

В заключение автор благодарит В. Я. Шкадова за полезные советы во время обсуждения.

Поступила 13 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и ч Дж. У. Классическая механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
3. Т о м А., Э й п л т К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М., «Энергия», 1964.
4. Ш у л е й к и н В. В. Физика моря, т. 2. М., ОНТИ, 1938.

УДК 532.517

ТУРБУЛЕНТНОЕ СМЕШЕНИЕ ПОТОКОВ ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Г. П. ШИНКИН

(Москва)

Рассматривается турбулентное смешение однородных потоков газа при наличии продольного градиента давления. Уравнения турбулентного пограничного слоя в предположении пути смешения Прандтля сводятся к «ламинарному» виду. Вводятся переменные подобия, в которых соображения локального подобия, сформулированные в [1], распространяются на рассматриваемый случай. Рассчитанная зависимость скорости на разделяющей линии тока от числа Маха на верхней границе зоны смешения M_e для изэнергетического смешения с покоящимся газом сравнивается с решениями Корста [2], Абрамовича [3] и аппроксимацией Нэша [4].

1. Рассмотрим турбулентное смешение двух однородных потоков газа при наличии градиента давления. В обычных предположениях пограничного слоя и пренебрежении молекулярными эффектами уравнения количества движения, неразрывности и энергии для турбулентной зоны смешения имеют вид [5]

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v_* \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho u r_0^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_* r_0^k)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v_* \frac{\partial i}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial q_T}{\partial y} + \tau_T \frac{\partial u}{\partial y}$$

Здесь x, y — расстояния вдоль разделяющей линии тока и по нормали к ней, r_0 — расстояние от оси симметрии до разделяющей линии тока, k принимает значения 0 и 1 для плоского и осесимметричного случаев соответственно

$$\tau_T = -\rho \langle u'v' \rangle, \quad q_T = -\rho \langle i'v' \rangle, \quad v_* = v(1 + \langle v'v' \rangle / \rho v)$$

а u, v, ρ, p, i — осредненные по достаточно большому промежутку времени составляющие скорости по осям x и y , плотность, давление и энтальпия (угловые скобки также означают осреднение по времени).

Уравнение состояния для осредненных величин можно приближенно представить в виде [5]

$$p / \rho i = (\gamma - 1) / \gamma$$

где γ — отношение теплоемкостей (считаем $\gamma = \text{const}$, в расчетах полагалось $\gamma = 1.4$).

Граничные и начальные условия зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_e(x), \quad i \rightarrow i_e(x) && \text{при } y \rightarrow \infty \\ v_* &= 0 && \text{при } y = 0 \\ u &\rightarrow u_{-e}(x), \quad i \rightarrow i_{-e}(x) && \text{при } y \rightarrow -\infty \\ u &= f_1(y), \quad v_* = f_2(y), \quad i = f_3(y) && \text{при } x = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индексы e и $-e$ соответствуют параметрам на верхней и нижней границах зоны смешения, f_1, f_2, f_3 — заданные функции.

2. Для записи турбулентных трения и потока тепла используем обобщенную гипотезу пути смешения Прандтля

$$\begin{aligned} \tau_T &= \rho l_u l_v \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} = A_\tau \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_T &= \rho l_i l_v \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial i}{\partial y} = A_q \frac{\partial i}{\partial y} \end{aligned}$$

Турбулентное число Прандтля

$$Pr_T = A_\tau / A_q = l_u / l_i$$

В случае свободной турбулентности эти формулы значительно упрощаются (новая формула Прандтля [5])

$$\begin{aligned} \tau_T &= \kappa \rho b(x) [u_e(x) - u_{-e}(x)] \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_T &= \kappa \frac{\rho b(x)}{Pr_T} [u_e(x) - u_{-e}(x)] \frac{\partial i}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь κ — безразмерная величина, определяемая опытным путем, $b(x)$ — некоторая эффективная ширина зоны смешения, Pr_T — тоже величина, определяемая опытным путем, будем считать, что число Pr_T не зависит от координат, но может зависеть, например, от i .

Далее, подставляя соотношения (2.1) в систему (1.1) и вводя новую переменную

$$x_1 = \int_0^x \kappa b(x) [u_e(x) - u_{-e}(x)] dx$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \rho v_{*1} \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{dp}{dx_1} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial (\rho u r_0^k)}{\partial x_1} + \frac{\partial (\rho v_{*1} r_0^k)}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial i}{\partial x_1} + \rho v_{*1} \frac{\partial i}{\partial y} &= u \frac{dp}{dx_1} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{Pr_T} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ (v_{*1} &= v_* / [\kappa b(u_e - u_{-e})]) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Граничные и начальные условия (1.2) не изменяются. В новых переменных (x_1, y) система уравнений (2.2) очень похожа на соответствующую систему в ламинарном случае, только вместо вязкости и числа Прандтля фигурируют ρ и Pr_T .

Для исследования вопроса существования автоматического решения введем переменные

$$\xi = \int_0^{x_1} \rho_e^2 u_e r_0^{2k} dx_1, \quad \eta = u_e r_0^k \int_0^y \rho dy$$

Далее запишем систему (2.2) в переменных Мизеса (ξ, ψ) , так что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = u_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -v_1$$

$$\left(u_1 = u/u_e, v_1 = \left(u \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\rho v_{*1}}{\rho_e^2 r_0^k} \right) / u_e \right)$$

и, предположив, что решение зависит от одной переменной $\zeta = \psi / \sqrt{\xi}$, получим

$$-\frac{\zeta}{2} u_1 \frac{du_1}{d\zeta} = \frac{du_e}{d\xi} \frac{\xi}{u_e} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - u_1^2 \right] + u_1 \frac{d}{d\zeta} \left(u_1 i_1^{-2} \frac{du_1}{d\zeta} \right)$$

$$-\frac{\zeta}{2} \frac{di_1}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{u_1 i_1^{-2} \frac{di_1}{d\zeta}}{\text{Pr}} \right) + M_e^2 (\gamma - 1) u_1 i_1^{-2} \left(\frac{du_1}{d\zeta} \right)^2 \quad (2.3)$$

$(i_1 = i / i_e)$

С граничными условиями

$$u_1 \rightarrow 1, \quad i_1 \rightarrow 1 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty$$

$$u_1 \rightarrow u_{-e} / u_e, \quad i_1 \rightarrow i_{-e} / i_e \quad \text{при } \zeta \rightarrow -\infty \quad (2.4)$$

В общем случае при наличии градиента давления условия автомодельности (они такие же, как в ламинарном случае [1]) не выполняются.

Возникает вопрос о возможности использования локального подобия в рассматриваемом случае. В этой связи отметим, что уравнения (2.3) отличаются от соответствующих уравнений в ламинарном случае [1] только тем, что здесь энтальпия в члены, описывающие трение, поток тепла и диссипацию энергии, входит как i_1^{-2} , а в ламинарном — как i_1^{-n} , где n — показатель степени в законе вязкости: $\rho \mu = c p i^{-n}$ ($n \sim 0.3$).

Таким образом, результаты работы [1] о незначительном влиянии члена $(du_e/d\xi)(\xi/u_e) \cdot (\rho_e/\rho - u_1^2)$ можно, вероятно, распространить и на турбулентный случай, но надо отметить, что здесь условия выполнения локального подобия для скорости менее благоприятны, так как профиль u_1 более существенно зависит от профиля энтальпии i_1 , а значит, и от числа Маха $M_e = M_e(x)$.

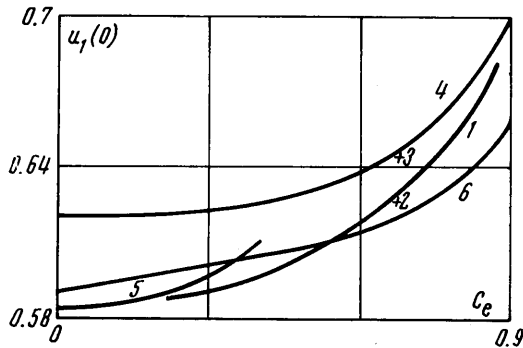
Несмотря на это, все же можно ожидать, что для практики локальное подобие при

не слишком больших градиентах давления даст приемлемую точность, т. е. профили $u_1(\zeta)$ и $i_1(\zeta)$ будут достаточно хорошо описываться автомодельными профилями при одинаковых граничных условиях (2.4) и числах Маха M_e в задачах с градиентом давления и без него.

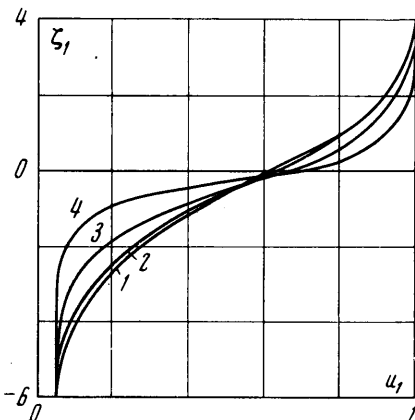
3. Из системы (2.3) видно, что в турбулентном случае, как уже отмечалось выше, параметры M_e и i_{-e}/i_e должны оказывать более существенное влияние на автомодельный профиль скорости, чем в ламинарном. Зависимость скорости на разделяющей линии тока от этих параметров можно рассчитать, не привлекая никаких эмпирических данных. На фиг. 1 (кривая 1) показана зависимость скорости на разделяющей линии тока $u_1(0)$ от числа Кроекко

$$c_e = \left[1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M_e^2} \right]^{-1/2}$$

при $p = \text{const}, \quad u_{-e} = 0, \quad i_{e0} = i_{-e0}$



Фиг. 1



Фиг. 2

где i_{e0} , i_{-e0} — энтальпии торможения верхнего и нижнего потоков. В расчете принималось $\text{Pr}_T = 0.7$, для $M_e = 2$ скорость $u_1(0)$ считалась также при $\text{Pr}_T = 0.5$ и I (точки 2 и 3). Рассчитанная зависимость сравнивается с известными решениями Корста [2], Абрамовича [3] и аппроксимацией Нэша [4] (кривые 4, 5, 6)

$$u_1^2(0) = 0.348 + 0.018M_e$$

В решении Корста $u_1(0) = 0.62$ при $M_e = 0$, что не совпадает с полученным Толмином [6] значением $u_1(0) = 0.584$, поэтому Нэш и предложил аппроксимацию (3.1), которая при $M_e = 0$ дает $u_1(0) = 0.59$. В полученном численном решении $u_1(0) = 0.588$ при $M_e = 0.5$, что согласуется с толминовским значением. Приведенные результаты показывают, что система уравнений (2.3) достаточно хорошо описывает безградиентную турбулентную зону смешения. На фиг. 2 представлены автомодельные профили $u_1(\zeta_1)$ для чисел Маха $M_e = 0.5, 1, 2, 4$ (кривые 1, 2, 3, 4) при $u_{-e}/u_e = 0.05$, $i_{e0} = i_{-e0}$ и $\text{Pr}_T = 0.7$. Отметим, что соответствующим образом смещая профиль Гертлера для несжимаемой жидкости (например, совмещая значения скоростей на разделяющей линии тока)

$$u_1(\zeta_1) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u_{-e}}{u_e} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta_1} \exp \left(-\frac{\zeta_1^2}{4} \right) d\zeta_1 \right)$$

можно получить удовлетворительное описание полученных автомодельных профилей скорости. Переменная ζ_1 связана с ранее введенной переменной ζ соотношением $d\zeta = u_1(\zeta_1) d\zeta_1$.

Автор благодарит И. Н. Мурзинова за советы и замечания.

Поступила 15 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П. Ламинарное смешение потоков газа при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
2. Korst H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Applied Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
3. Абрамович Г. Н. К теории свободной струи сжимаемого газа. Тр. ЦАГИ, 1939, № 377.
4. Nash I. An analysis of two-dimensional turbulent flow, including the effect of the approaching boundary layer. ARC R and M. 1963, No. 3344.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
6. Tollmien W. Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. ZAMM, 1926, Bd 6, Nr 6, S. 468.

УДК 532.526.011.55

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ СЛЕДЕ ЗА ТЕЛАМИ ВРАЩЕНИЯ

Л. П. ГУРЬЯШКИН, В. П. ПОДОВИН, И. М. СУРИКОВА

(Москва)

Приводится краткое описание методики измерения скорости на оси турбулентного следа и профиля скоростей поперек следа на расстоянии от $10 \div 2000$ калибров. Испытания были проведены методом отстрела моделей в спокойном воздухе при атмосферном давлении и комнатной температуре. Измерения проводились в следе за шаром и диском, торец которого поставлен перпендикулярно направлению потока. Скорость отстрела была порядка 1800 м/сек. Диаметр шара 8 и 12 мм, диаметр диска 5 мм. Получено эмпирическое выражение, устанавливающее связь между коэффициентом сопротивления тела и скоростью на оси следа, общее для шара и дис-