УДК 532.517.4

РЕОЛОГИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. НОВОЖИЛОВ

(Ленинград)

Уравнения Рейнольдса, описывающие осредненное течение турбулентного потока жидкости, отличаются от уравнений Навье — Стокса тем, что в них тензор напряжений определяется формулой

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\varepsilon_{ij} - \rho\langle u_i^* u_j^*\rangle \tag{0.1}$$

Здесь δ_{ij} — единичный тензор второго ранга (тензор Кронекера), p — давление в жидкости, μ — коэффициент ее вязкости, ρ — ее плотность, $\langle u_k\rangle$ — математическое ожидание вектора скорости (для упрощения вида формул знак осреднения будем в дальнейшем опускать, т. е. $\langle u_k\rangle = u_k$), ε_{ij} — математическое ожидание тензора скорости деформации (знак осреднения опущен), u_k^* — случайный вектор пульсаций скорости,— $\rho\langle u_i^* u_j^*\rangle$ — симметричный тензор напряжений Рейнольдса, являющийся мерой интенсивности турбулентности в рассматриваемой точке потока

$$\begin{aligned}-\rho\langle u_i^* u_j^*\rangle' &= -\rho\langle u_i^* u_j^*\rangle + {}^1/_3\rho\langle u_k^* u_k^*\rangle = \\ &= -\rho\langle u_i^* u_j^*\rangle - p^*\delta_{ij}\end{aligned} \tag{0.2}$$

$-\rho\langle u_i^* u_j^*\rangle'$ — девиатор тензора Рейнольдса.

Основной проблемой теории турбулентности является замыкание ее уравнений, т. е. выражение тензора Рейнольдса через осредненные скорости u_k и их производные по координатам.

«Содержание многих работ по исследованию турбулентных движений сводится к изучению простых и естественных гипотез о зависимости турбулентных напряжений от средних скоростей и их градиентов, которые позволяют поставить и решить теоретически основные частные задачи теории турбулентности. В настоящее время не существует общей математической постановки задачи о произвольных осредненных турбулентных движениях и вообще не выяснена возможность такой постановки» ([1], стр. 252).

Приведенная цитата объективно оценивает положение дел в современной теории турбулентности. При ознакомлении с последней восхищает высокая точность, достигнутая при описании турбулентного течения в нескольких частных случаях (течение у стенки, течение в трубе) [2, 3], но вместе с тем поражает отсутствие общей постановки задачи теории турбулентности.

Остается фактом, что хотя идеи Л. Прандтля и Т. Кармана, лежащие в основе так называемой полуэмпирической теории турбулентности, были высказаны уже около пятидесяти лет назад, тем не менее до сих пор не удалось с их помощью сколь-либо существенно продвинуться в сторону построения общей теории турбулентности или распространить эти идеи на более широкий круг задач (хотя бы на течение Куэтта). Это заставляет думать, что физика турбулентного сопротивления все еще недостаточно раскрыта и что искать решение проблемы замыкания уравнений Рейнольдса надо путем коренного пересмотра существующего к ней подхода.

1. Рассмотрим девиаторную часть тензора напряжений в турбулентном потоке

$$p_{ij}'/\rho = \nu\varepsilon_{ij} - \langle u_i^* u_j^*\rangle' \tag{1.1}$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости.

Симметричный тензор второго ранга $\langle u_i^* u_j^*\rangle'$ имеет размерность квадрата скорости. Простейшим способом удовлетворить этому условию является предположение, что девиатор тензора Рейнольдса в каждой точке течения пропорционален кинетической энергии осредненного потока, т. е.

$$-\langle u_i^* u_j^*\rangle' = \beta^2 u_k u_k e_{ij} \tag{1.2}$$

Входящая сюда константа β^2 безразмерна. Последнее вытекает из экспериментально установленного факта, что единственным параметром подобия турбулентных течений является число Рейнольдса, откуда следует недопустимость использования в теории турбулентности каких-либо размерных физических констант, кроме тех (μ, ν, ρ), которые уже имеются в уравнениях вязкой жидкости.

Но если β^2 безразмерно, то безразмерен и симметричный девиатор второго ранга e_{ij}. Поскольку рейнольдсовы напряжения суть силы диссипативные, они должны совершать отрицательную работу при любых изменениях тензора скорости деформации. Простейшим безразмерным тензором e_{ij}, подчиняющим формулу (1.2) этому требованию, является направляющий тензор деформации

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} / \varepsilon, \qquad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}} \tag{1.3}$$

ε — интенсивность тензора скорости деформации в рассматриваемой точке потока.

Подставив (1.3) в (1.2), (1.1), приходим к инвариантному соотношению

$$p_{ij}' / \rho = \tau_{ij} = \nu\varepsilon_{ij} + \beta^2 u_k u_k \varepsilon_{ij} / \varepsilon \tag{1.4}$$

которому соответствует следующая формула для коэффициента турбулентной вязкости:

$$A_\tau = \nu\beta^2 T, \qquad T = u_k u_k / \nu\varepsilon \tag{1.5}$$

Безразмерный инвариант T (назовем его локальным числом Рейнольдса, поскольку он при переходе к безразмерным координатам и скорости оказывается пропорциональным числу Рейнольдса R) играет важную роль в излагаемой общей теории, являясь мерой интенсивности турбулентности в рассматриваемой произвольно взятой точке потока.

Представляется правдоподобным принять в качестве критерия ламинарного течения неравенство

$$T \leqslant T_k \tag{1.6}$$

где T_k — безразмерная положительная константа — критическое значение локального числа Рейнольдса.

Инвариантность критерия (1.8), независимость его от субъективного выбора входящих в него размерных величин (чем T выгодно отличается от числа Рейнольдса) позволяет ожидать, что T_k не зависит от геометрии течения, являясь физической константой жидкости, которая играет в гидромеханике роль, аналогичную пределу текучести в механике деформируемых твердых тел.

Формула (1.4) в двух отношениях существенно не похожа на общепринятые выражения для напряжений в турбулентном потоке, а именно: в ней диссипация энергии следует закону не вязкого, а кулоновского («сухого») трения; интенсивность напряжений Рейнольдса пропорциональна удельной кинетической энергии осредненного течения и не зависит от инвариантов тензора скоростей деформации. Последний оказывает влияние на тензор Рейнольдса только посредством своего направляющего тензора e_{ij} (1.3), компоненты которого в пространстве тензоров второго ранга играют роль, аналогичную роли направляющих косинусов в векторном пространстве.

2. Напряжения Рейнольдса должны быть равны нулю на границах жидкости независимо от того, покоятся последние или двигаются. Формула (1.4) удовлетворяет этому требованию, только если граница (или границы) неподвижна. Отсюда возникает необходимость распространения соотношений (1.4) на случай подвижных границ, причем этот вопрос тесно связан с требованием подчинения теории галилеевой инвариантности, или принципу «обратимости», согласно которому задачи о поступательном равномерном движении тела в покоящейся жидкости и об обтекании того же тела набегающим с такой же скоростью потоком эквивалентны.

Если жидкость имеет лишь одну границу, двигающуюся равномерно и поступательно, то естественным обобщением (1.4), удовлетворяющим всем упомянутым выше требованиям, является формула

$$\tau_{ij} = \nu\varepsilon_{ij} + \beta^2 (U_k - u_k)(U_k - u_k)\varepsilon_{ij} / \varepsilon \tag{2.1}$$

Следующим шагом в обобщении формул (1.5), (2.1) будет распространение их на такие установившиеся турбулентные течения, которые поддерживаются равномерным поступательным движением двух границ, перемещающихся с различными скоростями (например, течение Куэтта между двух плоских стенок).

В данном случае, следуя (2.1), можно написать два соотношения

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \nu\varepsilon_{ij} + \beta^2 (U_k^{\mathrm{I}} - u_k)(U_k^{\mathrm{I}} - u_k)\varepsilon_{ij} / \varepsilon \\ \tau_{ij} &= \nu\varepsilon_{ij} + \beta^2 (U_k^{\mathrm{II}} - u_k)(U_k^{\mathrm{II}} - u_k)\varepsilon_{ij} / \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2}$$

Первое из них используется в окрестности границы, перемещающейся со скоростью U_k^{I}, а второе — в окрестности границы, перемещающейся со скоростью U_k^{II}. При этом вся область течения разделяется на две подобласти, разграниченные поверхностью Ω, форма и положение которой определяются из требования непрерывности вектора скорости u_k и тензора скорости деформации ε_{ij} при переходе из одной подобласти в другую.

Уравнения (1.4), (2.1), (2.2), хотя и не охватывают все возможные случаи установившихся турбулентных течений, позволяют решать достаточно широкий круг задач.

Сопоставив (2.1) и (2.2) с (1.4), видим, что локальное число Рейнольдса T в случае поступательно и равномерно движущихся границ, определяется в каждой точке подобластей течения формулой

$$T = (U_k - u_k)(U_k - u_k) / \nu\varepsilon \tag{2.3}$$

где U_k — скорость границы.

Условия «сшивания» решений при переходе из одной подобласти в другую обеспечивают непрерывность T во всей области потока.

3. Изложенную общую теорию, заключающуюся в инвариантных формулах (1.4), (2.1), (2.2), будем называть «скелетной» теорией турбулентности. Это название объясняется тем, что данная теория, не позволяющая достигнуть хорошей количественной точности, качественно правильна. Она дает верное представление о виде профилей скорости в различных конкретных случаях. Кроме того, она верна асимптотически как при $R \to 0$, так и при $R \to \infty$. Первое сразу же видно из формулы (1.4), в которой при достаточно малых скоростях течения нелинейными членами можно пренебречь по сравнению с линейными.

Для доказательства же второго возведем правую и левую части (1.4) в квадрат (в скалярном смысле). Тогда, учитывая, что скалярное произведение направляющего тензора e_{ij} самого на себя равно единице, получаем

$$\tau = \nu\varepsilon + \beta^2 u_k u_k, \qquad \tau = \sqrt{\tau_{kl}\tau_{kl}} \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует:

$$\tau / u_k u_k = \nu\varepsilon / u_k u_k + \beta^2 \tag{3.2}$$

Здесь первый член правой части с возрастанием R стремится к нулю и, следовательно

$$\tau / u_k u_k \to \beta^2 \qquad (R \to \infty)$$

Таким образом, входящая в (1.4), (3.1), (3.2) безразмерная константа β^2 имеет простой физический смысл — она определяет горизонтальную асимптоту кривой, изображающей зависимость

$$V_*^2 / V_0^2 = f(R) \tag{3.3}$$

где V_* — динамическая скорость на стенке трубы, V_0 — средняя скорость течения в трубе.

О существовании такой асимптоты хорошо известно из опытов. Она проходит тем выше, чем больше шероховатость стенок трубы. Соответственно, коэффициент β^2 не только константа жидкости, но и мера шероховатости границ течения.

Таким образом, предложенная теория действительно асимптотически верна, хотя с количественной точки зрения и недостаточна.

Причина последнего ясна. Дело в том, что в рассмотренной теории интенсивность тензора Рейнольдса принята не зависящей от инвариантов тензора скорости деформации, тогда как в действительности такая зависимость, хотя и довольно слабая, но имеется, чем и объясняется наблюдаемый при опытах более плавный переход кривой (3.3) с одной асимптоты на другую.

4. Простейшим способом учета зависимости девиатора тензора Рейнольдса от инвариантов тензора скорости деформации является переход

$$-\langle u_i^* u_j^* \rangle' = \nu\beta^2 T \varepsilon_{ij} \tag{4.1}$$

к более общей зависимости

$$-\langle u_i^* u_j^* \rangle' = \nu\alpha^2 T^n \varepsilon_{ij} \qquad (0 \leqslant n \leqslant 1) \tag{4.2}$$

При $n=0$ (4.2) превращается в соотношения линейно-вязкой жидкости, при $n=1$ — в рассмотренные выше соотношения для жидкости с кулоновским трением.

Рассмотрим задачу об установившемся течении в трубе, основываясь на соотношении вида (4.2) и пренебрегая (как обычно) ньютоновской вязкостью по сравнению с вязкостью турбулентной. При этом придем к уравнению

$$\nu\alpha^2 \frac{u^{2n}}{(\nu du/dr)^n} \frac{du}{dr} = -\frac{qr}{\rho} \tag{4.3}$$

в котором u — скорость течения в трубе, q — перепад давления, r — расстояние, отсчитываемое от оси трубы.

Введя

$$\xi = r / r_0, \qquad V = u / u_0,$$

где r_0 — радиус трубы, u_0 — максимальная в ней скорость, получаем

$$\frac{V^{2n/(1-n)}}{R} \frac{dV}{d\xi} = -V_*^{2/(1-n)} \xi^{1/(1-n)} \tag{4.4}$$

$$R = r_0 v_0 / \nu, \qquad V_*^2 = q r_0 / \rho u_0^2 \tag{4.5}$$

Проинтегрировав уравнение (4.4) и подчинив его общее решение условию $V=0$ при $\xi=1$, приходим к формуле

$$V = \left(\frac{1+n}{2-n}\right)^k R^k \left(\frac{V_*}{\alpha}\right)^{k+1} (1-\xi^l)^k \tag{4.6}$$

$$\left(k = \frac{1-n}{1+n}, \quad l = \frac{2-n}{1-n}\right)$$

Отсюда (используя условие $V=1$ при $\xi=0$) получается следующее уравнение, связывающее $V^2{}_*$ с числом Рейнольдса

$$\alpha^2[(2-n)/(1+n)]^{1-n}=V^2{}_*R^{1-n} \tag{4.7}$$

причем выражение (4.6) принимает вид

$$V=(1-\xi^l)^k \tag{4.8}$$

При $n={}^3/_4$ (4.7) превращается в известный, установленный эмпирически, закон Блазиуса

$$V^2{}_*R^{1/4}=\alpha^2({}^7/_5)^{1/7}=\mathrm{const}, \qquad v=(1-\xi^5)^{1/7} \tag{4.9}$$

Следует отметить, что этот профиль «полнее» профиля Кармана, получившего название «закона одной седьмой». Любопытно, что если бы пренебрегли зависимостью правой части уравнения (4.4) от ξ (как обычно делают в теории турбулентности при рассмотрении течения в трубах), то пришли бы вместо (4.9) к «закону одной седьмой».

Аналогично задаче о течении в трубе может быть рассмотрено и установившееся течение Куэтта (между двумя плоскостями, двигающимися в противоположные стороны с одинаковыми скоростями $u_0=\mathrm{const}$). Соответствующее ему уравнение (которое сразу же записывается в безразмерной форме) имеет вид

$$\alpha^2(1-V)^{2n}\left(\frac{1}{R}\frac{dV}{d\eta}\right)^{1-n}=V_*{}^2=\mathrm{const} \tag{4.10}$$

$$\eta=y/h, \quad V=\frac{u}{u_0}, \quad V_*{}^2=\frac{\tau_0}{\rho u_0{}^2}, \quad R=\frac{u_0h}{\nu} \tag{4.11}$$

где $2h$ — расстояние между плоскостями, τ_0 — касательное напряжение на них.

Уравнение (4.10) описывает течение в области $0\leqslant\eta\leqslant1$. Аналогичное уравнение, отличающееся от (4.10) заменой в левой части $(1-V)^{2n}$ на $(1+V)^{2n}$, может быть написано и для нижней области течения $(0\geqslant\eta\geqslant-1)$, однако в этом нет необходимости, поскольку очевидное требование нечетности решения рассматриваемой задачи приводит к условию $\eta=0$, $V=0$, позволяя обойтись только уравнением (4.10). Проинтегрировав последнее и подчинив его общее решение условию $V=1$ при $\eta=1$, получаем

$$V=1-\left(\frac{V_*}{\alpha}\right)^{1+k}R^k\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^k(1-\eta)^k, \qquad \left(k=\frac{1-n}{1+n}\right) \tag{4.12}$$

Отсюда, воспользовавшись условием $V=0$ при $\eta=0$, можно вывести следующую зависимость $V^2{}_*$ от числа Рейнольдса

$$\alpha^2\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^{1-n}=V_*{}^2R^{1-n}$$

При этом формула (4.12) принимает вид

$$V=1-(1-\eta)^k \qquad (0\leqslant\eta\leqslant1) \tag{4.13}$$

Это выражение определяет профиль скоростей в течении Куэтта.

При $n={}^3/_4$ (соответствующем закону Блазиуса для труб) формула (4.13) принимает вид

$$V=1-(1-\eta)^{1/7}$$

Заметим, что согласно полученным результатам в задаче о течении в трубе и в задаче о течении Куэтта

$$\frac{dV}{d\xi}\to\infty\quad(\xi\to 1),\qquad \frac{dV}{d\eta}\to\infty\quad(\eta\to 1)$$

И то и другое является следствием пренебрежения ньютоновской вязкостью ν по сравнению с турбулентной вязкостью.

5. Хотя зависимость (4.2) позволяет добиться значительно лучших количественных результатов, чем зависимость (4.1), в одном отношении первая является шагом назад по сравнению со второй, а именно соответствующие ей кривые (3.3) стремятся при $R\to\infty$ к оси абсцисс, а не к асимптоте $\beta^2\neq 0$. Тем самым переход от (1.2), (1.3) к (4.1) означает утрату важного асимптотического свойства задач теории турбулентности. Восстановить его можно лишь путем комбинирования формул (4.1) и (4.2), принимая, например, следующее выражение для девиатора тензора Рейнольдса

$$-\langle u^*_i u^*_j\rangle' = \nu[\alpha^2 T^n + \beta^2 T]\varepsilon_{ij} \tag{5.1}$$

Рассмотрим, исходя из этого последнего соотношения, задачу об установившемся течении жидкости в полубесконечной области при условии

$$\mathbf{u}\to\mathbf{u}_0\qquad y\to\infty \tag{5.2}$$

где y — расстояние точки от стенки, $\mathbf{u}_0$ — постоянный вектор, параллельный стенке.

В этом случае соотношения (5.1) приводят к уравнению

$$\alpha^2 u^{2n}\left(\nu\frac{du}{dy}\right)^{1-n} + \beta^2 u^2 = \beta^2 u_0^2 \tag{5.3}$$

на основании которого

$$\nu\frac{du}{dy} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2/(1-n)} (u_0^2 - u^2)^{1/(1-n)} u^{-2n/(1-n)} \tag{5.4}$$

Разделив здесь переменные и введя $V = u / u_0$, получаем

$$\int_0^V \frac{V^{\frac{2n}{(n+1)}}dV}{(1-V^2)^{\frac{1}{(n-1)}}} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n-1}}\frac{u_0 j}{\nu} \tag{5.5}$$

При частном значении $n = 3/4$ (примерно соответствующем закону Блазиуса для труб) формула (5.5) принимает вид

$$\int_0^V \frac{V^6\,dV}{(1-V^2)^4} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8\frac{u_0 y}{\nu} \tag{5.6}$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, элементарен. Взяв его, находим

$$\frac{V}{48(1-V^2)^3}(15-40V^2+33V^4) - \frac{5}{32}\ln\left(\frac{1+V}{1-V}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8\frac{u_0 y}{\nu} \tag{5.7}$$

В непосредственной окрестности стенки (т. е. при $u_0 y/\nu \ll 1$) зависимость V от $u_0 y/\nu$, как следует из (5.6), имеет вид

$$V = 7^{1/7}(\beta/\alpha)^{8/7}(u_0 y/\nu)^{1/7}\qquad (u_0 y/\nu\ll 1) \tag{5.8}$$

а при $u_0 y/\nu\to\infty$ выполняется условие $V\to 1$, как это и должно быть.

Отметим, что если в исходной формуле (5.1) отбросить члены, соответствующие турбулентному сопротивлению по закону Кулона, то рассмотренную задачу решить бы не удалось, так как для нее существенно соблюдение в уравнениях асимптотических свойств турбулентных течений при $R \to \infty$. Не подлежит сомнению, что, определяя девиатор тензора Рейнольдса выражением (5.1), можно достигнуть высокой точности при описании установившихся турбулентных течений. При этом, однако, возможен упрек, что в (5.1) входят три константы (α, β и n), тогда как полуэмпирическая теория турбулентности, как правило, обходится всего двумя константами. Но в этой последней теории искажается асимптотика решений при $R \to \infty$, тогда как теория, основывающаяся на соотношениях (5.1), не имеет этого недостатка. Если же не требовать правильности поведения решений при больших числах Рейнольдса, то в (5.1) можно отбросить второй член правой части, после чего изложенная теория становится двухконстантной.

Сопоставляя эту теорию с полуэмпирической, не следует, разумеется, забывать о существенном качественном различии между ними. Если полуэмпирическая теория занимается всего несколькими частными задачами, не ставя целью (и не имея такой возможности) обобщить свои результаты на все прочие задачи теории турбулентности, то предлагаемая теория с самого начала дает инвариантную формулировку уравнений теории установившихся турбулентных течений, превращая тем самым последнюю в раздел математической физики.

6. До сих пор не использовалось представление о ламинарном пограничном слое и существованием последнего пренебрегалось. Естественно, что при этом из рассмотрения выпадали некоторые тонкости, например закономерности турбулентных течений при числах Рейнольдса, близких к критическим, или зависимость профиля скорости от числа Рейнольдса. При желании все это может быть учтено.

Определив девиатор тензора напряжений в ламинарном пристенном слое обычным соотношением теории вязкой жидкости

$$\tau_{ij} = \nu\varepsilon_{ij} \qquad (T \leqslant T_k) \tag{6.1}$$

и требуя непрерывноси тензора скорости деформации на границе пристенного слоя, приходим к следующему естественному обобщению соотношения (1.4):

$$\begin{gathered}\tau_{ij} = \nu\varepsilon_{ij} + \nu\beta^2 (T - T_k)\,\varepsilon_{ij} = \\ = \nu(1 - \beta^2 T_k)\,\varepsilon_{ij} + \nu\beta^2 T\varepsilon_{ij} \qquad (T \geqslant T_k)\end{gathered} \tag{6.2}$$

Положение и форма границы ламинарного слоя определяется при этом критерием (1.8) и требованием непрерывности вектора осредненной скорости на этой границе.

Отметим, что в формуле (6.2) исправляется обычная для курсов гидродинамики неточность, а именно требуется обращение в нуль девиатора тензора Рейнольдса не на границе потока, а на границе ламинарного подслоя. Внутри последнего тензор Рейнольдса, очевидно, равен нулю. Аналогично могут быть обобщены и соотношения (4.2), (5.1).

Изложенный в этой статье подход к описанию турбулентных течений связан с пересмотром ряда привычных представлений. Так, например, пришлось отказаться от традиционного выражения турбулентной вязкости только через скорость деформации и ее производные. Интенсивность девиатора тензора Рейнольдса оказывается зависящей (в основном) от кинетической энергии осредненного течения. Соответственно, пришлось отказаться и от традиционного представления, что турбулентные диссипативные силы имеют характер вязкого трения. По своим свойствам они оказываются гораздо ближе к кулоновому («сухому») трению, причем эта близость настолько велика, что качественно правильная («скелетная») теория турбулентности может быть построена на основе допущения, что турбулентное сопротивление тождественно кулоновому трению.

Что же касается количественных результатов, то соответствие известной эмпирической формуле Блазиуса получается, если в соотношении (4.2) положить $n = 0{,}75$, причем $n = 0$ соответствует линейной (ньютоновской) вязкости, а $n = 1$ — «сухому» (кулонову) трению. В связи с этим позволительно пошутить, что турбулентное сопротивление — это на $^1/_4$ линейная вязкость, а на $^3/_4$ «сухое» трение, и в такой шутке будет немало серьезного. Последнее относится лишь к течениям с достаточно гладкими стенками. С увеличением их шероховатости турбулентное сопротивление все более приближается к кулонову трению.

Изложенная теория имеет и еще одну, необычную для механики сплошных сред, черту: входящая в формулу для рейнольдсовых напряжений константа β^2 характеризует не только свойства жидкости, но и гладкость ее границ. Тем самым уравнения состояния турбулентного течения оказываются зависящими от граничных условий! С физической точки зрения это, однако, достаточно правдоподобно, если вспомнить, что рассматриваются только установившиеся течения. Процесс распространения турбулентности в этих течениях уже завершен и пульсации скорости в каждой точке потока являются стационарными случайными векторами, дисперсии которых, несомненно, должны зависеть от степени шероховатости стенок. А это и означает зависимость тензора Рейнольдса от граничных условий.

Поступила 12 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
2. Миллионщиков М. Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М., «Наука», 1969.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя, М., «Наука», 1969.