

В заключение заметим, что предложенной методикой можно пользоваться для расчета течения азота в гиперзвуковой части сопла, например, при $M > 5$. (Расчеты показывают, что во всем диапазоне (3.1) при $M > 5$ поток практически заморожен, $d \ln T_k / dM < 10^{-3}$)

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Stollary J. L., Smith J. E. A note on the variation of vibrational temperature along a nozzle. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 2.
2. Stollary J. L., Park C. Computer solutions to the problem of vibrational relaxation in hypersonic nozzle flows. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, No. 1.
3. Phinney R. Nondimensional solutions of flow with vibrational relaxation. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 2.
4. Blythe P. A. Asimptotic solutions in nonequilibrium nozzle flow. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, No. 2.
5. Чирихин А. В. Метод расчета температуры замораживания течения азота в гиперзвуковом сопле. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, № 6.
6. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
7. Sebacher D. I. A correlation on N_2 vibrational \rightarrow translational relaxation times. AIAA Journal, 1967, No. 4.

УДК 532.529.6

СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ НА РАСТУЩИЙ В НЕЙ ПАРОВОЙ ПУЗЫРЬ

С. П. КАЗНОВСКИЙ, Ю. Ф. СЕЛИВАНОВ, В. И. СУББОТИН

(Москва)

С помощью основных уравнений гидромеханики, а также уравнений Лагранжа второго рода получены выражения для определения силы, действующей со стороны жидкости на растущий в ней паровой пузырь. Исследуются случаи роста пузыря на тонкой проволочке и плоской поверхности в идеальной жидкости и жидкости малой вязкости. Показано, что знак гидродинамической силы зависит от конкретного вида закона роста парового пузыря.

Эксперименты, проведенные при кипении жидкостей, показали, что общепринятое представление об отрыве паровых пузырей от поверхности парообразования нуждается в известном уточнении. Считалось [1], что единственной силой, обуславливающей эвакуацию пара от поверхности парообразования, является архимедова подъемная сила. Однако при кипении жидкостей на тонких проволоках можно было наблюдать, как при некоторых режимах кипения образующиеся паровые пузырьки двигались против действия подъемной силы [2-4]. Удалось установить [2], что на растущий паровой пузырь в течение небольшого промежутка времени, включающего в себя момент отрыва, действует сила, по величине превышающая гравитационную подъемную силу.

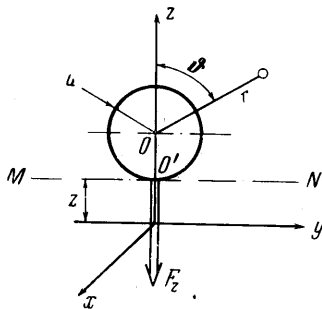
Силу, действующую на растущий в жидкости паровой пузырек, можно представить в виде

$$F = F_g + \sum_i F_i,$$

где F_g — гравитационная подъемная сила, а через $\sum_i F_i$ обозначена совокупность всевозможных остальных сил.

После отрыва пузырька гравитационная подъемная сила по своей величине и долгодействию значительно превышает силы, входящие в $\sum_i F_i$, и определяет в значительной мере движение пузырька в жидкости.

Подробная расшифровка сил, входящих в выражение $\sum_i F_i$, представляется трудной задачей ввиду многообразия факторов, определяющих рост и движение парового пузырька, однако уже априори можно сказать, что по величине и по продолжительности действия эти силы значительно отличаются друг от друга.



Фиг. 1

В этой работе остановимся на анализе гидродинамической составляющей сил ΣF_i , возникающей при взаимодействии растущего пузырька с окружающей его жидкостью.

1. Рост парового пузырька на токовой проволоке. Постановка задачи и вычисление силы в случае идеальной жидкости. Рассмотрим случай роста парового пузырька в бесконечном объеме неподвижной, полностью смачивающей поверхность парообразования жидкости.

Предполагается, что в несжимаемой невязкой жидкости растет по известному закону сфера, одна из точек поверхности которой неподвижна. Движение жидкости считается потенциальным, массовые силы и предьстория процесса не учитываются. влиянием проволоки на движение жидкости пренебрегается.

Рассмотрим движение жидкости, пользуясь подвижной системой координат r, θ , жестко скрепленной со сферой и имеющей начало в центре сферы (фиг. 1).

Для определения потенциала скоростей φ решаем внешнюю задачу Неймана теории потенциала при условиях непроницаемости на поверхности сферы и покоя жидкости на бесконечности

$$\Delta \varphi = 0, \quad (\partial \varphi / \partial n)_{r=a} = \dot{a}(1 + \cos \theta), \quad (\text{grad } \varphi)_{\infty} = 0$$

Здесь a — переменный радиус растущей сферы.

Решение имеет вид

$$\varphi = -\frac{a^2 \dot{a}}{r} - \frac{a^3 \dot{a}}{2r^2} \cos \theta \quad (1.1)$$

Используя интеграл Коши — Лагранжа, записанный с учетом того, что функция φ определена в подвижной системе координат [5], получаем распределение давлений в жидкости.

Сила, действующая со стороны жидкости на растущую сферу, определяется интегрированием распределения давлений по поверхности сферы

$$F_d = -2/3 \pi \rho a^2 [3\dot{a}^2 + a\ddot{a}] \quad (1.2)$$

Учет силы вязкого сопротивления. Для определения силы, действующей со стороны жидкости малой вязкости на растущий пузырек, воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода [6].

Паровой пузырь и жидкость без свободных поверхностей, ограниченная изнутри пузырем, рассматриваются как единая динамическая система. Положение динамической системы считается известным, если известны координаты каждой точки этой системы или их можно определить по каким-либо другим известным величинам, называемым обобщенными координатами. Хотя динамическая система, состоящая из пузыря и жидкости, не является голономной, тем не менее ее можно рассматривать как обычную лагранжеву систему [7]. При этом наложенные на систему связи заменяются эквивалентными по действию силами, а обобщенные силы Q_i определяются из выражения

$$Q_i = \delta A_i / \delta q_i \quad (1.3)$$

где δA_i — работа внешних сил на возможном перемещении, при котором изменяется только обобщенная координата q_i .

Применим уравнения Лагранжа к системе, состоящей из жидкости малой вязкости и растущей сферы, имеющей неподвижную точку O' на поверхности. Отбрасывая наложенные связи, заменяем их действие силой F_z , приложенной в точке O' . С учетом осевой симметрии положение системы определится координатами r, θ , связанными с центром сферы радиуса a , и координатой z , определяющей положение точки O' при виртуальном движении (фиг. 1). Зависимость радиуса сферы от времени считается известной.

Уравнение Лагранжа для координаты z будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z \quad (1.4)$$

Кинетическая энергия виртуального движения определяется как интеграл по поверхности растущей сферы вида

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\sigma \quad (1.5)$$

Потенциал скоростей φ в виртуальном движении определим, решая уравнение Лапласа при следующих граничных условиях:

$$(\partial \varphi / \partial r)_{r=a} = \dot{a} + (\dot{a} + \dot{z}) \cos \theta, \quad (\text{grad } \varphi)_{\infty} = 0 \quad (1.6)$$

Решение имеет вид

$$\Phi = -\frac{a^2 \dot{a}}{r} - \frac{a^3 (\dot{a} + \dot{z})}{2r^2} \cos \phi \quad (1.7)$$

Подставляя первое из условий (1.6) и (1.7) в выражение для кинетической энергии (1.8) и интегрируя по поверхности сферы, получаем

$$T = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 [3\dot{a}^2 + \frac{1}{2}(\dot{a} + \dot{z})^2] \quad (1.8)$$

Влияние вязкости учитывается тем, что в систему внешних сил, действующих на растущую сферу, добавляется сила вязкого трения R_z , которая является функцией скорости, имеет направление, противоположное скорости, и вычисляется через величину скорости диссипации энергии.

Из записи элементарной работы сил, действующих на сферу, при виртуальном движении вдоль оси z

$$Q_z = \delta A_z / \delta z = -F_z + R_z \quad (1.9)$$

где направление F_z соответствует указанному на фиг. 1.

Введя диссипативную функцию Φ , для сил сопротивления, отнесенных к соответствующей координате [8], имеем выражение

$$R_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) \quad (1.10)$$

С помощью равенств (1.3)–(1.9) получается следующее выражение для гидродинамической силы

$$F_z = -\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} \quad (1.11)$$

Использование уравнения кинетической энергии и закона Навье — Стокса приводит к следующему выражению для диссипативной функции:

$$\Phi = \mu \int_V (e_{ij})^2 dV \quad (1.12)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, (e_{ij}) — тензор скоростей деформаций, V — объем жидкости.

Подставляя в (1.12) значение (e_{ij}) , получаем

$$\Phi = 14\mu \pi a \dot{a}^2 + 12\mu \pi a \dot{a} \dot{z} + 6\mu \pi a \dot{z}^2 \quad (1.13)$$

Подстановкой в (1.11) значения кинетической энергии (1.8) и диссипативной функции (1.13), учитывая, что в действительном движении \dot{z} и \ddot{z} равны нулю, получаем значение гидродинамической силы в действительном движении

$$\begin{aligned} F_d &= (F_z)_{\dot{z}=0, \ddot{z}=0} = \\ &= -\frac{2}{3} \pi \rho a^2 [3\dot{a}^2 + a\ddot{a}] - 12\mu \pi a \dot{a} \end{aligned} \quad (1.14)$$

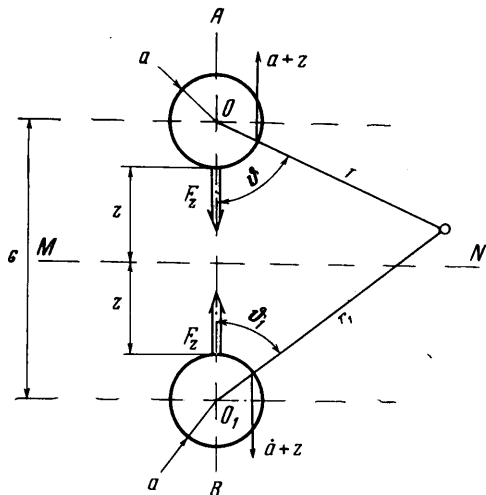
Для невязких жидкостей из формулы (1.14) следует выражение (1.2)

2. Гидродинамическая сила при росте парового пузырька на плоской поверхности.

При тех же предположениях относительно формы пузырька, что и в случае роста парового пузыря на проволоке в идеальной несжимаемой жидкости, рассмотрим пузырек, растущий на плоской поверхности.

Как и в предыдущем случае, введем систему координат (r, ϕ) , связанную с центром растущей сферы, Линией MN на фиг. 1 изображено положение поверхности.

Для определения потенциала скоростей жидкости в случае роста парового пузырька на плоской поверхности необходимо решить уравнение Лапласа с граничными условиями, представляющими собой условие непроницаемости на поверхности пузыря, на поверхности парообразования и условие покоя жидкости на бесконеч-



Фиг. 2

ности

$$\begin{aligned} (\partial\varphi/\partial r)_{r=a} &= a(1 + \cos\vartheta) \\ (\partial\varphi/\partial z)_{z=0} &= 0, \quad (\text{grad } \varphi)_{\infty} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Использование уравнения Лагранжа и возможность определения кинетической энергии как интеграла по поверхности, ограничивающей жидкость, позволяют значительно упростить вычисление гидродинамической силы.

Для определения силы взаимодействия между жидкостью и движущимся в ней паровым пузырем воспользуемся уравнением Лагранжа (1.4), в котором в случае идеальной жидкости $Q_z = -F_z$.

Граничные условия вида (2.1) можно реализовать, если рассмотреть движение в безграничной жидкости двух расширяющихся по одному закону сфер, одна из которых является зеркальным отображением другой. При этом ввиду симметрии движения жидкость не будет протекать через плоскость симметрии, что и обеспечит выполнение условия непроницаемости через поверхность паробразования MN (фиг. 2).

Введем также систему координат (r_1, ϑ_1) , связанную со сферой B .

Граничные условия в случае виртуального движения вдоль оси z имеют вид

$$\begin{aligned} (\partial\varphi/\partial r)_{r=a} &= \dot{a} - (\dot{a} + \dot{z}) \cos\vartheta \\ (\partial\varphi/\partial r_1)_{r_1=a} &= \dot{a} - (\dot{a} + \dot{z}) \cos\vartheta_1 \\ (\text{grad } \varphi)_{\infty} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ввиду линейности задачи решение будем искать в виде

$$\varphi = \dot{a}(\varphi_1 + \dot{a}\varphi_2 + (\dot{a} + \dot{z})\varphi_3 + (\dot{a} + \dot{z})\varphi_4) \quad (2.3)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — гармонические функции, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$(\text{grad } \varphi_i)_{\infty} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial r} = -\cos\vartheta, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial r} = 0 \quad (r = a) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial r_1} = 1, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial r_1} = -\cos\vartheta_1 \quad (r_1 = a) \quad (2.6)$$

Для вычисления кинетической энергии жидкости необходимо вычислить значение потенциала скоростей φ на поверхности сфер A и B .

Значения потенциалов скоростей φ_i на поверхности сфер получим методом последовательных приближений [9].

Первое приближение для потенциала скоростей φ_1 , удовлетворяющее первому из граничных условий (2.5), можно записать в предположении отсутствия сферы B

$$\varphi_{1(1)} = -a^2/r \quad (2.7)$$

Разложим (2.7) в ряд по сферическим функциям в окрестности сферы B

$$\begin{aligned} \varphi_{1(1)} = -a^2 \left[\frac{1}{c} + \frac{r_1}{c^2} P_1(\cos\vartheta_1) + \frac{r_1^2}{c^3} P_2(\cos\vartheta_1) + \right. \\ \left. + \frac{r_1^3}{c^4} P_3(\cos\vartheta_1) + \frac{r_1^4}{c^5} P_4(\cos\vartheta_1) + o\left(\frac{1}{c^5}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $P_i(\cos\vartheta_1)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — полиномы Лежандра.

Чтобы уничтожить нормальную составляющую скорости на поверхности сферы B и тем самым удовлетворить первому из условий (2.6), добавим к выражению (2.7) соответствующие члены, образованные из сферических функций с учетом (2.8)

$$\begin{aligned} \varphi_{1(2)} = - \frac{a^2}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^5}{c^2} \frac{P_1(\cos\vartheta_1)}{r_1^2} - \frac{2}{3} \frac{a^7}{c^3} \frac{P_2(\cos\vartheta_1)}{r_1^3} - \\ - \frac{3}{4} \frac{a^9}{c^4} \frac{P_3(\cos\vartheta_1)}{r_1^4} - \frac{4}{5} \frac{a^{11}}{c^5} \frac{P_4(\cos\vartheta_1)}{r_1^5} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Можно сказать, что в случае течения с потенциалом скоростей в виде (2.9) нормальная составляющая скорости на поверхности сферы A , вычисленная с точностью до c^{-5} , будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial\varphi_{1(2)}}{\partial r} \right)_{r=a} = 1 - \frac{a^5}{c^5} P_1(\cos\vartheta)$$

Реализуя таким образом первое из граничных условий (2.6), нарушается пер-

вое условие (2.5). Чтобы исправить это положение, добавим к $\varphi_{1(2)}$ дополнительный член

$$\varphi_{1(3)} = \varphi_{1(2)} - \frac{1}{2} \frac{a^8}{c^5} \frac{P_1(\cos \vartheta)}{r^2} \quad (2.10)$$

Легко показать, что $\varphi_{1(3)}$ с точностью до c^{-5} удовлетворяет граничным условиям.

Аналогично получается выражение для $\varphi_{2(3)}$, удовлетворяющее с требуемой точностью граничным условиям (2.5), (2.6)

$$\varphi_{2(3)} = -\frac{a^2}{r_1} - \frac{1}{2} \frac{a^8}{c^5} \frac{P_1(\cos \vartheta_1)}{r_1^2} - \frac{1}{2} \frac{a^5}{c^2} \frac{P_1(\cos \vartheta)}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{a^7}{c^3} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{a^9}{c^4} \frac{P_3(\cos \vartheta)}{r^4} - \frac{4}{5} \frac{a^{11}}{c^5} \frac{P_4(\cos \vartheta)}{r^5} \quad (2.11)$$

Разлагая в ряд по сферическим функциям выражения (2.10) и (2.11), поместив начало координат в центр сферы A и отбросив члены порядка малости $o(c^{-5})$, получаем значения потенциалов скоростей φ_1 и φ_2 на поверхности сферы A

$$(\varphi_1)_{r=a} = -a - \frac{1}{2} \frac{a^5}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{a^8}{c^5} P_1(\cos \vartheta) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_{r=a} = & -\frac{a^2}{c} - \frac{3}{2} \frac{a^3}{c^2} P_1(\cos \vartheta) - \frac{5}{3} \frac{a^4}{c^3} P_2(\cos \vartheta) - \\ & - \frac{7}{4} \frac{a^5}{c^4} P_3(\cos \vartheta) - \frac{9}{5} \frac{a^6}{c^5} P_4(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Применяя подобный метод, находим выражения для потенциалов φ_3 и φ_4 . Если записать выражение для φ_3 в виде

$$\varphi_{3(1)} = \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \cos \vartheta \quad (2.14)$$

то тем самым удовлетворяется граничное условие (2.5).

Чтобы с требуемой точностью соблюсти условие (2.6), разложим выражение (2.14) в ряд по сферическим функциям, отбросив члены порядка малости $o(c^{-5})$

$$\varphi_{3(1)} = \frac{a^3}{2} \left[\frac{1}{c^2} + 2 \frac{r_1}{c^3} P_1(\cos \vartheta_1) + 3 \frac{r_1^2}{c^4} P_2(\cos \vartheta_1) + 4 \frac{r_1^3}{c^5} P_3(\cos \vartheta_1) \right] \quad (2.15)$$

Определив нормальную составляющую скорости $(\partial \varphi_{3(1)} / \partial r_1)_{r_1=a}$, добавим к $\varphi_{3(1)}$ дополнительные члены

$$\varphi_{3(2)} = \frac{a^3 \cos \vartheta}{2} + \frac{1}{2} \frac{a^6}{c^3} \frac{P_1(\cos \vartheta_1)}{r_1^2} + \frac{a^8}{c^4} \frac{P_2(\cos \vartheta_1)}{r_1^3} + \frac{3}{2} \frac{a^{10}}{c^5} \frac{P_3(\cos \vartheta_1)}{r_1^4} \quad (2.16)$$

Можно показать, что добавление дополнительных членов не привело к изменению граничного условия (2.5) в пределах требуемой точности.

Аналогично выражению $\varphi_{3(2)}$, получается и имеет аналогичный вид выражение для $\varphi_{4(2)}$.

С помощью разложения выражений для $\varphi_{3(2)}$ и $\varphi_{4(2)}$ в ряд в окрестности сферы A получаем

$$(\varphi_3)_{r=a} = \frac{a \cos \vartheta}{2} + \frac{1}{2} \frac{a^6}{c^5} \quad (2.17)$$

$$(\varphi_4)_{r=a} = \frac{1}{2} \frac{a^3}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{c^3} P_1(\cos \vartheta) + \frac{5}{2} \frac{a^5}{c^4} P_2(\cos \vartheta) + \frac{7}{2} \frac{a^6}{c^5} P_3(\cos \vartheta) \quad (2.18)$$

Суммируя выражения (2.12), (2.13), (2.17) и (2.18) с учетом соответствующих коэффициентов, входящих в (2.3), и подставив значение $c = 2a$, находим потенциал скоростей жидкости в виртуальном движении

$$(\varphi)_{r=a, c=2a} = -\frac{49}{32} a\dot{a} - \frac{27}{64} a\dot{a} P_1(\cos \vartheta) - \frac{5}{24} a\dot{a} P_2(\cos \vartheta) - \frac{7}{64} a\dot{a} P_3(\cos \vartheta) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{9}{160} a \dot{a} P_1 (\cos \vartheta) + \frac{9}{64} (\dot{a} + \dot{z}) a + \frac{11}{16} (\dot{a} + \dot{z}) a P_1 (\cos \vartheta) + \\
 & + \frac{5}{32} (\dot{a} + \dot{z}) a P_2 (\cos \vartheta) + \frac{7}{64} (\dot{a} + \dot{z}) a P_3 (\cos \vartheta)
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставим выражение для потенциала скоростей (2.19) и значение $(\partial \varphi / \partial r)_{r=a}$, взятое из граничных условий (2.2), в формулу для кинетической энергии (1.5). При этом значение кинетической энергии жидкости над плоской поверхностью получим, интегрируя в (1.5) по поверхности сферы A

$$T = \frac{1}{48} \pi \rho a^2 [-147 a \dot{a}^2 + 27 a (\dot{a} + \dot{z}) \dot{a} - 22 a (\dot{a} + \dot{z})^2] \quad (2.20)$$

Из формулы (1.4) с учетом (2.20), равенства нулю в действительном движении \dot{z} и \dot{z} и тождества $F_z \equiv F_a$ следует выражение для силы, действующей со стороны жидкости на растущий на плоской поверхности паровой пузырь:

$$F_a = -\frac{17}{48} \pi \rho a^2 [3 \dot{a}^2 + a \ddot{a}] \quad (2.21)$$

3. Обсуждение результатов. Как показывает формула (1.14), для пузырьков, растущих в жидкостях малой вязкости (вода, спирт), при вычислении гидродинамической силы можно пренебречь влиянием вязкости, так как член, учитывающий влияние вязкости, на два порядка меньше остальных членов, входящих в уравнение (1.14). Поэтому при вычислении гидродинамической силы можно пользоваться формулами (1.2) и (2.21).

Формулы для вычисления гидродинамической силы можно записать в обобщенном виде следующим образом:

$$F_a = -b \pi \rho (d^2 h / dt^2), \quad h = \frac{1}{4} a^4 \quad (3.1)$$

где $b = \frac{2}{3}$ в случае роста на тонкой проволоке и $b = \frac{17}{48}$ в случае роста парового пузыря на плоской поверхности.

Из выражения (3.1) следует, что необходимым условием положительности гидродинамической силы является

$$d^2 h / dt^2 < 0 \quad (3.2)$$

(положительным считается направление от поверхности парообразования к жидкости). При выполнении этого условия гидродинамическая сила будет способствовать отрыву парового пузыря от поверхности парообразования.

Наиболее часто закон роста парового пузыря в кипящей жидкости представляют в виде степенной зависимости $a = k t^m$. Если использовать необходимое условие отрывающего действия гидродинамической силы (3.2) для вычисления предельного значения показателя степени m в уравнении роста парового пузыря, то получается, что при значении $m < \frac{1}{4}$ будет выполняться условие (3.2): гидродинамическая сила будет способствовать отрыву парового пузыря независимо от того, растет ли пузырь на проволоке или на плоской поверхности.

Поступила 4 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1970.
2. Субботин В. И., Казновский С. П., Коротаев С. К., Свириденко В. Е., Селиванов Ю. Ф. Исследование динамики паровых пузырьков при кипении воды на тонких проволоках в условиях естественной конвекции. Атомная энергия, 1970, т. 28, № 1.
3. Van Stralen S. J. D. The growth rate of vapour bubbles in superheated pure liquids and binary mixtures. Internat. J. Heat Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 10.
4. Григуль У. Фотоисследование процесса кипения в критической области. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, Минск, «Наука и техника», 1965.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
6. Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1967, № 6.
7. Биркгоф Ф. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
8. Березкин Е. Н. Лекции по теоретической механике, ч. 2. М., Изд. МГУ, 1968.
9. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.