

12. Lees L., Hromas L. Turbulent diffusion in the wake of a blunt-nosed body at hypersonic speeds. IAS, 1962, vol. 29, pp. 976—993. (Рус. перев.: Механика, 1963, № 6.)
13. Lykoudis. A review of hypersonic wake studies. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 2, pp. 557—590. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 2.)
14. Fox J., Rungaldier H. Anemometer measurements of velocity and density in projectile wakes. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 2, pp. 270—276.

УДК 532.525.011.55

К РАСЧЕТУ ГИПЕРЗВУКОВЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ С ВОЗБУЖДЕННЫМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Т. В. ПОГРЕБНАЯ, О. Ю. ПОЛЯНСКИЙ

(Москва)

Предложен метод расчета неравновесных невязких течений двухатомного газа с возбужденными колебательными степенями свободы в соплах гиперзвуковых аэродинамических установок.

Показано, что при заданных параметрах торможения и заданной геометрии сопла знание еще двух величин: замороженной энергии колебаний и приращения энтропии в процессе неравновесного расширения, позволяет свести расчет неравновесного течения в рабочей части гиперзвукового сопла к расчету течения совершенного газа с новыми («эффективными») параметрами торможения и новым значением критического сечения сопла, которые находятся из простых алгебраических соотношений.

Приведены формулы и графики, позволяющие просто и с достаточно высокой точностью рассчитать газодинамические параметры течения двухатомного газа, в частности азота.

1. Исследованию течений газа с колебательной релаксацией в соплах посвящено довольно большое количество работ, например [1—3]. Интерес к таким течениям вызван тем, что они позволяют с помощью наиболее простой модели исследовать ряд особенностей, присущих неравновесным течениям вообще. С другой стороны, такие течения представляют практический интерес, например, при применении азота в аэродинамических установках при условиях, когда можно учитывать только возбуждение колебательных степеней свободы.

В настоящее время общие закономерности неравновесных течений с колебательной релаксацией изучены достаточно полно. Общий характер развития течения следующий: в начале дозвуковой части сопла состояние газа будет практически равновесным; далее по мере расширения потока и связанного с ним падения температуры и давления происходит резкое уменьшение скорости колебательной релаксации и состояние газа начинает отклоняться от равновесного. Обычно этот процесс очень быстро заканчивается замораживанием колебательных степеней свободы.

На практике часто представляет интерес знание газодинамических параметров в гиперзвуковой области сопла, где колебания заморожены (эту область в дальнейшем будем обозначать областью $\{f\}$). В этом случае применимы асимптотические методы, позволяющие значительно упростить задачу. Ниже предлагается методика, основанная на эквивалентности течения замороженного реального газа и совершенного, удобная для практического применения.

2. Рассмотрим течение двухатомного газа с колебательной релаксацией в гиперзвуковом сопле. Если пренебречь вязкостью и теплопроводностью, то течение будет адиабатическим, но неизэнтропическим. (Рост энтропии обусловлен процессом неравновесной дезактивации колебательных степеней свободы.) Будем считать, что газ в форкамере находится в состоянии полного термодинамического равновесия при температуре T_0 и давлении p_0 . Весь анализ будем проводить в рамках одномерного приближения. Как обычно, предположим, что распределение молекул по колебательным уровням бoльцмановское. В этом случае газ можно рассматривать как совокупность двух подсистем: подсистемы активных степеней свободы, характери-

зующейся температурой T , и подсистемы колебательных степеней свободы с температурой T_k . При равновесии $T = T_k$. Удельные энтальпия h и энтропия S такой системы для модели молекул как гармонических осцилляторов определяются соотношениями

$$h = h_a + e_k, \quad S = S_a + S_k \quad (2.1)$$

$$h_a = c_p T, \quad e_k = R\Theta / [\exp(\Theta / T_k) - 1] \quad (2.2)$$

$$S_a = c_p \ln T - R \ln p + \text{const}, \quad S_k = e_k(T_k) / T_k - R \ln [1 - \exp(-\Theta / T_k)] \quad (2.3)$$

Здесь индекс a относится к активным степеням свободы, индекс k — к колебательным, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении газа с замороженными колебательными степенями свободы, e_k — энергия колебаний, R — газовая постоянная, Θ — характеристическая температура колебаний. Существенно, что в рассматриваемом случае энтропия, так же как и энтальпия, равна сумме энтропий подсистемы активных степеней свободы и колебательной подсистемы. В процессе неравновесного расширения газа в сопле происходит обмен энергией и энтропией между активными и колебательными степенями свободы, сопровождающийся дополнительным возрастанием энтропии из-за неравновесности на величину ΔS , причем

$$h_a = h_0 - e_k - u^2 / 2, \quad S_a = S - S_k = S_0 - S_k + \Delta S \quad (2.4)$$

$$\Delta S = \int_{e_{k0}}^{e_k} \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T} \right) de_k \quad (2.5)$$

где u — скорость газа; индексом 0 отмечены параметры торможения газа в форкамере.

Определим все газодинамические параметры течения в области $\{f\}$, где колебательные степени свободы заморожены.

После замораживания колебаний при расширении газа в сопле принимают участие только активные степени свободы, и, следовательно, газ будет вести себя как совершенный с энтальпией торможения h_{0c} и энтропией S_c , которые соответственно равны

$$h_{0c} = h_0 - e_{kf}, \quad S_c = S_0 - S_{kf} + \Delta S(e_{kf}) \quad (2.6)$$

(индекс f означает замороженное состояние).

Параметры течения такого совершенного газа будем обозначать индексом c .

Найдем T_{0c} , p_{0c} и ρ_{0c} — температуру, давление и плотность торможения этого совершенного газа из условия (2.6).

Учитывая (2.2) — (2.6) и уравнение состояния $p = \rho RT$, получаем

$$T_{0c} = h_{0c} / c_p = T_0 + (e_{k0} - e_{kf}) / c_p \quad (2.7)$$

$$\frac{p_{0c}}{p_0} = \left(\frac{T_{0c}}{T_0} \right)^{\kappa / (\kappa - 1)} \exp \left(- \frac{S_{k0} - S_{kf} + \Delta S}{R} \right)$$

$$\frac{\rho_{0c}}{\rho_0} = \left(\frac{T_{0c}}{T_0} \right)^{1 / (\kappa - 1)} \exp \left(- \frac{S_{k0} - S_{kf} + \Delta S}{R} \right)$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$\frac{T_{0c}}{T_0} \equiv T' = 1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi \{ (\exp \xi - 1)^{-1} - (\exp \eta - 1)^{-1} \} = f_T(\kappa, \xi, \eta) \quad (2.8)$$

$$\frac{p_{0c}}{p_0} = p' \exp \left(- \frac{\Delta S}{R} \right), \quad \frac{\rho_{0c}}{\rho_0} = \rho' \exp \left(- \frac{\Delta S}{R} \right)$$

$$p' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{p_{0c}}{p_0} = T'^{\kappa / (\kappa - 1)} \frac{1 - \exp(-\xi)}{1 - \exp(-\eta)} \exp \left(\frac{\eta}{\exp \eta - 1} - \frac{\xi}{\exp \xi - 1} \right)$$

$$\xi = \Theta / T_0, \quad \eta = \Theta / T_{kf} \quad (2.9)$$

Аналогичные соотношения получаются для $\rho' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\rho_{0c} / \rho_0)$.

Теперь температуру, давление, плотность и скорость в области $\{f\}$ в исходном

неравновесном потоке можно определить по известным формулам для совершенного газа с $\kappa = 7/5$.

$$\frac{T}{T_{0c}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-1}, \quad \frac{p}{p_{0c}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\kappa/(\kappa - 1)} \quad (2.10)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{0c}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\kappa - 1)}, \quad \frac{u}{u_{c \max}} = \left(1 + \frac{2}{(\kappa - 1) M^2}\right)^{-1/2}$$

$$(u_{c \max} = \sqrt{2(h_0 - e_{hf})} = \sqrt{2c_p T_{0c}})$$

Здесь M — число Маха, вычисленное по замороженной скорости звука $a = \sqrt{\kappa RT}$. Обычно наряду с зависимостью газодинамических параметров T , p и т. д. от числа Маха M необходимо знать, в каком сечении сопла F реализуется данное число M .

Для совершенного газа зависимость $F = f(M)$ устанавливается соотношением [6]

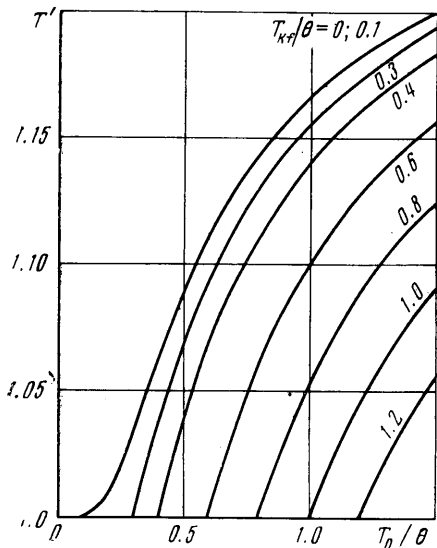
$$\frac{F}{F_{*c}} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^k \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^k \quad \left(k = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}\right) \quad (2.11)$$

где F_{*c} — площадь критического сечения сопла.

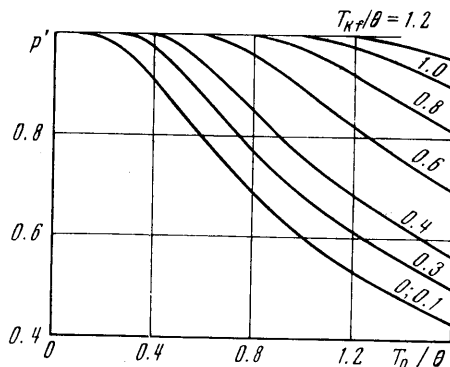
Здесь величина F_{*c} заранее неизвестна и должна определяться из условия равенства расхода Q_c в потоке совершенного газа с параметрами торможения T_{0c} и p_{0c} и расхода Q при неравновесном течении исходного газа в заданном сопле $F(x)$. Отсюда

$$F_{*c} = \frac{Q}{\rho_{*c} u_{*c}} = \frac{Q}{\rho_{0c} \sqrt{\kappa RT_{0c}}} \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^k \quad (2.12)$$

При определенной таким образом ве-



Фиг. 1



Фиг. 2

личине критического сечения формула (2.11) устанавливает связь между F и M для исходного неравновесного газа в области $\{f\}$, где колебания заморожены.

На практике довольно часто реализуются условия, когда в дозвуковой части сопла поток будет практически равновесным (индекс p). В этом случае $Q = Q_p = F_{*p} \rho_{*p} u_{*p}$ (звездочка относится, как обычно, к критическому сечению сопла). Учтем, что в равновесном потоке в критическом сечении скорость u_{*p} равна равновесной скорости звука a_{*p} и что в газе с возбужденными колебательными степенями свободы a_p определяется соотношением

$$a_p = \sqrt{\kappa_p RT} \quad \left(\kappa_p = \frac{c_p + c_{vh}}{c_v + c_{vh}}, \quad c_{vh} = \frac{de_h}{dT_h}\right)$$

Тогда из уравнения Бернулли имеем

$$2[h(T_0) - h(T_{*p})] = \kappa_p(T_{*p})RT_{*p} \quad (2.13)$$

Это уравнение используется для определения температуры T_{*p} в равновесном потоке, через которую выражаются u_{*p} и ρ_{*p} .

Так, из условия изэнтропичности равновесного течения следует:

$$\frac{\rho_{*p}}{\rho_0} = \left(\frac{T_{*p}}{T_0} \right)^{1/(\kappa-1)} \exp \left[\frac{S_k(T_{*p}) - S_k(T_0)}{R} \right]$$

Используя полученные результаты и приравнявая выражения Q_c и Q_p , получаем

$$F_{*c} / F_* = F' \exp(\Delta S / R) \quad (2.14)$$

$$F' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{F_{*c}}{F_*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\kappa} \left(\frac{\kappa_p(T_{*p})}{\kappa} \right)^{1/2} \left(\frac{T_{*p}}{T_{0c}} \right)^{\kappa} \exp \left[\frac{S_k(T_{*p}) - S_k(T_{kf})}{R} \right]$$

где T_{*p} определяется из уравнения (2.13).

Соотношения (2.7)–(2.9), (2.12)–(2.14) решают поставленную задачу. Графики функции T' , p' и F' приведены на фиг. 1–3. Эти графики универсальные и могут быть использованы для расчета неравновесных течений различных двухатомных газов.

Для реальных условий, как правило, $\Delta S / R \ll 1$ (порядка нескольких сотых). Поэтому при приближенных расчетах можно пользоваться предположением, что $\Delta S = 0$. Легко убедиться, что при этом относительная погрешность, например, в вычислении давления будет равна величине $\exp(\Delta S / R) - 1 \approx \Delta S / R$. В частности, это будет погрешностью широко распространенного метода мгновенного замораживания, который адекватен условию $\Delta S = 0$. Заметим, что в некоторых приближенных методах (см., например, [3]) наряду с предположением о мгновенном замораживании часто применяются различные приближенные способы определения замороженной энергии e_{kf} . При этом суммарная погрешность в вычислении газодинамических параметров может быть значительно более высокой.

3. Для практического применения полученных результатов надо знать величину замороженной энергии e_{kf} (или T_{kf}), приращение энтропии ΔS и расход Q . Обычно при достаточно высоких давлениях торможения течение в дозвуковой части сопла близко к равновесному и, следовательно, $Q = Q_p$.

Ниже будут приведены формулы для вычисления T_{kf} и ΔS в потоке азота, полученные при обработке данных точных численных расчетов на ЭВМ, проведенных Г. Н. Саяниным. Расчеты проводились для осесимметричного сопла, форма сверхзвуковой части которого задавалась уравнением

$$F(x)F_* = 1 + (x/l)^2, \quad l = r/\operatorname{tg} \varphi$$

где r — радиус критического сечения, φ — угол полураствора асимптотического конуса. Температура T_0 и параметр подобия $p_0 l$ в расчетах изменялись в диапазоне $2000 \leq T_0 \leq 4000^\circ \text{K}$, $3 < p_0 l < 5 \cdot 10^3 \text{ атм} \cdot \text{см}$ (3.1)

Время релаксации задавалось следующей формулой, полученной для условий расширения азота в сопле [7]:

$$\tau_p = 3 \cdot 10^{-12} \exp(181 T^{-1/2}) \text{ атм} \cdot \text{сек}, \quad (3.2)$$

где T в $^\circ \text{K}$.

Время релаксации $\tau(p, T)$, вычисленное по этой формуле, отличается примерно в 70 раз от $\tau(p, T)$ в условиях за сильной ударной волной.

В диапазоне (3.1) результаты расчета T_{kf} аппроксимируются с точностью не ниже 1% следующей зависимостью:

$$T_{kf} / T_0 = 0.982 - 0.206 \lg K + 0.014 \lg^2 K - 0.004(0.001 T_0 - 3)(\lg K + 2) \quad (3.3)$$

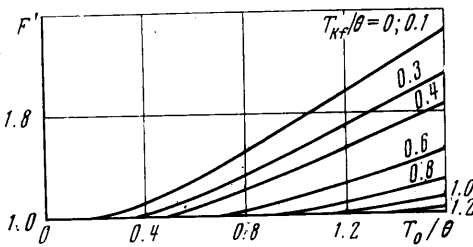
$$K = \frac{r/\operatorname{tg} \varphi}{2\tau(p_0, T_0) \sqrt{2RT_0}} \quad (3.4)$$

Здесь τ находится из (3.2).

При аппроксимации $\Delta S / R$ можно воспользоваться тем фактом, что приращение энтропии ΔS при $\Delta S / R \ll 1$ вообще оказывает малое влияние на газодинамические параметры. Поэтому для практических целей $\Delta S / R$ достаточно знать с относительно небольшой точностью (например, с точностью 10%). В диапазоне (3.1) этим условиям удовлетворяет формула

$$\Delta S / R = 3.3 \cdot 10^{-8} T_0 [2.1 - 0.2(\lg p_0 l - 1.6)^2] \quad (3.5)$$

где T_0 в $^\circ \text{K}$, $p_0 l$ в $\text{атм} \cdot \text{см}$.



Фиг. 3

В заключение заметим, что предложенной методикой можно пользоваться для расчета течения азота в гиперзвуковой части сопла, например, при $M > 5$. (Расчеты показывают, что во всем диапазоне (3.1) при $M > 5$ поток практически заморожен, $d \ln T_k / dM < 10^{-3}$)

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Stollary J. L., Smith J. E. A note on the variation of vibrational temperature along a nozzle. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 2.
2. Stollary J. L., Park C. Computer solutions to the problem of vibrational relaxation in hypersonic nozzle flows. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, No. 1.
3. Phinney R. Nondimensional solutions of flow with vibrational relaxation. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 2.
4. Blythe P. A. Asimptotic solutions in nonequilibrium nozzle flow. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, No. 2.
5. Чирихин А. В. Метод расчета температуры замораживания течения азота в гиперзвуковом сопле. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, № 6.
6. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
7. Sebacher D. I. A correlation on N_2 vibrational \rightarrow translational relaxation times. AIAA Journal, 1967, No. 4.

УДК 532.529.6

СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ НА РАСТУЩИЙ В НЕЙ ПАРОВОЙ ПУЗЫРЬ

С. П. КАЗНОВСКИЙ, Ю. Ф. СЕЛИВАНОВ, В. И. СУББОТИН

(Москва)

С помощью основных уравнений гидромеханики, а также уравнений Лагранжа второго рода получены выражения для определения силы, действующей со стороны жидкости на растущий в ней паровой пузырь. Исследуются случаи роста пузыря на тонкой проволочке и плоской поверхности в идеальной жидкости и жидкости малой вязкости. Показано, что знак гидродинамической силы зависит от конкретного вида закона роста парового пузыря.

Эксперименты, проведенные при кипении жидкостей, показали, что общепринятое представление об отрыве паровых пузырей от поверхности парообразования нуждается в известном уточнении. Считалось [1], что единственной силой, обуславливающей эвакуацию пара от поверхности парообразования, является архимедова подъемная сила. Однако при кипении жидкостей на тонких проволоках можно было наблюдать, как при некоторых режимах кипения образующиеся паровые пузырьки двигались против действия подъемной силы [2-4]. Удалось установить [2], что на растущий паровой пузырь в течение небольшого промежутка времени, включающего в себя момент отрыва, действует сила, по величине превышающая гравитационную подъемную силу.

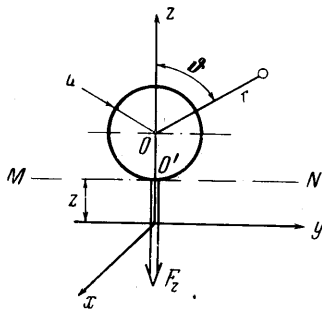
Силу, действующую на растущий в жидкости паровой пузырек, можно представить в виде

$$F = F_g + \sum_i F_i,$$

где F_g — гравитационная подъемная сила, а через $\sum_i F_i$ обозначена совокупность всевозможных остальных сил.

После отрыва пузырька гравитационная подъемная сила по своей величине и долгодействию значительно превышает силы, входящие в $\sum_i F_i$, и определяет в значительной мере движение пузырька в жидкости.

Подробная расшифровка сил, входящих в выражение $\sum_i F_i$, представляется трудной задачей ввиду многообразия факторов, определяющих рост и движение парового пузырька, однако уже априори можно сказать, что по величине и по продолжительности действия эти силы значительно отличаются друг от друга.



Фиг. 1