

УДК 532.546.013

ДВЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ В СРЕДАХ СО СЛОИСТОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В. М. МАКСИМОВ, М. М. МАРТИРОСЯН, М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

Рассмотрена модельная задача о вытеснении одной несжимаемой жидкости другой в слоистом пласте. Дается детальный анализ предельных схем вытеснения. Указаны случаи интегрируемости уравнений, описывающих движение границы раздела между жидкостями. Приведены результаты расчетов пластовых давлений и закоп движения подвижной границы раздела в широком диапазоне изменения параметров среды.

В работе [1] были предложены две предельные схемы вытеснения одной несжимаемой жидкости другой в слоистых пластах, состоящих из хорошо проницаемых пропластков, разделенных мало проницаемыми перемычками. Предполагалось, что при наличии перетоков в зоне совместной фильтрации жидкостей в течение всего процесса вытеснения либо перемычка полностью насыщена вытесняемой жидкостью (первая предельная схема), либо перемычка заполнена только вытесняющей жидкостью (вторая предельная схема).

Здесь дается детальный анализ предельных схем вытеснения. Для модели фильтрации, описанной в [1], в случае плоскопараллельного движения указаны случаи интегрируемости уравнений для определения положения фронтов вытеснения в хорошо проницаемом пропластке и получено аналитическое решение задачи.

В отличие от метода работы [2], реализация которого в общем случае связана с расчетами на ЭВМ по нестандартным программам, рассматриваемый здесь подход приводит к простым расчетным формулам, приспособленным к возможностям инженерной практики.

Рассмотрим модельную задачу о закачке воды через галерею в ограниченном нефтенасыщенном пласте, состоящий из двух пропластков, разделенных мало проницаемой перемычкой. Схема фильтрации представлена на фиг. 1. Жидкости считаются несжимаемыми, вытеснение нефти водой — поршневым.

Предполагается, что в пропластке выше перемычки поддерживается постоянное начальное давление p_0 . Такая схема фильтрации, будучи достаточно простой, учитывает характерные особенности процесса вытеснения в слоистых грунтах.

Область течения в нижнем пропластке состоит из двух зон: зоны, занятой вторгшейся водой (D_1), и зоны вытесняемой нефти (D_2), отделенных одна от другой подвижной границей $x_0 = x_0(t)$. Вследствие повышения давления в нижнем пропластке будет происходить переток жидкости через перемычку, в результате чего в последней также образуется граница раздела Γ^0 между водяной и нефтяной зонами, форма которой будет определяться выражением

$$y^0 = h_0 + h(x, t) \quad (0 \leq h(x, t) \leq h^0)$$

При этом вследствие условия $k^0 \ll k_0$ (k^0 , k_0 — соответственно проницаемости перемычки и нижнего пропластка) горизонтальная фильтрация в перемычке пренебрежимо мала по сравнению с вертикальным движением. Поэтому будем предполагать, что происходит лишь вертикальный переток жидкости через перемычку. Задача состоит в нахождении распределения давлений в каждой из зон D_i ($i = 1, 2$), функции $x_0(t)$ и оценке сверху и снизу положения границы раздела Γ^0 в перемычке.

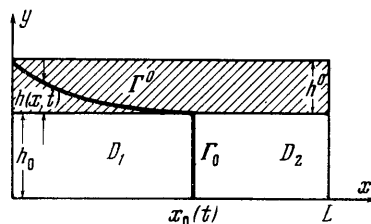
В рамках схемы осреднения, обобщающей схему Мятлева — Гириногого [3], определяющие уравнения для средних давлений в нижнем пропластке в зонах D_i ($i = 1, 2$) согласно [1] имеют вид

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{p_1 - p_0}{k_* h_0 \varphi(x, t)} = 0 \quad (0 < x < x_0(t)) \quad (1)$$

$$\varphi(x, t) = (1 - \mu_*) h(x, t) + \mu_* h^0 \quad (\mu_* = \mu_2 / \mu_1) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - L_0^{-2} (p_2 - p_0) = 0 \quad (x_0(t) < x < L) \quad (3)$$

$$L_0 = (k_* h_0 h^0)^{1/2}, \quad k_* = k_0 / k^0$$



Фиг. 1

при граничных условиях

$$p_1(0, t) = p_{01}, \quad p_2(L, t) = p_0 \quad (4)$$

$$p_1(x_0, t) = p_2(x_0, t), \quad \mu_* \frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} = \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} \quad (5)$$

Здесь h_0 и h° — мощности нижнего пропластка и перемычки соответственно; $h(x, t)$ — мощность части перемычки, занятой водой; μ_1 и μ_2 — вязкости воды и нефти; $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$ — средние давления в пропластке в зонах D_1 и D_2 соответственно.

Для определения $x_0(t)$ имеем кинематическое соотношение Кельвина с начальным условием $x_0(0) = 0$

$$m_0 \frac{dx_0}{dt} = - \frac{k_0}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} \quad (6)$$

В зоне совместного движения D_1 скорость перстока жидкостей через перемычку равна [1]

$$w_1(x, t) = \frac{k^\circ}{\mu_1} \frac{p_1(x, t) - p_0}{\varphi(x, t)} \quad (7)$$

Тогда форма границы раздела Γ° находится из уравнения

$$m^\circ \partial h / \partial t = w_1(x, t) \quad (8)$$

с начальным условием $h(x, 0) = 0$. Здесь m° — пористость перемычки.

Для дальнейших упрощений вместо использования уравнения (8), служащего для точного определения границы Γ° , будем исходить из двух предельных схем вытеснения, полагая в (1) $h(x, t) = 0$ (первая предельная схема) и $h(x, t) = h^\circ$ (вторая предельная схема). Тогда соотношения (1), (3), (4) — (6), запишем в безразмерном виде

$$\partial^2 P_1^{(\alpha)} / \partial \xi^2 - [c^{(\alpha)}]^2 P_1^{(\alpha)} = 0 \quad (0 < \xi < \xi_0(\tau)) \quad (9)$$

$$(c^{(1)} = \mu_*^{-1/2}, \quad c^{(2)} = 1)$$

$$\partial^2 P_2^{(\alpha)} / \partial \xi^2 - P_2^{(\alpha)} = 0 \quad (\xi_0 < \xi < l) \quad (10)$$

$$P_1^{(\alpha)}(0, \tau) = 1, \quad P_2^{(\alpha)}(l, \tau) = P_{02} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (11)$$

$$P_1^{(\alpha)}(\xi_0, \tau) = P_2^{(\alpha)}(\xi_0, \tau), \quad \mu_* \frac{\partial P_1^{(\alpha)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{\partial P_2^{(\alpha)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (12)$$

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = - \frac{\partial P_1^{(\alpha)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0}, \quad \xi_0(0) = 0 \quad (13)$$

Здесь индекс α указывает на номер предельной схемы и введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = x / L_0, \quad \xi_0 = x_0 / L_0, \quad \tau = t / T_0, \quad l = L / L_0$$

$$\left(T_0 = \frac{m_0 \mu_1 h^\circ h_0}{k^\circ \Delta p_0}, \quad L_0 = (k_* h^\circ h_0)^{1/2} \right)$$

$$P_i^{(\alpha)}(\xi, \tau) = \frac{P_i^{(\alpha)} - P_0}{\Delta p_0} \quad (i = 1, 2), \quad P_{02} = \frac{P_{02} - P_0}{\Delta p_0} \quad (\Delta p_0 = p_{01} - p_0)$$

Характерные параметры T_0 и L_0 рассматриваемой задачи имеют соответственно порядок времени прорыва перемычки нагнетаемой жидкостью и положения границы $x_0(t)$ к этому моменту времени.

Сохраняя далее индекс α лишь при коэффициентах интегрирования и $c^{(\alpha)}$, получаем после интегрирования уравнений (9) и (10) с учетом (12), (13)

$$P_1(\xi, \tau) = A_\alpha \operatorname{sh} c^{(\alpha)} \xi + e^{-c^{(\alpha)} \xi} \quad (0 < \xi < \xi_0, \quad \alpha = 1, 2) \quad (14)$$

$$P_2(\xi, \tau) = -B_\alpha s(\xi) + P_{02} e^{-(l-\xi)} \quad (\xi_0 < \xi < l) \quad (15)$$

$$A_\alpha = \frac{1}{\Delta(\xi_0)} \{P_{02}e^{-l} - e^{-c(\alpha)\xi_0} [c(\xi_0) + \mu_* c^{(\alpha)} s(\xi_0)]\}$$

$$B_\alpha = \frac{1}{\Delta(\xi_0)} \{\mu_* c^{(\alpha)} + P_{02}e^{-(l-\xi_0)} [\text{sh } c^{(\alpha)} \xi_0 - \mu_* c^{(\alpha)} \text{ch } c^{(\alpha)} \xi_0]\}$$

$$\Delta(\xi_0) = \text{sh } c^{(\alpha)} \xi_0 c(\xi_0) - \mu_* c^{(\alpha)} \text{ch } c^{(\alpha)} \xi_0 s(\xi_0)$$

$$c(x) = e^{-l} \text{ch}(l-x), \quad s(x) = -e^{-l} \text{sh}(l-x)$$

После использования (14) уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \frac{c^{(\alpha)}}{\Delta(\xi_0)} [c(\xi_0) - P_{02}e^{-l} \text{ch } c^{(\alpha)} \xi_0], \quad \xi_0(0) = 0 \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (16) получаем

$$2c^{(\alpha)}\tau = \int_1^{t_0} \frac{(t^{2c^{(\alpha)}} - 1)(t^2 + a^2) - \mu_* c^{(\alpha)}(t^{2c^{(\alpha)}} + 1)(t^2 - a^2)}{t^{c^{(\alpha)}}(t^2 + a^2) - P_{02}at(t^{2c^{(\alpha)}} + 1)} \frac{dt}{t} \quad (17)$$

$$(t_0 = e^{\xi_0}, \quad a = e^l)$$

Интеграл в последнем соотношении можно представить в виде совокупности табличных интегралов и интегралов, которые выражаются через элементарные функции при рациональных $c^{(\alpha)}$ (условие интегрируемости П. Л. Чебышева). Отсюда следует, что из (17) можно получить конечное соотношение для определения положения границы $\xi_0 = \xi_0(\tau)$ в случае второй предельной схемы ($c^{(\alpha)} = 1$) при любых значениях параметров, а в случае первой предельной схемы ($c^{(\alpha)} = 1/\sqrt{\mu_*}$) — при $\sqrt{\mu_*} = n$ (n — натуральное число). Для второй предельной схемы из (17) получаем

$$2\tau = \frac{\mu_*}{m} \int_1^{t_0} \frac{-b_1 t^4 + b_2 t^2 + b_3}{t^2 + k^2 \text{sign } m} \frac{dt}{t^2} \quad (18)$$

$$b_1 = 1 - 1/\mu_* > 0, \quad b_2 = (1 + 1/\mu_*)(a^2 - 1) > 0, \quad b_3 = (1 - 1/\mu_*)a^2 > 0$$

$$m = 1 - aP_{02}, \quad k^2 = \frac{a(a - P_{02})}{|1 - aP_{02}|}$$

Из (18) находим

$$2\tau = \frac{\mu_*}{m} \left[\left(\frac{b_3}{k^2} - b_1 t_0 \right) \frac{t_0 - 1}{t_0} + \left(b_1 k + \frac{b_2}{k} - \frac{b_3}{k^3} \right) \left(\text{arc tg } \frac{t_0}{k} - \text{arc tg } \frac{1}{k} \right) \right] \quad (19)$$

$$(m > 0)$$

$$2\tau = \frac{\mu_*}{m} \left[\left(\frac{b_3}{k^2} - b_1 t_0 \right) \frac{t_0 - 1}{t_0} + \frac{1}{2} \left(b_1 k - \frac{b_2}{k} - \frac{b_3}{k^3} \right) \ln \left| \frac{k + t_0}{k - t_0} \right| \right] \quad (m < 0)$$

При нахождении закона движения $\xi_0 = \xi_0(\tau)$ согласно первой предельной схеме для простоты будем считать $P_{02} = 0$ и $\sqrt{\mu_*} = 2$ ($c^{(\alpha)} = 1/2$), что представляет практический интерес. В этом случае выражение (17) существенно упрощается и после интегрирования получаем ($\mu_* = 4$)

$$\frac{\tau}{2} = -\frac{(\sqrt{t_0} - 1)^2}{\sqrt{t_0}} + \frac{a+1}{\sqrt{2a}} \left[\ln \frac{t_0 + \sqrt{2at_0} + a}{t_0 - \sqrt{2at_0} + a} - \ln \frac{1 + \sqrt{2a} + a}{1 - \sqrt{2a} + a} \right] +$$

$$+ \frac{a-1}{\sqrt{2a}} 2 \left(\text{arc tg } \frac{\sqrt{2at_0}}{a-t_0} - \text{arc tg } \frac{\sqrt{2a}}{a-1} \right) \quad (20)$$

Для второй предельной схемы в этом же случае из (19) имеем ($m = 1, k = a$)

$$2\tau = -(\mu_* - 1) \frac{(t_0 - 1)^2}{t_0} + \frac{2\mu_*(a^2 - 1)}{a} \left(\text{arc tg } \frac{t_0}{a} - \text{arc tg } \frac{1}{a} \right) \quad (21)$$

Выражения (20), (21) позволяют находить координату фронта $\xi_0(\tau)$ в любой момент времени для каждой из предельных схем. По известной функции $\xi_0(\tau)$ давления в зонах D_i ($i = 1, 2$) определяются по формулам (14), (15). Далее, используя выражение для скорости перетока (7) в безразмерном виде

$$v_1(\xi, \tau) = [c^{(\alpha)}]^2 P_1(\xi, \tau) \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0)$$

$$\left(v_1 = \frac{w_1}{q_0}, \quad q_0 = \frac{h^\circ \Delta p_0}{\mu_1 h^\circ} \right)$$

можно определить объем жидкости $Q^{(\alpha)}$, перетекающей из верхнего проплатка через перемычку в зоне D_1 . Имеем

$$\frac{dQ^{(\alpha)}}{d\tau} = [c^{(\alpha)}]^2 \int_0^{\xi_0} P_1(\xi, \tau) d\xi = c^{(\alpha)} [(A_\alpha \operatorname{ch} c^{(\alpha)} \xi_0 - e^{-c^{(\alpha)} \xi_0}) - (A_\alpha - 1)]$$

Используя далее (14) и (13) с учетом условия $Q^{(\alpha)} = 0$ при $\tau = 0$, из последнего выражения получаем

$$Q^{(\alpha)} = -\xi_0 + c^{(\alpha)} \tau + c^\alpha \int_0^{\xi_0} \frac{[-A_\alpha(\xi_0)]}{d\xi_0/d\tau} d\xi_0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (22)$$

Учитывая (16) и выражение для $A_\alpha(\xi)$, из (22) окончательно находим для каждой из предельных схем

$$Q^{(1)}(\xi_0) = -\xi_0 + \frac{\tau}{2} - 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t_0}} \right) + \sqrt{\frac{2}{a}} \left[2 \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2at_0}}{a - t_0} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2a}}{a - 1} \right) - \ln \left(\frac{t_0 + \sqrt{2at_0} + a}{t_0 - \sqrt{2at_0} + a} \frac{1 - \sqrt{2a} + a}{1 + \sqrt{2a} + a} \right) \right] \quad (23)$$

$$Q^{(2)}(\xi_0) = -\xi_0 + \tau - 3 \left(1 - \frac{1}{t_0} \right) + \frac{8}{a} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t_0}{a} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a} \right) \quad (24)$$

$$(t_0 = e^{\xi_0})$$

Полученные выражения для объемов перетока позволяют оценить положение границы раздела Γ° в перемычке, исходя из соображений материального баланса. Движение левого конца кривой Γ° определяется интегрированием уравнения (8) при $\xi = 0$. Имеем

$$\pi_0 \tau = \frac{1}{2} (\mu_* - 1) H^2(\tau) + \mu_* H(\tau)$$

$$(0 \leq H(\tau) \equiv H(0, \tau) \leq 1), \quad H = h/h^\circ,$$

$$\pi_0 = h_0/h^\circ \quad (25)$$

Полагая в (25) $H = 1$, определим время τ_* прорыва жидкости через всю мощность перемычки

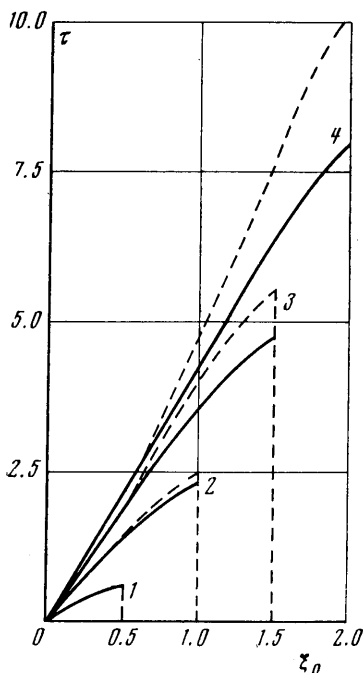
$$\tau_* = \frac{1}{2} (\mu_* + 1) / \pi_0$$

По формулам (20)–(24) были проведены вычисления в диапазоне изменения параметра $l = L / (k_* h^\circ h_0)^{1/2}$ от 0.1 до 2.5 с шагом 0.1 и от 2.5 до 20 с шагом 0.5 для $\mu_* = 4$.

На фиг. 2 и 3 представлены кривые, описывающие закон движения подвижной границы $\xi_0^{(\alpha)}(\tau)$ ((20) и (21)) и изменение давления $p_*^{(\alpha)}(\tau)$ на ней (14) (15) при $\xi = \xi_0^{(\alpha)}$ для различных значений параметра l . Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям l , равным 0.5, 1.0, 1.5 и 2.0 (пунктирные кривые описывают первую предельную схему, а сплошные кривые — вторую предельную схему).

Заметим, что в диапазонах изменения параметров, представляющих практический интерес ($L = 10^5 \div 2 \cdot 10^9$ см, $h_0 \approx h^\circ = 10^3 \div 5 \cdot 10^3$ см, $k_* = 4 \cdot 10^4 \div 10^6$) безразмерный параметр l принимает значения $0.02 \div 1.0$.

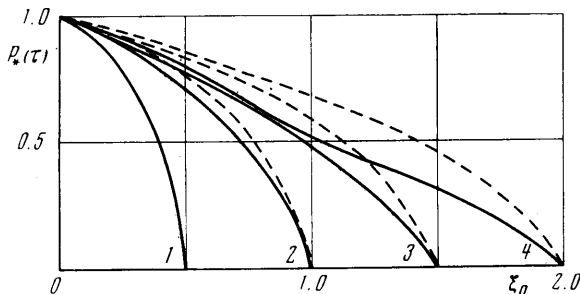
Результаты вычислений показывают, что при $l \leq 0.5$ предельные схемы практически не дают расхождений (кривые 1 на фиг. 2, 3 при $l = 0.5$), при $0.5 < l \leq 1.0$ расхождение



Фиг. 2

между предельными схемами не превышает 5% для $\xi_0(\tau)$ (кривые 2, на фиг. 2) и 10% для $p_*(\tau)$ (кривые 2, на фиг. 3).

Как показывают кривые 3, 4 на фиг. 2, 3, предельными схемами можно пользоваться и в более широком диапазоне изменения параметра l . Значениям $l > 2$ могут соответствовать только пласты с соотношениями проницаемостей $k_* < 10^4$, при которых плохо выполняется основное предположение об отсутствии горизонтальных движений в перемычке.



Фиг. 3

Отметим, что полученные решения, строго говоря, справедливы для времен τ , меньших времени τ_* прорыва перемычки. Эти решения могут быть использованы и после пробоя перемычки; однако несложный учет образующейся в этом случае зоны, через которую осуществляется переток жидкости по всей мощности перемычки, позволяет значительно улучшить указанные оценки. Для объемов перетоков через перемычку (формулы (23), (24)), естественно, оценки получаются грубее.

Для большинства практических расчетов можно пользоваться формулами, полученными по второй предельной схеме, уравнения которой интегрируются для любого значения μ_* .

Отсутствие точных решений рассмотренного типа задач и большие трудности, связанные с их расчетами на ЭВМ в точной постановке, позволяют рекомендовать данную методику при практических инженерных расчетах.

Поступила 24 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Балашова Г. С., Максимов В. М., Филинов М. В. Об одной двумерной задаче вытеснения в неоднородных слоистых пластах при наличии неизвестной подвижной границы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
2. Максимов В. М. О движении двух несмешивающихся жидкостей в слоистой пористой среде при наличии неизвестной подвижной границы раздела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.