

**К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ГИБКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Б. И. МУКОЕЕВ

(Москва)

В работе рассматривается задача о возможности движения колеблющейся гибкой поверхности. Поверхность имеет конечный размер. Прямолинейное движение данной гибкой пластины описывается уравнением Ньютона [1], а для определения напряжений, которые возникают на контуре пластины, используются уравнения Навье — Стокса [2].

Расчет показал, что колебание конечной гибкой поверхности приводит к ее движению в продольном направлении. Сравнение расчетов с экспериментальными данными дает качественное совпадение.

1. Постановка задачи. Пусть в вязкую несжимаемую жидкость помещена гибкая пластина длиной l . В начальный момент времени t_0 система жидкость — пластина находится в покое. Начало неподвижной прямоугольной системы координат XU помещено в переднюю точку пластины. Ось X направлена вдоль пластины. В момент времени t пластина начинает совершать вынужденные колебания по следующему закону:

$$g = f(x, t) \sin(ax - \beta t) \tag{1.1}$$

Движение данной пластины подчиняется закону Ньютона [1]

$$m\dot{U}_p = F = \int_0^l [\sigma^x g_x + \tau^{xy}]|_{y=g} dx, \quad U_p(0) = 0 \tag{1.2}$$

где m — масса пластины, U_p — скорость перемещения пластины, F — сила.

Неизвестные величины напряжений σ^x и τ^{xy} будем определять из системы уравнений Навье — Стокса и неразрывности [2]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y &= -\rho^{-1}p_x + \nu\Delta u \\ v_t + uv_x + vv_y &= -\rho^{-1}p_y + \nu\Delta v \\ u_x + v_y &= 0 \quad (\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

со следующими условиями:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0, \quad p = \text{const} \quad (t = 0) \\ u = -U_p + u^*, \quad v_\tau = 0, \quad v = g_t + ug_x \quad (0 \leq x \leq l, y = g) \\ u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \text{const} \quad (x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси x, y соответственно, x, y — координаты, t — время, ρ — массовая плотность жидкости, p — давление, v_τ — касательная составляющая скорости к поверхности, u^* — продольная скорость, обусловленная колебанием поверхности, ν — коэффициент кинематической вязкости. Индексы внизу обозначают частные производные по этим переменным.

Прежде чем переходить к решению задачи, несколько преобразуем уравнения (1.3) и условия (1.4). Для этого первое уравнение системы (1.3) продифференцируем по x , а второе — по y и после сложения получим уравнение для давления p .

Решение будем искать в неподвижной системе координат. Для этого введем новые переменные и функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} t = \lambda c^{-1}\theta, \quad x = \lambda \left(\xi - \int U_p d\theta \right), \quad v = cv' \\ y = \lambda[\eta + g(\xi, \theta)], \quad u = c(u' - U_p), \quad p = \rho c^2 p' \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в систему (1.3) и условия (1.4), получим уравнения, начальные и граничные условия (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned} u_\theta + uu_\xi + V u_\eta + p_\xi - g_\xi p_\eta = \dot{U}_p + \varepsilon L_\Delta(u) \\ v_\theta + uv_\xi + V v_\eta + p_\eta = \varepsilon L_\Delta(v) \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$L_\Delta(p) = 2(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi) \left(V = v - g_\theta - ug_\xi, L_\Delta = \Delta + g_\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - g_{\xi\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - 2g_\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right)$$

$$\begin{aligned}
 u &= 0, \quad v = 0, \quad p = \text{const} \quad (t = 0) \\
 u &\rightarrow U_p, \quad v \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \text{const} \quad (\xi \rightarrow \pm\infty, \eta \rightarrow \pm\infty) \\
 u &= v g \xi, \quad v = g_0(1 + g \xi^2)^{-1}, \quad p_\eta = \varepsilon L_\Delta(v) - v_0 - uv_\xi \quad (0 \leq \xi \leq l, \eta = 0)
 \end{aligned}$$

Здесь c — скорость распространения волны, λ — длина волны $\varepsilon = v(c\lambda)^{-1}$.

2. Алгоритм задачи. Для решения задачи был использован численный метод, изложенный в работе [3]. Решение искалось в области $-L \leq x \leq L$, $-b \leq y \leq b$. В связи с тем что область конечна, а граничные условия заданы на бесконечности, они были переформулированы

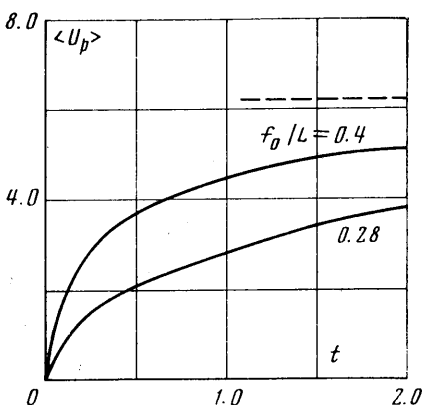
$$\begin{aligned}
 p_y &= 0, \quad p_x = (\dot{U}_p - u_t) - uu_x + \varepsilon u_{xx}, \quad v_x = 0 \\
 v_y &= 0, \quad u = U_p \quad (x = \pm L, y = \pm b)
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система уравнений (1.5) была заменена неявными разностными уравнениями [3]. В уравнении (1.2), заменяя напряжения согласно закону Стокса [2] скоростями деформаций, получим следующее выражение в конечных разностях:

$$\begin{aligned}
 U_p^k &= U_p^{k-1} + \tau \gamma_* \lambda^3 G^{-1} \left\{ \varepsilon [v(\theta, l, 0) - v(\theta, 0, 0)] + \sum_{i=0}^n B_i - 0.5(B_0 + B_n) \right\} \\
 (B_i &= 0.5\varepsilon \{ 4(u_{ij+1}^k - u_{ij-1}^k) - 6u_{ij}^k - u_{ij+2}^k - u_{ij-2}^k + 3g_\xi [6v_{ij}^k - 4(v_{ij+1}^k + v_{ij-1}^k) + \\
 &\quad + v_{ij+2}^k + v_{ij-2}^k] - g_\xi h (p_{ij}^{(+)} - p_{ij}^{(-)}) \}
 \end{aligned}$$

где G — вес пластины, γ_* — объемный вес жидкости.

Для ускорения итерационного процесса были применены две разностные схемы. Девятиточечная разностная схема применялась для крайних точек, а двадцатиточечная — для внутренних точек.



Сетка по пространству бралась квадратной и шаг h выбирался в зависимости от параметра $\alpha = 2\pi\lambda^{-1}$. Область интегрирования в этом случае зависела от длины волны, но количество точек всегда было постоянным и равнялось 4096 (64×64) на одно уравнение. Шаг по времени τ выбирался в зависимости от числа Рейнольдса и периода колебания $T = 2\pi\beta^{-1}$. Последовательность получения решения была следующей. Вначале решалась система уравнений с укрупненной сеткой h , а затем делался переход на более мелкую сетку $h_i = 0.25h$. После этого вычислялась скорость U_p по формуле (2.1), и процесс повторялся до определенной погрешности для U_p . Затем делался переход к следующему шагу по времени. Необходимо отметить, что замена граничных условий

(1.4) на условия (2.0) дала удовлетворительные результаты. Значения v и p на границах не превышали 0.001% максимального значения в области.

3. Результаты расчета. В качестве примера было рассмотрено колебание пластины по закону

$$g = f_0 \exp(ax - a_0 t^{-1/2}) \sin(ax - \beta t)$$

где f_0 — амплитуда колебания, a, a_0 — коэффициенты, которые подбираются в зависимости от эксперимента. Это уравнение является приближенной моделью движения некоторых видов рыб. Параметры в этом примере соответствовали движению угря [4]. Число Рейнольдса было равно 4000, скорость распространения волны $c = 8$ см/сек, длина волны λ равнялась половине длины тела. Результаты расчета осредненной скорости $\langle U_p \rangle$ в виде сплошных линий приведены на фигуре для двух различных амплитуд колебания. Здесь время в секундах. На этом же графике приведена пунктирной прямой предельная скорость движения угря, замеренная в эксперименте. Расхождение расчетной скорости с действительной скоростью угря составляет порядка 20%.

В заключение автор благодарит В. Я. Шкадова за полезные советы во время обсуждения.

Поступила 13 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и ч Дж. У. Классическая механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
3. Т о м А., Э й п л т К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М., «Энергия», 1964.
4. Ш у л е й к и н В. В. Физика моря, т. 2. М., ОНТИ, 1938.

УДК 532.517

ТУРБУЛЕНТНОЕ СМЕШЕНИЕ ПОТОКОВ ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Г. П. ШИНКИН

(Москва)

Рассматривается турбулентное смешение однородных потоков газа при наличии продольного градиента давления. Уравнения турбулентного пограничного слоя в предположении пути смешения Прандтля сводятся к «ламинарному» виду. Вводятся переменные подобия, в которых соображения локального подобия, сформулированные в [1], распространяются на рассматриваемый случай. Рассчитанная зависимость скорости на разделяющей линии тока от числа Маха на верхней границе зоны смешения M_e для изэнтергического смешения с покоящимся газом сравнивается с решениями Корста [2], Абрамовича [3] и аппроксимацией Нэша [4].

1. Рассмотрим турбулентное смешение двух однородных потоков газа при наличии градиента давления. В обычных предположениях пограничного слоя и пренебрежении молекулярными эффектами уравнения количества движения, неразрывности и энергии для турбулентной зоны смешения имеют вид [5]

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v_* \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho u r_0^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_* r_0^k)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v_* \frac{\partial i}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial q_T}{\partial y} + \tau_T \frac{\partial u}{\partial y}$$

Здесь x, y — расстояния вдоль разделяющей линии тока и по нормали к ней, r_0 — расстояние от оси симметрии до разделяющей линии тока, k принимает значения 0 и 1 для плоского и осесимметричного случаев соответственно

$$\tau_T = -\rho \langle u'v' \rangle, \quad q_T = -\rho \langle i'v' \rangle, \quad v_* = v(1 + \langle v'v' \rangle / \rho v)$$

а u, v, ρ, p, i — осредненные по достаточно большому промежутку времени составляющие скорости по осям x и y , плотность, давление и энтальпия (угловые скобки также означают осреднение по времени).

Уравнение состояния для осредненных величин можно приближенно представить в виде [5]

$$p / \rho i = (\gamma - 1) / \gamma$$

где γ — отношение теплоемкостей (считаем $\gamma = \text{const}$, в расчетах полагалось $\gamma = 1.4$).