результатов, представленных в зависимости от главных членов.

Критерии должны гарантировать определенную точность и быть удобными для практического применения, т. е. определяться геометрией тела и параметрами набегающего потока. Закон подобия, предложенный в [1], неудобен, так как требует дополнительной информации для определения радиуса кривизны ударной волны.

Форма параметров должна быть такой, чтобы они сохраняли свой смысл как в случае совершенного, так и равновесно-диссоциирующего газа.

Геометрию тела зададим длиной полуоси эллипсоида a, направленной против вектора набегающего потока и являющейся осью симметрии течения. Другая полуось b имеет длину, равную единице. Набегающий поток задается значением M_∞ и параметрами за прямой ударной волной: отношением плотностей K и давлением P.

Для совершенного газа

$$K = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2}{\varkappa + 1}\frac{1}{M_\infty^2}$$

$$P \equiv \frac{P_1}{\rho_\infty V_{\max}^2} = \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa(\varkappa + 1)}\,\frac{2\varkappa M_\infty^2 - (\varkappa - 1)}{1 + {}^1/_2(\varkappa - 1) M_\infty^2}$$

Точность полученных аппроксимаций оценивается по результатам численных расчетов.

2. В качестве главных членов критериев при обтекании сферы для функций ε_0 (отход волны на оси симметрии), r_b (расстояние от оси симметрии до звуковой точки на теле), C_x (коэффициент сопротивления, отнесенный к площади миделя π) взято значение K. Для градиента скорости в критической точке $V^{-1}_{\max}\partial u / \partial\theta$ (θ — длина дуги) главным членом является соотношение $\sqrt{2K(K + 2P)}$, полученное в предположении о постоянстве плотности в окрестности критической точки, справедливости модифицированной формулы Ньютона для давления и гиперзвуковых зависимостей

$$K \approx \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}, \qquad \frac{P_0'}{\rho_\infty V_{\max}^2} \approx \frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} \approx K + 2P$$

Положение звуковой точки на ударной волне в гиперзвуковом течении у сферы определяется углом $\theta = \sqrt{K}$. Тогда величину r_w можно представить в виде $(1+\varepsilon(\theta))\sin\sqrt{K}$. Поскольку значение $\varepsilon(\theta)$ неизвестно, воспользуемся величиной ε_0. Учет нелинейности с помощью численных результатов приводит к параметру следующего вида:

$$a(1+0.67a^2) \qquad a = (1+\varepsilon_0)\sin\sqrt{K}$$

После определения главных членов из анализа результатов, представленных на графиках исследуемая функция — главный член параметра подобия, определены поправки, зависящие от числа M_∞. Поправки введены таким образом, чтобы результаты численных расчетов обтекания сферы, обработанные в параметрах подобия легли для каждой функции с некоторым разбросом на одну кривую [4]. Эта кривая аппроксимировалась аналитической формулой, а разброс точек характеризовал точность аппроксимации относительно численных результатов.

Аппроксимационные формулы и параметры подобия для течения у сферы имеют вид

$$\varepsilon_0 = N_1(0.76+1.05N_1^2), \qquad N_1 = K + 0.07M_\infty^{-2}$$

$$V_{\max}^{-1}\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0.88N_2[1-0.15N_2), \qquad N_2 = \sqrt{2K(K+2P)} - (M_\infty^2 - 0.25)^{-1}$$

$$r_b = 0.554 + N_3(0.6 - 0.366N_3), \qquad N_3 = K + 0.1M_\infty^{-1}$$

$$r_w = 1.05N_4, \qquad N_4 = a(1+0.67a^2), \qquad a = (1+\varepsilon_0)\sin\sqrt{K}$$

$$C_x = 1.056 - 0.75N_5 - 0.0016(N_5^2 + 0.011)^{-1}, \qquad N_5 = K - 0.12M_\infty^{-2}$$

Точность этих формул в процентах относительно численных решений в различных диапазонах чисел M приведена в таблице. Там же приведена и точность формул для эллипсоида вращения.

Исследуемая величина	Сфера		Эллипсоид вращения	
	совершенный газ	равновесное течение		
ε_0	4.5	3.5	$5\begin{pmatrix} a\geqslant 0.333 \\ 0\leqslant N_1\leqslant 0.4\end{pmatrix}$	$5\begin{pmatrix} a=0 \\ 0.08\leqslant N_1\leqslant 0.32\end{pmatrix}$
$V_{\max}^{-1}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$	7.0	2.5	$3.5\,(0.6\leqslant N_2\leqslant 0.8)$	—
r_c	0.8	0.17	$2\,(0.1\leqslant N_3\leqslant 0.5)$	—
r_w	$10\,(M_\infty < 2)$ $6.6\,(M_\infty \geqslant 2)$	3.6	$3\,(0.4\leqslant N_4\leqslant 0.8)$	$4\,(0.8\leqslant N_4\leqslant 1.1)$
C_x	2.2	1.8	$1.5\begin{pmatrix} N_5>0.02, a\geqslant 0.75 \\ N_5>0.02, a=0.5 \\ N_5>0.02, a=0\end{pmatrix}$	$5\begin{pmatrix} a<0.75 \\ 0.03\leqslant N_5\leqslant 0{,}09, \\ a=0.5 \\ 0.13\leqslant N_5\leqslant 0.195, \\ a=0\end{pmatrix}$

3. Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации скорости u на поверхности сферы. Введем вместо функции $u(\theta)$ функцию $\bar{u} = u(\theta)\,/\,u_\theta'$, где $u_\theta'(K, M_\infty)$ — градиент скорости в критической точке, вычисленный по формуле п. 2. Функции для различных значений K и M_∞ образуют пучок кривых, имеющих в точке $\theta = 0$ производную, равную единице. Чтобы собрать этот пучок в линию $u_1(\theta) = \theta$, введем поправку, зависящую от θ, K и M_∞.

Допустим, что основное изменение параметров течения на теле в зависимости от K определяется влиянием центробежных сил (поправкой Буземана)

$$\Delta P = -\rho u^2\,/\,R_k$$

Здесь R_k — радиус кривизны тела. Взяв дифференциал интеграла Бернулли в случае совершенного газа и предположив, что плотность постоянна в поле течения, получим для приращения скорости вызванных влиянием центробежных сил формулу

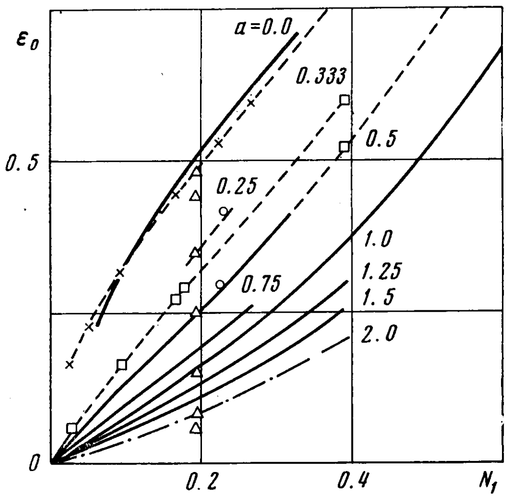
$$\Delta u = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{u}{R_k} \approx \frac{K+1}{2K}\frac{u}{R_k}$$

Коэффициент $2K/(K+1)$ и дополнительный член с квадратичной зависимостью от числа M_∞ определяют вид поправки

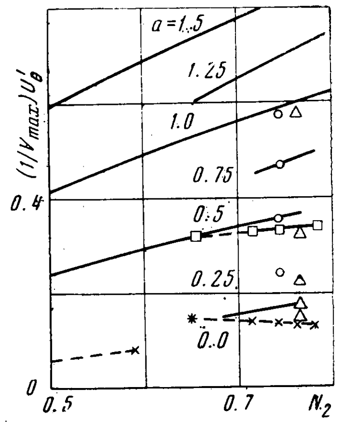
$$u(\theta) = u_\theta'\theta[1 + \theta^2(0.01706 + 0.1757M_\infty^{-2} - 1.025K(1+2K)^{-1})]$$

Точность формулы относительно численного решения в диапазоне $1.5 \leqslant M_\infty \leqslant \infty$ не ниже 5% при $1.05 \leqslant \varkappa < 1.2$ и 1.8% при $1.2 \leqslant \varkappa \leqslant 1.66$.

Формула позволяет в случае совершенного газа с помощью интеграла Бернулли и энтропийной функции определить на сфере все параметры течения с точностью аппроксимационной формулы. Для равновесно-диссоциирующего газа формула тоже справедлива, однако для определения давления и плотности на сфере нужно интегрировать уравнение движения вдоль изэнтропы, что несколько сложнее расчета в случае совершенного газа. Но можно с достаточной точностью рассчитать значения давления и плотности, воспользовавшись подобием по K и M_∞ и перейдя к совершенному газу [2, 3].



Фиг. 1



Фиг. 2

4. Воспользуемся параметрами подобия у сферы для вывода аппроксимационных зависимостей в случае эллипсоида вращения. При этом по сравнению с течением у сферы появляется дополнительный параметр — линейный размер a.

Исследование обтекания эллипсоидов вращения с полуосью $a = 0.5$, 0.75, 1, 1.25 и 1.5 было проведено методом установления [4] в диапазоне изменения $1.05 \leqslant \varkappa \leqslant 1.4$ и $1.5 \leqslant M_\infty \leqslant 1000$. В исследуемом поле располагалось 24×11 узлов расчетной сетки.

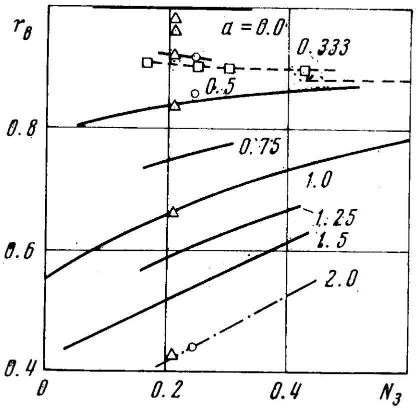
Результаты расчетов, дополненные данными из работ [5–10], построены в параметрах подобия для сферы на фиг. 1—4. На этих фигурах кривые при $a = 1$ представляют собой аналитические зависимости из п. 2. Для каждого $a = \mathrm{const}$ точки при любых K и M_∞ ложатся на одну кривую, выбор которой определяется только значением a.

Сплошными линиями обозначены результаты настоящей работы, а также данные, полученные автором по методу [5] при $a = 0$. Штриховой линией с крестами обозначены результаты А. С. Холодова, полученные сеточно-характеристическим методом [6] в случае обтекания диска ($a = 0$). Штриховой линией с белыми квадратами нанесены результаты работ [7, 8] в случаях $a = 0.333$, 0.5. Штрихпунктирной кривой нанесены данные [9], соответствующие $a = 2$. Отдельными, без кривых, белыми треугольниками показаны результаты [10] при числе $M_\infty = 6$ и значениях $a = 0.05$, 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2, 3. Белыми кружками обозначены результаты [11].

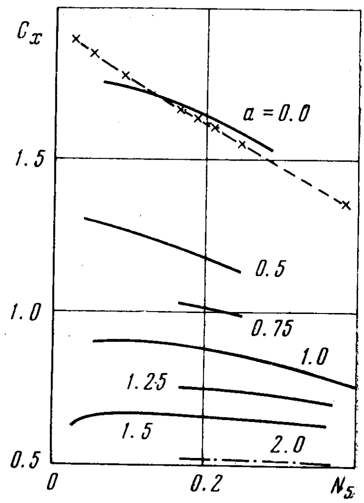
Сопоставим результаты расчетов. Отметим прежде всего, что различия в интегральной (C_x) и локальных (ε_0, r_b, r_w) характеристиках, полученных разными методами, значительно меньше, чем в значениях дифференциальной характеристики $\partial u / \partial \theta$.

Значения ε_0, полученные в настоящей работе, отличаются от данных [7, 8, 10] не более чем на 0.5%, а от данных [11] на 5%. Также $\sim$5% составляют отличия данных, полученных по методике [5], и результатов [6]. Все кривые для величин ε_0 сходятся в точке $\varepsilon_0 = 0$, $N_1 = 0$. Эта точка соответствует гиперзвуковому пределу $\varkappa = 1$ и $M_\infty = \infty$.

Наиболее низка точность совпадения значений $\partial u / \partial \theta$. Отличия составляют от



Фиг. 3



Фиг. 4

данных работ [7, 10, 11] $\sim$10%. Результаты [7] при $a = 0.5$ и [6] при $a = 0$ и $\varkappa = 1.4$ имеют значения $d\varepsilon_0 / dN_1$, существенно отличающиеся (вплоть до знака) от полученных в настоящей работе. При этом данные [6] для $a = 0$ при $\varkappa = 1.4$ (фиг. 2) не соответствуют данным этой же работы при $\varkappa < 1.4$ (эти последние результаты находятся в хорошем качественном соответствии с результатами расчета эллипсоидов).

Расхождения в результатах различных авторов в функции r_b (фиг. 3) не превышают 1.5%. Несколько странно выглядит только тенденция роста величины r_b при уменьшении значения N_3 в результатах [7] при $a = 0.333$ (это «несоответствие» укладывается, правда, в $2 \div 3$% величины r_b).

В значениях r_w отличия не превышают 2%, за исключением результатов Ю. М. Давыдова [12], в которых с уменьшением числа M_∞ ошибка возрастает, достигая при $N_4 = 1.9$ примерно $35 \div 40$%. По-видимому, результаты [12] (использована модификация известного метода *FLIC*) могут рассматриваться только как качественные по крайней мере для ряда характеристик течения.

Кривые для отдельных значений $a = \text{const}$ в диапазоне $N_4 > 0.3$ практически параллельны. При стремлении M_∞ к бесконечности и $(\varkappa - 1)$ к нулю, величины r_w сходятся к нулю.

Расчетные коэффициенты сопротивления полуэллипсоидов в литературе почти отсутствуют. Сопоставление результатов, полученных по методу [5], со значениями из [6] при $a = 0$ дает максимальное отличие $\sim$2.8% в области малых значений N_5.

Характерное уменьшение величины C_x (фиг. 4) при малых значениях N_5 для заданной кривой $a = \text{const}$ вызвано влиянием центробежных сил [4]. Это падение C_x ослабевает с уменьшением параметра a и совсем отсутствует при $a = 0$ в результатах [6].

5. Не меняя параметров подобия, трансформируем исследуемые функции таким образом, чтобы свести их к кривым, соответствующим $a = 1$. В результате такой трансформации с помощью аналитических зависимостей от a и M_∞ получены аппроксимационные формулы

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_c - N_1[0.42 + 0.262(a-2) - 0.18(a-2)^2] + \beta \qquad (0 \leqslant a \leqslant 2)$$

$$(0 \leqslant N_1 \leqslant 0.4)$$

$$\beta = \begin{cases} 0.17 - 0.38a + 0.29a^2 & (a < 0.6) \\ 0 & (a \geqslant 0.6) \end{cases}$$

$$V_{\max}^{-1} \frac{\partial u}{\partial \theta} = (0.188 + 0.692a) N_2 (1 - 0.15 N_2)$$

$$r_b = 1 + a(0.35-0.0125a^2)(N_3 - 1.2)$$

$$r_w = 1.05N_4 - 0.38(a-1) + 0.017(a^3 - 1) \qquad (0 \leqslant a \leqslant 2)$$

$$(2 \leqslant M_\infty \leqslant \infty)$$

$$C_x = C_{x_c} - [1-0.44(N_5 - 0.1) - 0.72(N_5 - 0.1)^2](a-1) + 0.21(a^2 - 1)$$

где индекс c дает значение соответствующего параметра для сферы.

Точность этих формул приведена в таблице.

Аппроксимационная формула для скорости на поверхности эллипсоида имеет следующий вид:

$$u(\theta) = u_\theta'\theta[1 + (-0.033 + 0.176M_\infty^{-2} - 1.025K(1+6K)^{-1} -$$

$$- 0.15(a-1)(5-a))\theta^{2(2-a)+(1.5-a)^4}]$$

Точность ее при $0.5 \leqslant a \leqslant 1.5$, $3 \leqslant M_\infty \leqslant \infty$ и $\varkappa \geqslant 1.2$ не ниже 11%. Как и аналогичная формула для сферы, она позволяет определить все параметры на поверхности эллипсоида.

В заключение отметим, что описанным выше приемом с помощью теории гиперзвуковых течений и численных результатов можно построить аппроксимационные зависимости практически для любого параметра течения в ударном слое.

Автор благодарит Ю. Б. Радвогина и А. С. Холодова за предоставленные для сравнения результаты расчетов.

Поступила 4 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Стулов. В. П. О законе подобия при сверхзвуковом обтекании затупленных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
2. Лебедев М. Г., Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Приближенный метод учета влияния реальности газа при гиперзвуковом обтекании сегментальных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
3. Косых А. П., Минайлос А. Н. Обтекание сферической поверхности сверхзвуковым потоком равновеснодиссоциирующего воздуха. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 5.
4. Базжин А. П., Благосклонов В. И., Минайлос А. Н., Пирогова С. В. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком совершенного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 3.
5. Козлова И. Г., Минайлос А. Н. Несимметричное обтекание лобовой части тела вращения сверхзвуковым потоком совершенного или реального газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 3.
6. Численное исследование современных задач газодинамики. М., ВЦ АН СССР, 1973 (в печати)..
7. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
8. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
9. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. М., «Наука», 1970.
10. Бабенко К. П., Иванова В. Н., Казанджан Э. П., Кукаркина М. А., Радвогин Ю. Б. Нестационарное обтекание головной части затупленного тела идеальным газом. М., ИПМ, АН СССР, 1969.
11. Xolt M., Hoffman G. Calculation of hypersonic flow past spheres and ellipsoids JAS — ARS Report, 1961, № 61—209—1903, 29, p. 7.
12. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод крупных частиц для газодинамических расчетов. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1, стр. 182—207.