

УДК 538.4

О ТЕЧЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Получено общее решение, описывающее течение проводящей жидкости в произвольной области, которая ограничена непроводящими стенками, в случае, когда можно пренебречь силами инерции и вязкости по сравнению с магнитной силой, а также индуцированным магнитным полем.

Ниже будут рассмотрены стационарные течения несжимаемой жидкости в случае, когда магнитные силы и градиент давления превышают в основной части потока по порядку величины силы инерции и вязкие напряжения. Исследованию таких течений посвящено много работ (см. [1], а также последние работы [2-4]). В работе [5] было дано общее решение уравнений, описывающее произвольное течение, для которого можно пренебречь силами инерции, вязкими силами и искажением магнитного поля движущейся жидкостью. Это общее решение содержит произвольные функции от двух переменных, которые должны определяться с помощью граничных условий на границах области с учетом пограничных слоев.

В работе [5] были также получены граничные условия для участков границы с проводимостью, равной нулю, и для участков границы с проводимостью, равной бесконечности (для электродов). Использование этих граничных условий приводит к системе уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными.

В данной работе для области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими непроводящие участки границы, получена система уравнений, которая отбрасыванием членов, имеющих порядок $1/M$ (M — число Гартмана), сводится к одному уравнению первого порядка. Получено решение этого уравнения в явном виде. Отброшенные члены содержат старшие производные и могут приводить к образованию пограничных слоев там, где решение уравнения первого порядка терпит разрыв.

Можно показать, что в области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими электрод и непроводящий участок границы или два электрода с одинаковым значением потенциала, скорость составляет $1/M$ скорости в области между двумя непроводящими стенками.

Будем считать, как и в работе [5], что движение жидкости достаточно медленное, а магнитное поле сильное, так что всюду, за исключением, может быть, некоторых узких слоев, можно пренебрегать силами инерции, вязкими силами и искажением магнитного поля, вызванным движением жидкости. Условия, при которых такие пренебрежения допустимы, будут написаны ниже.

Общее решение для плотности тока, электрического потенциала и скорости жидкости имеет вид [5]

$$c^{-1} \mathbf{j}_\perp = H^{-2} \mathbf{H} \times \text{grad } p \quad (1)$$

$$c^{-1}j_{\parallel} = -H \left[\int H^{-2} (\text{grad } H^{-2} \times \mathbf{H}) \text{grad } p \, da + A \right] \quad (2)$$

$$\sigma c^{-1} \varphi = - \iint H^{-2} (\text{grad } H^{-2} \times \mathbf{H}) \text{grad } p \, da \, da - Aa + B \quad (3)$$

$$c^{-1} \mathbf{v}_{\perp} = -\sigma^{-1} H^{-2} c \text{grad } p - H^{-2} \mathbf{H} \times \text{grad } \varphi \quad (4)$$

$$c^{-1} v_{\parallel} = H \int [H^{-2} (\text{grad } H^{-2} \times \mathbf{H}) \text{grad } \varphi - \sigma^{-1} H^{-2} c \text{grad } p \text{grad } H^{-2} - \sigma^{-1} H^{-4} c \Delta p] da + CH \quad (5)$$

Здесь p — давление, a — потенциал магнитного поля $\mathbf{H} = \text{grad } a$. Величины p, A, B, C представляют собой произвольные функции, принимающие постоянные значения на каждой магнитной силовой линии. Проводимость σ считается постоянной.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда $\mathbf{H} = H \mathbf{e}_z$, где $H = \text{const}$, $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z декартовой системы координат. Пусть, кроме того, границы области задаются уравнением $z = \pm f(x, y)$. Тогда выражения (1)–(5) примут вид

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{c}{H} p_y, & v_x &= -\frac{c^2}{\sigma H^2} p_x + \frac{c}{H} \varphi_y \\ j_y &= \frac{c}{H} p_x, & v_y &= -\frac{c^2}{\sigma H^2} p_y - \frac{c}{H} \varphi_x \\ j_z &= 0, & v_z &= -(c^2 / \sigma H^2) z \Delta p \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь учтена симметрия задачи относительно плоскости $z = 0$. Индексы x и y , стоящие у скалярных величин p и φ , обозначают частные производные: $p_x = \partial p / \partial x$ и т. д. В работе [5] получена система граничных условий на границах области. Одно условие выражает непроницаемость границ $v_n = 0$ и может быть записано в рассматриваемом случае так:

$$(v_z - v_x f_x - v_y f_y)_{z=f(x,y)} = 0 \quad (7)$$

Следующие два соотношения справедливы на непроводящей стенке¹

$$\mathbf{I} = -\sqrt{\sigma \mu} (H_n / |\mathbf{H}_n|) \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{I} = \int (j_{\tau} - j_{\tau 0}) d\mathbf{n} \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{I} = j_n \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{I}$ — вектор, который представляет собой поверхностную плотность тока, текущего в пограничном слое, причем интегрирование в (8) ведется по всей толщине пограничного слоя по нормали к поверхности; j — плотность тока в пограничном слое, а j_0 — плотность тока на внешней границе пограничного слоя; индекс τ означает, что вектор проецируется на касательную плоскость к границе; $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленный во вне по отношению к области заполненной жидкостью.

Соотношение (9) является уравнением неразрывности для плотности электрического тока, а дивергенция берется в касательной плоскости к границе. Равенства (6) и (8) позволяют записать условие (9) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (-v_y - v_z f_y) + \frac{\partial}{\partial y} (v_x + v_z f_x) = \frac{c}{\sqrt{\sigma \mu} H} (p_y f_x - p_x f_y) \quad (10)$$

После подстановки в уравнения (7) и (10) выражений (6) получим систему уравнений для потенциала $\varphi(x, y)$ и давления $p(x, y)$

¹ В работе [5] в равенстве (8) был пропущен множитель $H_n / |\mathbf{H}_n|$.

$$-\frac{c}{\sigma H} f \Delta p + \left(\frac{c}{\sigma H} p_x - \varphi_y \right) f_x + \left(\frac{c}{\sigma H} p_y + \varphi_x \right) f_y = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_x + \frac{c}{\sigma H} f f_y \Delta p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_y - \frac{c}{\sigma H} f f_x \Delta p \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma \mu}} (p_y f_x - p_x f_y) \quad (12)$$

Если в этих уравнениях оценить порядки величин различных членов, считая, что дифференцирование по координате соответствует по порядку величины делению на некоторый характерный размер L , то видно, что члены в левой части обоих уравнений, содержащие p , имеют по отношению к остальным членам порядок величины $1/M$, где $M = \sigma H L / c \sqrt{\mu}$. Считая M достаточно большим и пренебрегая в уравнениях (11), (12) этими членами получим

$$\varphi_x f_y - \varphi_y f_x = 0, \quad \varphi = \varphi(f) \quad (13)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (\sigma \mu)^{-1/2} (p_y f_x - p_x f_y) \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует:

$$p = \sqrt{\sigma \mu} \int [\varphi'' (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} + \varphi' (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2} \Delta f] ds \quad (15)$$

$$(\varphi' = d\varphi / df, \quad \varphi'' = d^2\varphi / df^2)$$

где s — длина, отсчитываемая вдоль кривой $f(x, y) = \text{const}$. При получении (15) было использовано второе равенство (13), а также равенство

$$dp / ds = (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2} (f_x p_y - f_y p_x)$$

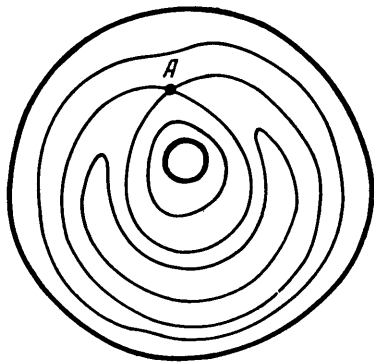
Заметим, что пренебрежения, сделанные в уравнениях (11) и (12), соответствуют пренебрежению в выражениях для компонент скорости членами, которые содержат давление. При этом вертикальная компонента скорости обращается в нуль, а вектор скорости

(не зависящий от z) совпадает по направлению с касательной к кривой $f(x, y) = \text{const}$. Согласно (8) вектор $\mathbf{I}$ ортогонален кривым $f(x, y) = \text{const}$ и пропорционален величине скорости.

Рассмотрим для примера течение в замкнутой трубе, непроводящие стенки которой задаются уравнениями $z = \pm f(x, y)$, и пусть, кроме того, имеются электроды с заданными потенциалами φ_1^* и φ_2^* , представляющие собой цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси z , и направляющими

$f(x, y) = G^* = \text{const}$, изображенными на фигуре жирными линиями.

Согласно предыдущему течение жидкости будет происходить вдоль линий $L(G)$, задаваемых уравнением $f(x, y) = G = \text{const}$ и изображенных на фигуре. Покажем, что фактически течение будет происходить лишь вдоль линий $L(G)$, разделяющих область течения на две части, в каждой из которых содержится по одному электроду. В остальной части трубы, если исходить из уравнений (13), (14) и пренебрегать в выражении для компонент скорости (6) членами, содержащими давление, течение происходить не будет.



Проинтегрируем уравнение (14) по области, ограниченной некоторой кривой $L(G)$ и не содержащей внутри себя электрода (для случая, изображенного на фигуре, нужно выбрать $G \geq f^* = f(A)$), и применим к выражению, получившемуся в левой части, теорему Гаусса — Остроградского. Тогда получим

$$\int_{L(G)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{\sqrt{\sigma \mu}} \iint (f_x p_y - f_y p_x) (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2} ds dG \quad (16)$$

Но внутренний интеграл равен нулю, так как давление — однозначная функция. Так как $\partial \varphi / \partial n = \varphi'(f) \partial f / \partial n$, а $\partial f / \partial n$ не меняет знак на кривой $L(G)$, то из (16) следует, что в области, занятой кривыми $L(G)$, не разделяющими электродов, т. е. в области $f(x, y) \geq f^*$, имеют место равенства

$$\varphi'(f) = 0, \quad \varphi(f) = \text{const} \quad (17)$$

Отсюда следует, что скорость в этой области равна нулю.

На границе рассмотренной выше области, т. е. на кривой $L(f^*)$, рвется производная $\varphi'(f)$. При этом из уравнения (15) следует, что $\partial p / \partial s$ бесконечно. На самом деле, если пользоваться полными уравнениями (11), (12), а еще лучше уравнениями, учитывающими вязкость и силы инерции, то получим, что на кривой $L(f^*)$ будет пограничный слой с резким немонотонным изменением давления поперек слоя. Этот пограничный слой здесь рассматриваться не будет.

Для нахождения распределения потенциала в оставшейся области $f(x, y) \leq f^*$ проинтегрируем уравнение (15) вдоль замкнутой линии $L(G)$ при $G < f^*$ и воспользуемся однозначностью давления. Тогда получим

$$\varphi''(f) F_1(f) + \varphi'(f) F_2(f) = 0 \quad (18)$$

$$F_1(f) = \sqrt{\sigma \mu} \int_{L(G)} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} ds, \quad F_2(f) = \sqrt{\sigma \mu} \int_{L(G)} \frac{\Delta f}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} ds$$

Это уравнение должно быть решено дважды на отрезке $h \leq f \leq f^*$, т. е. должны быть построены два решения $\varphi_1(f)$ и $\varphi_2(f)$, удовлетворяющие граничным условиям $\varphi_1(G^*) = \varphi_1^*$, $\varphi_2(G^*) = \varphi_1^*$ и условию $\varphi_1(f^*) = \varphi_2(f^*)$. Решение $\varphi_1(f)$ будет описывать поведение потенциала в области, примыкающей к электроду с потенциалом φ_1^* , а решение $\varphi_2(f)$ будет описывать поведение потенциала в области, примыкающей к другому электроду. Зная потенциал, можно, проинтегрировав уравнение (15), найти распределение давления, а затем из равенств (6) найти скорость и плотность тока.

Так же легко поддаются изучению и ряд других задач, в частности с отличным от нуля перепадом давлений.

Рассмотрим теперь общий случай переменного магнитного поля и произвольной формы стенок и получим уравнения, аналогичные уравнениям (13), (14).

Введем криволинейную систему координат x, y, a с базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ так, чтобы координатные линии a совпадали с магнитными силовыми линиями, а координатные линии x и y были ортогональны к ним. Метрику запишем следующим образом:

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2 + D H_0^{-2} da^2$$

$$D = g_{11} g_{22} - g_{12}^2, \quad H_0 = \text{const} \quad (19)$$

Из последнего равенства и из равенства $H = \text{grad } a$ следует:

$$H \sqrt{D} = H_0 \quad (20)$$

Таким образом, при произвольном задании функций $g_{11}(x, y, a)$, $g_{12}(x, y, a)$ и $g_{22}(x, y, a)$ будет задано некоторое магнитное поле, удовлетворяющее условию $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

По аналогии с рассмотренным выше случаем $H = \text{const}$ будем пренебрегать в выражении для скорости (4), (5) членами, содержащими давление. Кроме того, можно пренебречь зависимостью φ от a (второй член правой части равенства (3)). Убедиться в малости отброшенных членов можно, выписав, как и в случае $H = \text{const}$, полную систему уравнений и произведя оценки порядка величины различных членов.

Отбрасывая малые члены, получим

$$\mathbf{v} = \frac{c}{H_0} \varphi_y \mathbf{e}_1 - \frac{c}{H_0} \varphi_x \mathbf{e}_2 + \frac{c\mathbf{H}}{H_0^2} (\varphi_x F_y - \varphi_y F_x + C) \quad (21)$$

$$F = \frac{1}{H_0} \int D(x, y, a) da$$

Уравнения непроводящих стенок будем задавать в виде

$$a = H_0 f^+(x, y, a), \quad a = H_0 f^-(x, y, a) \quad (22)$$

Выражая вектор нормали через $f^\pm$, условие $v_n = 0$ на стенках можно записать следующим образом:

$$Df_x^\pm \varphi_y - Df_y^\pm \varphi_x - (\varphi_x F_y^\pm - \varphi_y F_x^\pm + C) = 0 \quad (23)$$

$$F^\pm = F(x, y, H_0 f^\pm)$$

Вычитая из уравнения (23) с индексами плюс это же уравнение с индексами минус, получим

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = 0, \quad \varphi = \varphi(\psi)$$

$$\psi(x, y) = F^+ - F^- = \frac{1}{H_0} \int D da = \int \sqrt{D} ds \quad (24)$$

Интегрирование производится вдоль всей магнитной силовой линии, находящейся в области течения. Из последнего равенства и равенств (19) видно, что величина ψ пропорциональна объему dV магнитной силовой трубки, находящейся в области течения

$$dV = \psi(x, y) dx dy$$

Если выбрать переменную y совпадающей с ψ , то согласно (21) у скорости $v_\perp$ будет только одна компонента $v^\perp = cH_0^{-1} \varphi_\psi' = \text{const}$. Поэтому для частиц жидкости, находящихся на одной магнитной силовой линии, $dx/dt = \text{const}$.

Таким образом, частицы жидкости, заполняющие в какой-то момент времени магнитную силовую трубку, будут и в любой последующий момент времени заполнять некоторую силовую трубку. Условие несжимаемости жидкости приводит к тому, что движение будет происходить вдоль поверхностей $\psi(x, y) = \text{const}$, что непосредственно видно также из равенств (21), (24).

Найдем теперь, как изменяется давление жидкости. Обозначим через $J_1^\pm dy$, $J_2^\pm dx$ поверхностные токи, протекающие через отрезки dy и dx линий $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ на поверхности $a = H_0 f^\pm(x, y)$. Тогда условие сохранения тока (9) может быть записано в виде

$$-\frac{\partial J_1^\pm}{\partial x} + \frac{\partial J_2^\pm}{\partial y} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}^\pm) \frac{\sqrt{D}}{|n_z|} \quad (25)$$

Величина, стоящая справа, пропорциональна притоку электрического тока из ядра потока к элементу $dxdy$, площадь которого $\sqrt{D}dxdy / |n_z|$.

Из равенств (1), (2) для плотности тока $\mathbf{j}$ получается выражение, отличающееся от выражения (21) для скорости $\mathbf{v}$ заменой Φ на $-p$ и C на $-A$. Используя эти выражения, правую часть равенства (25) можно представить в виде

$$\pm \frac{c}{H_0} [(p_y F_x^{\pm} - p_x F_y^{\pm}) + A] \pm \frac{cD}{H_0} (f_x^{\pm} p_y - f_y^{\pm} p_x) \quad (26)$$

Из определения $J_1^{\pm}$ и $J_2^{\pm}$ и равенства (8) следует:

$$J_2^{\pm} = -\sqrt{g\mu} [v(\partial_1 + Df^{\pm}\sqrt{g_{11}}\mathbf{H} / H_0)]$$

Вектор, стоящий в круглых скобках, представляет собой производную $\partial \mathbf{r} / \partial x$, взятую на поверхности $a = H_0 f^{\pm}(x, y)$. Скорость на этой поверхности может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \frac{c\Phi_y}{H_0} \partial_1 - \frac{c\Phi_x}{H_0} \partial_2 + \frac{cD}{H_0^2} (\Phi_y f_x^{\pm} - \Phi_x f_y^{\pm}) \mathbf{H}$$

Здесь использовано равенство (21) и условие, что вектор скорости лежит в касательной плоскости к границе. Используя это выражение, получим

$$J_2^{\pm} = c\sqrt{g\mu} H_0^{-1} [\Phi_y g_{11} (1 + Df_x^{\pm 2}) - \Phi_x (g_{12} + \sqrt{g_{11}g_{22}} Df_x^{\pm} f_y^{\pm})] \quad (27)$$

Аналогично получим

$$J_1^{\pm} = c\sqrt{g\mu} H_0^{-1} [\Phi_x g_{22} (1 + Df_y^{\pm 2}) - \Phi_y (g_{12} + \sqrt{g_{11}g_{22}} Df_x^{\pm} f_y^{\pm})] \quad (28)$$

Складывая уравнения (24), записанные для обеих граничных поверхностей, получим

$$p_y \Phi_x - p_x \Phi_y = \sqrt{g\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} (J_1^+ + J_1^-) + \frac{\partial}{\partial y} (J_2^+ + J_2^-) \right] \quad (29)$$

В случае $H = \text{const}$ и $f^+ = f^-$ уравнение (29) переходит в уравнение (14), если использовать декартовы координаты и учесть уравнение (24), которое совпадает в этом случае с уравнением (13).

Воспользовавшись тем, что левая часть равенства (29) пропорциональна производной от давления по длине s кривой $\psi(x, y) = \text{const}$, решение уравнения (29) можно записать следующим образом:

$$p = \sqrt{g\mu} \int (g_{11}\psi_y^2 - 2g_{12}\psi_x\psi_y + g_{22}\psi_x^2)^{-1/2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (J_1^+ + J_1^-) + \frac{\partial}{\partial y} (J_2^+ + J_2^-) \right] \quad (30)$$

Решение (24), (30) представляет собой обобщение (13), (15).

Полученное решение справедливо, если возможно течение жидкости вдоль линий $\psi(x, y) = \text{const}$, как в примере, разобранном выше. Если же постановка задачи не допускает такого течения (как, например, в случае, разобранном в работе [4], когда течение жидкости происходит в трубе квадратного сечения с переменной стороной), то полученное решение неприменимо, так как в этом случае в выражении для скорости (4), (5) нужно оставлять члены, зависящие от давления.

Рассмотрим теперь условия, при которых можно пренебрегать индуцированным магнитным полем, силами вязкости и силами инерции. Эти условия задаются неравенствами

$$H \gg \frac{1}{c} jL, \quad M \equiv \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \frac{HL}{c} \gg 1, \quad \rho v^2 \ll p \quad (31)$$

где v , L , H и p — характерные скорость, линейный размер, магнитное поле и перепад давления, ρ — плотность жидкости. Пусть жидкость приводится в движение приложенной извне разностью потенциалов, как в рассмотренном выше примере. Тогда первое и третье условие (31) приобретают вид

$$\varphi \ll \frac{c}{4\pi\sigma} H, \quad \varphi \ll \frac{\sqrt{\sigma\mu} H^2}{\rho c^2} L \quad (32)$$

где φ — заданная разность потенциалов. Если жидкость приводится в движение приложенным градиентом давления, а потенциал вырабатывается, то первое и третье неравенства (31) приводятся к виду

$$p \ll H^2, \quad p \ll \sigma\mu H^2 / \rho c^2 \quad (33)$$

При получении неравенств (33) для оценки величины $\text{grad } p$ использовалось уравнение (15).

Поступила 23 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Hunt J. C. R., Shercliff J. A. Magnetohydrodynamics at high Hartmann number. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1971, vol. 3, pp. 37—62.
2. Baylis J. A., Hunt J. C. Magnetohydrodynamic flow in an annular channel theory and experiment. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, pt 3, pp. 423—428.
3. Alty C. J. N. Magnetohydrodynamic duct flow in a uniform magnetic field of arbitrary orientation. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, pt 3, pp. 429—462.
4. Walkner J. S., Ludford G. S. S., Hunt J. S. R. Three-dimensional MHD flows with strong transverse magnetic fields, pt 3. Variable area rectangular duct with insulating walls. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 56, pt 1, pp. 121—141.
5. Куликовский А. Г. О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 2, стр. 3—10.