

УДК 533.6.01.55

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ СИЛЬНО НЕДОРАСШИРЕННОГО СОПЛА НАВСТРЕЧУ ГИПЕРЗВУКОВОМУ ПОТОКУ

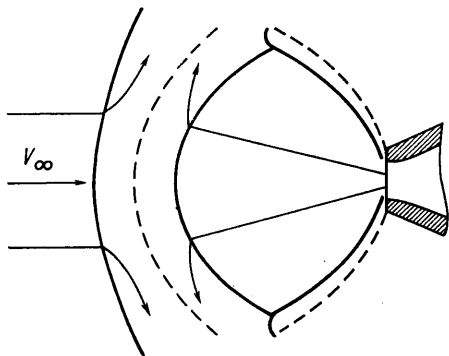
А. П. ВАСИЛЬКОВ, И. Н. МУРЗИНОВ

(Москва)

Рассматривается задача определения геометрии области возмущенного течения в целом и поля течения в окрестности оси симметрии при истечении сильно недорасширенной струи навстречу гиперзвуковому потоку. Предполагается, что течение невязкое и что давление торможения в струе p_{0j} намного больше давления торможения за прямой ударной волной в набегающем потоке $p_{0\infty}'$. Тогда при стационарном режиме картина течения будет следующей (фиг. 1): в набегающем потоке образуется внешняя ударная волна 1, струя заканчивается внутренней ударной волной 2, потоки разделены контактной поверхностью 3, которая имеет форму затупленного тела. Аналогичная модель течения применялась в работах [1, 2] при исследовании взаимодействия сверхзвукового потока со сверхзвуковым точечным источником.

Задача об определении формы контактной поверхности и параметров течения в окрестности общей критической точки потоков решается в обычной гиперзвуковой постановке тонких ударных слоев и при предположении малости отношения плотностей на ударной волне. Течение из сопла моделируется течением от эквивалентного точечного источника, помещенного в центре среза сопла, с распределенной по лучам интенсивностью [3].

1. Характерный продольный размер течения R_0 — расстояние вдоль оси симметрии от среза сопла до внутренней ударной волны — определяется из условия равенства давлений торможения с обеих сторон контактной поверхности в общей критической точке. Поскольку ударные волны на оси симметрии прямые, то имеем в случае совершенного газа



Фиг. 1

$$\frac{p_{0j}'}{p_{0j}} = \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)} \right]^{1/(\gamma-1)} \times \left[\frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1.1)$$

Здесь γ — показатель адиабаты для газа в струе, M — число Маха на оси перед внутренней ударной волной, p_{0j}' — давление торможения за внутренней ударной волной.

Распределение числа Маха вдоль оси струи нельзя получить в конечном виде. Используя численные расчеты для нахождения этого распределения и (1.1), где следует положить $p_{0j}' = p_{0\infty}'$, можно получить точную зависимость R_0 от $\sigma = p_{0j}/p_{0\infty}'$ и параметров, характеризующих сопло. Для случая звукового сопла воспользуемся аппроксимационной формулой работы [4] для распределения числа Маха вдоль оси

$$M = AX^{\gamma-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) (AX^{\gamma-1})^{-1} \quad \left(X = \frac{x - x_0}{d} \right) \quad (1.2)$$

Здесь d — диаметр среза, x — расстояние от среза, A — функции только γ . Комбинация (1.1) и (1.2) дает в неявном виде зависимость $R_0/d = f(\sigma, \gamma)$. При больших σ , когда $M \gg 1$, эту зависимость можно приближенно представить в виде

$$R_0/d = x_0/d + B\sigma^{1/2} \tag{1.3}$$

x_0/d	B	γ
0.40	0.745	1.4
0.85	0.725	1.286

На фиг. 2 показаны комбинация (1.1) и (1.2) (кривая 1) и приближенная зависимость (1.3) (кривая 2) в сравнении с экспериментальными данными для $\gamma = 1.4$, заимствованными из работ [5, 6] и отмеченными соответственно кружками и треугольниками.

Представляет интерес определение характерного размера течения в случае сферического источника для больших σ , когда газ от источника разгоняется до больших сверхзвуковых скоростей. Приближенно полагая скорость равной максимальной V_m , из уравнения неразрывности имеем для плотности

$$\rho = Q(4\pi V_m x^2)^{-1}$$

где Q — расход источника, x — расстояние от него. Отсюда получаем давление торможения за внутренней ударной волной

$$p_{0j}' \approx \rho V_m^2 = QV_m / (4\pi x^2) \tag{1.4}$$

Кроме того, при $M_\infty \gg 1$ имеем

$$p_{0\infty}' \approx \rho_\infty V_\infty^2 \tag{1.5}$$

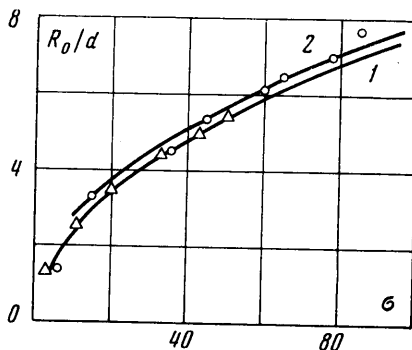
Приравнявая (1.4) и (1.5), получаем простую формулу для характерного продольного размера течения

$$R_0 = \sqrt{\frac{QV_m}{4\pi\rho_\infty V_\infty^2}} \tag{1.6}$$

2. Определим в приближенной постановке бесконечно тонкого ударного слоя форму контактной поверхности. Для этого выберем в меридиональном сечении полярную систему координат с полюсом в центре среза сопла. Течение в струе будем моделировать течением от точечного источника с распределенной по лучам интенсивностью. Эта модель физически применима, когда статическое давление в струе пренебрежимо мало в сравнении со скоростным напором и поэтому несущественны градиенты давления, искривляющие линии тока. В соответствии с этим будем полагать скорость в струе равной V_m и направленной по радиусу r , а распределение плотности — в виде

$$\frac{\rho(\varphi, r)}{\rho(0, r)} = f(\varphi), \quad \frac{\rho(\varphi, r_1)}{\rho(\varphi, r_2)} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{2.1}$$

Вообще говоря, это предположение носит асимптотический характер при $r \rightarrow \infty$ и требует по крайней мере $\sigma \gg 1$.



Фиг. 2

Уравнение контактной поверхности получим из условия равенств давлений с обеих ее сторон. Распределение давления со стороны внешнего потока примем по Ньютону¹.

$$p_1 = p_{0\infty}' \sin^2 \alpha_1 \quad (2.2)$$

Здесь α_1 — угол, образованный касательной к контактной поверхности с направлением набегающего потока. Давление на внутренней стороне можно принять также ньютоновским, либо равным давлению за ударной волной плюс центробежные силы, при вычислении которых будем предполагать постоянство касательной скорости поперек ударного слоя. Таким образом имеем соответственно

$$p_2 = p_{0j}' q \sin^2 \alpha_2 \quad (2.3)$$

$$p_2 = \rho V_m^2 \sin^2 \alpha_2 + u_\tau \psi (r \sin \varphi R)^{-1} \quad (u_\tau = -V_m \cos \alpha_2)$$

Здесь q — отношение скоростных напоров в данной и критической точке, α_2 — угол, образованный касательной к контактной поверхности с радиусом, u_τ — касательная скорость частиц ударного слоя, R — радиус кривизны контактной поверхности в данной точке, ψ — расход газа на единицу угла. Считая ударный слой тонким, имеем в соответствии с (2.1)

$$q = \frac{\rho(\varphi, r) V_m^2}{\rho(0, R_0) V_m^2} = \frac{R_0^2}{r^2} f(\varphi) = \frac{R_0^2}{r^2} (1 - a\varphi^2 + \dots) \quad (2.4)$$

$$\Psi = V_m \int_0^\varphi \rho r^2 \sin \varphi d\varphi = \rho(0, R_0) V_m^2 R_0^2 \int_0^\varphi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi$$

Поскольку $p_{0j}' = \rho(0, R_0) \sqrt{V_m^2}$, из (2.3) получаем

$$p_2 = p_{0j}' \left(q \sin^2 \alpha_2 - \frac{R_0^2 \cos \alpha_2}{rR \sin \varphi} \int_0^\varphi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right) \quad (2.5)$$

Приравнявая (2.2) и (2.5) и относя все размеры к R_0 , получаем дифференциальное уравнение для определения формы контактной поверхности $r = r(\varphi)$

$$[(r \sin \varphi)']^2 = f(\varphi) + \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{r \sin \varphi (r^2 + r'^2)} r' \int_0^\varphi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (2.6)$$

Здесь штрих — дифференцирование по φ . Граничные условия для (2.6) очевидны

$$r(0) = 1, \quad r'(0) = 0$$

Соответствующее уравнение без учета центробежных сил легко интегрируется

$$r = \frac{1}{\sin \varphi} \int_0^\varphi \sqrt{f(\varphi)} d\varphi \quad (2.7)$$

¹ Для определения внешнего давления можно было бы использовать теорию Буземана. Однако учет центробежных сил при обтекании выпуклых тел часто дает более грубые результаты, чем ньютоновская теория [7].

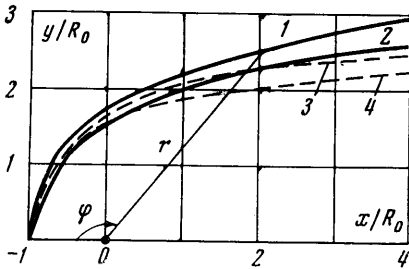
Рассмотрим вопрос о допустимых распределениях плотности $f(\varphi)$. При малых φ согласно (2.4) из (2.6) имеем

$$r = 1 + b\varphi^2 + \dots \quad (b = (\sqrt{33 - 8a} - 5) / 4) \quad (2.8)$$

Радиус кривизны контактной поверхности в критической точке, отнесенный к R_0 , получаем в виде

$$R = (1 - 2b)^{-1} \quad (2.9)$$

Если $R = 1$, то внутренняя ударная волна, которая в предположениях авторов совпадает с контактной поверхностью, в окрестности оси перпендикулярна линиям тока источника, а, следовательно, при $0 < R < 1$ на ударной волне появляется касательная составляющая скорости, направленная к критической точке. Аналогично в случае $R < 0$ контактная поверхность оказывается вогнутой по отношению к набегающему потоку. Очевидно, эти случаи будут крайними режимами, когда реализуется предложенная модель течения. Вне этих режимов можно ожидать появление застойных областей, а возможно, и неустойчивости течения, так как в области встречи потоков отсутствуют стоки. Таким образом, из необходимого условия $1 \leq R \leq +\infty$, учитывая (2.8) и (2.9), следует ограничение на распределение плотности: $1 \geq a \geq -2$.



Фиг. 3

Заметим, что в случае $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$, т. е. $a = 1$, решением (2.6) будет $r = 1$ ($\varphi \leq \pi/2$). Это распределение является предельным в том смысле, что если плотность убывает по φ сильнее $\cos^2 \varphi$, то в соответствии с вышеизложенным принятая модель течения будет нарушаться. Возможно, именно этим объясняется наблюдавшаяся в экспериментах [5] неустойчивость течения при истечении сверхзвуковой струи навстречу потоку, так как в сверхзвуковой струе плотность может падать сильнее, чем по закону $\cos^2 \varphi$.

Уравнение (2.6) решалось численно. На фиг. 3 показано решение для $f(\varphi) = 1$ (кривая 1). Для сравнения приведено также решение (2.7) без учета центробежных сил (кривая 2).

Представляет интерес геометрическая картина течения для «эллипсоидального» источника, качественно характеризующая некоторые реальные решения

$$f(\varphi) = (\cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

Здесь ε — отношение полуосей эллипса. Оказывается, что если размеры относить к R_0 , определяемому общим расходом, как для сферического источника (1.6), то при совмещении вершин контактные поверхности остаются близкими к случаю сферического источника. Для примера на фиг. 3 показаны формы контактной поверхности для $\varepsilon = 1/3$ (кривая 3) и $\varepsilon = 1/9$ (кривая 4). Эти случаи относятся к преимущественному вдуванию газа в направлении, которое перпендикулярно набегающему потоку, при сохранении суммарного расхода, равного расходу сферического источника.

3. Для нахождения поля течения в окрестности критической точки внутреннего ударного слоя примем систему координат с началом в критической точке, осью x вдоль меридианального сечения контактной поверхности и осью y , перпендикулярной к ней и направленной к срезу сопла.

Проекция скорости — соответственно uV_m , vV_m , плотность — $\rho\rho(0, R_0)$, давление — $\rho\rho(0, R_0)V_m^2$. Тогда в предположениях тонкости ударного слоя и малости отношения плотностей k до и после ударной волны течение в окрестности критической точки можно считать происходящим с постоянной плотностью k^{-1} и уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -k \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u^2}{R} = -k \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial(ux)}{\partial x} + \frac{\partial(vx)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $R > 0$ — радиус кривизны контактной поверхности в критической точке будем считать известной величиной.

Следуя работе [8], введем эффективный радиус кривизны R_* с целью учета расходимости потока в струе

$$R_*^{-1} = R_0^{-1} - R^{-1} \quad (3.2)$$

Решение (3.1) ищется в виде

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2}xf_0' + \dots, \quad -v = f_0(y) + x^2f_2(y) + \dots \\ p = p_0(y) - x^2p_2(y) + \dots \end{aligned}$$

Тогда уравнение неразрывности в первом приближении удовлетворяется, а из уравнений движения в силу их эллиптичности получается незамкнутая система

$$\begin{aligned} f_0f_0' = -kp_0', \quad f_0'^2 - 2f_0f_0'' = 8kp_2 \\ f_2'f_0 + f_0'^2(4R)^{-1} = kp_2' \end{aligned} \quad (3.3)$$

В предположении, что отход ударной волны $\delta/R \ll 1$, примем кривизну внутренней ударной волны равной R , что по существу является замыкающим условием. Тогда граничные условия для (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} y = 0, \quad v = 0 \\ y = \delta, \quad u = x/R_* + \dots, \quad -v = k[1 + O(x^2/R_*^2)] \\ p = (1 - k)[1 - x^2(a/R_0^2 + R_0^{-1}R_*^{-1} + R_*^{-2}) + \dots] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь, как и ранее, распределение плотности принимаем в виде (2.4). Условия (3.4) дают возможность оценить порядок членов системы уравнений (3.3) и замкнуть ее. Для интегрирования второго уравнения (3.3) положим $p_2(y) = p_2(0) = \beta$, поскольку соответствующий член существен лишь вблизи $y = 0$, где $f_0 = 0$, а в поле течения он порядка k и мал в сравнении с другими членами. Аналогично, используя (3.4), заключаем, что в третьем уравнении (3.3) можно пренебречь членом, содержащим f_2 .

В результате получаем из (3.3) с учетом (3.4)

$$\begin{aligned} p_0 = 1 - \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}f_0'^2 \\ f_0 = 2\sqrt{2k\beta}y + (k - 2\delta\sqrt{2k\beta})(y/\delta)^2 \\ \beta = p_2(\delta) - \frac{1}{3RR_*} \approx \frac{1}{R_*^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{R_*}{R} + \frac{R_*}{R_0} + a \frac{R_*^2}{R_0^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Значение β получено интегрированием третьего уравнения (3.3) от $y = 0$ до $y = \delta$.

Из граничного условия $f_0'(\delta) = 2/R_*$ получаем отход внутренней ударной волны

$$\frac{\delta}{kR_*} = \frac{1}{1 + (2k\beta)^{1/2}R_*} \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) с учетом (2.9) следует, что отношение δ/R_0 определяется только двумя параметрами: отношением плотностей на ударной волне k и параметром a , характеризующим распределение плотности в струе вблизи оси. В частности, в предельных случаях $a = 1$ и $a = -2$ имеем соответственно

$$\delta/R_0 = \sqrt{k/2}, \quad \delta/R_0 = k$$

Если воспользоваться аппроксимацией распределения плотности в звуковой струе на больших расстояниях от среза из [4]

$$f(\varphi) = \cos^2(\pi\varphi/2\varphi_m)$$

$$(\varphi_m = 1.662 \text{ для } \gamma = 1.4, \quad \varphi_m = 1.888 \text{ для } \gamma = 1.286)$$

то при $k = 1/6$ из (3.6) получим $\delta/R_0 = 0.279$.

В работе [9] в предположении, что контактная поверхность есть сфера с центром на срезе сопла, получено $\delta/R_0 = 0.156$ для $\gamma = 1.4$. Обнаруженное в этой работе систематическое расхождение с экспериментальными данными может быть устранено использованием более корректного значения $\delta/R_0 = 0.279$.

Для определения отхода δ_∞ внешней ударной волны от сферы радиуса R воспользуемся формулой работы [10] $\delta_\infty/R = 0.78 k_\infty$, где k_∞ — отношение плотностей на внешней ударной волне.

Тогда при $M_\infty = 7.1$ получаем $(\delta + \delta_\infty)/R_0 \approx 0.42$. Эта величина хорошо согласуется с экспериментальным значением $(\delta + \delta_\infty)/R_0 \approx 0.45$, полученным в работе [5] для больших σ в случае звуковой струи.

Поступила 5 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В. Б., Краснобаев К. В., Куликовский А. Г. Модель взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой. Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 1.
2. Agnone A. M. Slipstream formed by a supersonic source in a hypersonic stream. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 7.
3. Ладженский М. Д. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПИММ, 1962, № 2.
4. Ashkenas H., Sherman F. S. The structure and utilization of supersonic free jets in low density wind tunnels. Proc. 14-th Internat. Sympos on Rarefied Gas Dynamics, 1964, vol. 2, Acad. Press., 1966.
5. Charwat A. F., Faulman D. Investigation of the flow and drag due to control jets discharging upstream into a supersonic flow. Proc. 15-th Internat. Astron. Congress, 1964, vol. 3.
6. Romeo D., Sterrett D. Flow field of a sonic jet exhausting counter to a hypersonic free stream. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 3.
7. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
8. Лунев В. В., Храмов Н. Е. Течение в окрестности критической точки тупого тела в расходящемся гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
9. Cassanova R. A., Ying-Chu Lin Wu. Flow field of a sonic jets exhausting counter to a low density supersonic airstream. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 12, pt 1.
10. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равномерно диссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.