

УДК 532.5.013.3

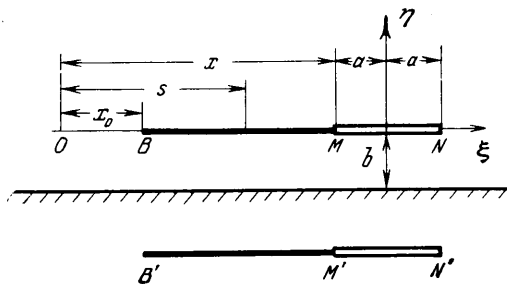
НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОФИЛЯ ВБЛИЗИ ВОЛНИСТОГО ЭКРАНА

В. А. ЕРОШИН

(Москва)

Исследование движения профиля вблизи плоского и волнистого экранов является одним из способов приближенного учета влияния поверхности жидкости на характеристики надводных крыльев. Стационарные характеристики профилей вблизи плоского экрана исследовались в ряде теоретических и экспериментальных работ [1, 2]. В настоящей работе рассматривается нестационарное движение тонкого профиля вблизи плоского и волнистого экранов в идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, и при наличии потока жидкости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение тонкого слабо изогнутого профиля длины $2a$ в жидкости, покоящейся на бесконечности, на расстоянии b от экрана (фиг. 1). Предположим, что профиль движется поступательно в положительном направлении оси ξ , причем скорость профиля и его форма являются некоторыми функциями времени. Движение рассматриваем в подвижной системе отсчета.



Фиг. 1

Неустановившееся движение жидкости происходит около профиля с заостренной задней кромкой, поэтому из условия Жуковского о конечности скорости жидкости на задней кромке следует, что она должна быть точкой схода линии разрыва горизонтальной скорости. Нормальная составляющая скорости вдоль BM непрерывна.

Разрыв горизонтальной составляющей скорости будем рассматривать как непрерывное распределение вихрей, сбегающих с задней кромки профиля. Будем предполагать, что профиль мало отличается от прямолинейного отрезка и граничные условия на нем сносим на ось ξ . Линию разрыва горизонтальных скоростей позади профиля также заменим отрезком горизонтальной оси. Пусть B — положение задней кромки в момент возникновения движения.

Для определения потенциала скорости абсолютного движения жидкости $\Phi(\xi, \eta, t)$ в подвижной системе координат имеем следующие граничные условия:

1) на обеих сторонах отрезка MN известна нормальная составляющая скорости жидкости $\partial\Phi/\partial\eta = -V_n$, которая определяется формой и законом движения профиля;

2) на отрезке BM имеем разрыв горизонтальной составляющей скорости, величину которого обозначим через

$$\varphi(x) = d\Phi_- / ds - d\Phi_+ / ds,$$

3) на экране нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю.

2. **Определение течения жидкости вблизи плоского экрана.** Введем характеристическую функцию $W = \Phi + i\Psi$. Решение задачи будем искать в виде суммы течений около действительного профиля MN и некоторого дополнительного $M'N'$, симметричного первому относительно экрана. Условие на стенке будет удовлетворяться тождественно, если комплексно-сопряженную скорость взять в виде суммы

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW_1}{d\zeta} + \frac{dW_2}{d\zeta} \quad (2.1)$$

$$\frac{dW_1}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\zeta+a}{\zeta-a}} \left[\int_{-a}^{+a} 2v_n \sqrt{\frac{a-\xi_0}{a+\xi_0}} \frac{d\xi_0}{\xi_0-\zeta} + \int_{x_0}^x \varphi(s) \sqrt{\frac{\xi_0-a}{\xi_0+a}} \frac{ds}{\xi_0-\zeta} \right]$$

$$\frac{dW_2}{d\zeta} = -\frac{dW_1(\zeta+2bi)}{d\zeta}, \quad \xi_0 = s - x - a$$

Здесь $W_1(\zeta, t)$ — решение задачи о движении одиночного профиля в безграничной жидкости [1]. В дальнейшем в качестве независимой переменной используем не время, а путь, пройденный профилем с момента возникновения движения в точке B . Скорость $v_n(\xi, x)$ в выражении (2.1) не равна $V_n(\xi, x)$ на действительном профиле вблизи экрана ввиду взаимного влияния. Задача, следовательно, сводится к отысканию такой скорости $v_n(\xi, x)$, которая с учетом влияния дополнительного профиля давала бы на отрезке MN скорость $V_n(\xi, x)$

$$\text{Im} \left[\frac{dW_1}{d\zeta} + \frac{dW_2}{d\zeta} \right]_{MN} = V_n(\xi, x)$$

Это приводит в общем случае к интегральному уравнению

$$V_n(\xi, x) = v_n(\xi, x) - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(a+\xi)^2+4b^2}{(a-\xi)^2+4b^2}} \left\{ \int_{-a}^{+a} 2v_n \sqrt{\frac{a-\xi_0}{a+\xi_0}} \times \right. \\ \left. \times \frac{A(\xi_0-\xi)+2bB}{(\xi_0-\xi)^2+4b^2} d\xi_0 + \int_{x_0}^x \varphi(s) \sqrt{\frac{\xi_0-a}{\xi_0+a}} \frac{A(\xi_0-\xi)+2bB}{(\xi_0-\xi)^2+4b^2} ds \right\} \quad (2.2)$$

$$\sqrt{\frac{\zeta+2bi+a}{\zeta+2bi-a}} \Big|_{MN} = (A-iB) \sqrt{\frac{(a+\xi)^2+4b^2}{(a-\xi)^2+4b^2}}$$

Соотношение (2.2) вместе с интегральным уравнением

$$\Gamma_0 + 2 \int_{-a}^{+a} v_n(\xi, x) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi = - \int_{x_0}^x \varphi(s) \sqrt{\frac{2a+x-s}{x-s}} ds \quad (2.3)$$

служащим для определения плотности распределения вихрей, сбегających с задней кромки профиля, позволяют определить величину скорости $v_n(\xi, x)$ на профиле, после чего, интегрируя соотношение (2.1), находим $W(\zeta, t)$ и $\Phi(\xi, \eta, t)$.

При больших значениях параметра $b/2a$ уравнение (2.2) дает $v_n = V_n$ и задача сводится к движению профиля в безграничной жидкости, решение которой хорошо изучено. В случае, когда расстояние до экрана является малым по сравнению с длиной профиля, уравнение (2.2) можно значительно

но упростить и привести к следующему виду:

$$u - \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \frac{u(\xi_0, x) d\xi_0}{\xi_0 - \xi} = f(\xi, x), \quad u = 2v_n(\xi, x) \sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}}$$

$$f(\xi, x) = \frac{\pi(a^2 - \xi^2)}{2ab} \sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}} V_n(\xi, x) - \frac{1}{2} H(\xi, x, \varphi) \quad (2.4)$$

$$H(\xi, x, \varphi) = \int_{x_0}^x \varphi(s) \sqrt{\frac{2a + x - s}{x - s}} \left[\frac{1}{a + \xi + x - s} - \frac{a^2 - \xi^2}{a(a + \xi + x - s)^2} \right] ds$$

Здесь предельный переход совершается в предположении, что линейризация на профиле более высокого порядка, чем расстояние профиля до экрана.

3. Определение $v_n(\xi, x)$ для малых значений параметра $b/2a$. Перейдем к решению сингулярного интегрального уравнения (2.4) для разомкнутого контура при условии (2.3). Функция $f(\xi, x)$ на отрезке $[-a, +a]$ удовлетворяет условию Липшица, поэтому решение этого уравнения можно представить в виде [3]

$$u(\xi, x) = \frac{1}{1 + \pi^2/4} \left\{ f(\xi, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right)^{\nu} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{a + \xi_0}{a - \xi_0} \right)^{\nu} \frac{f(\xi_0, x) d\xi_0}{\xi_0 - \xi} \right\}$$

$$\left(\nu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} = 0.3195 \right) \quad (3.1)$$

Проинтегрируем уравнение (3.1) в пределах от $-a$ до $+a$ и исключим с помощью уравнения (2.3) из левой части член, содержащий $v_n(\xi, x)$. После некоторых упрощений приходим к интегральному уравнению Вольterra первого рода для определения плотности вихрей

$$F(x) = - \int_{x_0}^x \varphi(s) \sqrt{\frac{2a + x - s}{x - s}} [1 - K(x - s)] ds \quad (3.2)$$

Выражения для $F(x)$ и $K(x - s)$ довольно громоздки. Однако если в формуле (3.1) приближенно положить $\nu = 1/3$, то $F(x)$ и $K(x - s)$ имеют вид

$$F(x) = \Gamma_0 + \frac{\pi}{4ab} \int_{-a}^{+a} (a^2 - \xi^2) \sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}} V_n(\xi, x) d\xi$$

$$K(x - s) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}a} \left[\sqrt{\frac{x - s}{2a + x - s}} (5a + 6x - 6s) - (a + 6x - 6s) \right]$$

Не нарушая общности, полагаем $x_0 = 0$. С помощью введения функций

$$y_n = \int_0^x \frac{s^n \varphi(s) ds}{\sqrt{x - s}}, \quad z_n = \int_0^x \frac{s^n \varphi(s) ds}{\sqrt{x - s}}$$

уравнение (3.2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных

уравнений [4] со следующими начальными условиями:

$$y_n' = 1/2 y_{n-1}' + x y_{n-1}', \quad z_n' = 1/6 z_{n-1}' + x z_{n-1}' \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$x = 0, \quad y_1(0) = \dots = y_n(0) = \dots = z_1(0) = \dots = z_n(0) = \dots = 0$$

Зная решение системы, например $y_0(x)$, плотность распределения вихрей определяется по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y_0(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{y_0'(s) ds}{\sqrt{x-s}} \right]$$

После этого значение $v_n(\xi, x)$ находим по формуле (3.1).

4. Распределение давления на профиле и определение сил, действующих на профиль. Распределение давления на профиле определяем с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа в подвижной системе координат

$$P - P_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta, t)}{\partial t} - c \frac{\partial \Phi(\xi, \eta, t)}{\partial \xi} \right]$$

где c — скорость движения профиля.

Для профиля, движущегося в безграничной жидкости, перепад давлений имеет следующий вид:

$$\Delta P = -\frac{\pi}{\rho} \left\{ \int_{-a}^{+a} \frac{\partial}{\partial t} [V_n(\xi_0, t)] \ln \frac{a^2 - \xi_0 \xi - \sqrt{(a^2 - \xi_0^2)(a^2 - \xi^2)}}{a^2 - \xi_0 \xi + \sqrt{(a^2 - \xi_0^2)(a^2 - \xi^2)}} d\xi_0 + \right.$$

$$\left. + c \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} \left[\int_{-a}^{+a} 2V_n \sqrt{\frac{a - \xi_0}{a + \xi_0}} \frac{d\xi_0}{\xi_0 - \xi} + \int_{x_0}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - a^2}} \right] \right\}$$

а величина подъемной силы, действующей на профиль, и момент относительно начала координат равны [1]

$$Y = -2\rho c \int_{-a}^{+a} V_n(\xi, t) \sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}} d\xi -$$

$$- 2\rho \frac{d}{dt} \int_{-a}^{+a} V_n(\xi, t) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi - \rho a c \int_{x_0}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{|\xi_0^2 - a^2|}}$$

$$M = -2\rho c \int_{-a}^{+a} V_n(\xi, t) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi -$$

$$- \rho \frac{d}{dt} \int_{-a}^{+a} V_n(\xi, t) \xi \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi - \frac{1}{2} \rho a^2 c \int_{x_0}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{|\xi_0^2 - a^2|}} \quad (4.1)$$

При движении профиля вблизи плоского экрана выражения для подъемной силы и момента будут иметь тот же вид, что и в безграничной жидкости с той лишь разницей, что вместо значения нормальной составляющей скорости на действительном профиле в соответствующих уравнениях будет стоять фиктивная скорость. Это является следствием того, что $dW_2/d\xi$ непрерывна при переходе через MN и на перепад давлений на профиле не влияет.

Для определения сил, действующих на профиль при малых значениях параметра $b/2a$ в соотношении (4.1) необходимо подставить значение $v_n(\xi, x)$, найденное по формуле (3.1). Приближенное значение $v_n(\xi, x)$ для произвольного расстояния профиля от экрана можно получить путем уточнения выражения (3.1) с помощью интегрального уравнения (2.2). В этом случае в качестве первого приближения для $v_n(\xi, x)$ можно принять следующее выражение:

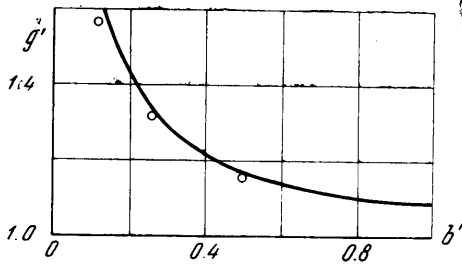
$$v_n(\xi, x) = \left[1 + \frac{\pi}{16ab}(a^2 - \xi^2) \right] V_n(\xi, x) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{16ab} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \int_{-a}^{+a} (a^2 - \xi_0^2) \sqrt{\frac{a-\xi_0}{a+\xi_0}} V_n(\xi_0, x) \frac{d\xi_0}{\xi_0 - \xi} - \\ - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} H(\xi, x, \varphi_0) - \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+\xi_0}{a-\xi_0}} H(\xi_0, x, \varphi_0) \frac{d\xi_0}{\xi_0 - \xi} \quad (4.2)$$

которое при малых и больших значениях параметра $b/2a$ стремится к точному решению, а при промежуточных дает неплохое качественное и количественное с ним совпадение. Плотность распределения вихрей в этом случае будет равна $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_\infty(x)$, где $\varphi_0(x)$ определяется из уравнения (3.2), а $\varphi_\infty(x)$ — значение плотности распределения вихрей при движении в безграничной жидкости.

При не очень малых значениях параметра $b/2a$ ($b/2a > 0.5$) величина $\varphi_0(x)$ значительно меньше $\varphi_\infty(x)$ и ее можно отбросить. В этом случае с помощью уравнения (4.2) выражение для подъемной силы (4.1) приводится к следующему виду:

$$Y = Y_\infty + \frac{\pi \rho c}{4ab} \int_{-a}^{+a} (a^2 - \xi^2) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} V_n(\xi, x) d\xi + \\ + \frac{\pi \rho}{12ab} \frac{d}{dt} \int_{-a}^{+a} (a + 3\xi)(a^2 - \xi^2) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} V_n(\xi, x) d\xi \quad (4.3)$$

где Y_∞ — подъемная сила при движении профиля в безграничной жидкости. При весьма малых значениях $b/2a$ ($0.05 < b/2a < 0.3$) в этой формуле появляются члены, содержащие $\varphi_0(x)$, которые нетрудно получить из уравнений (4.1) и (4.2).



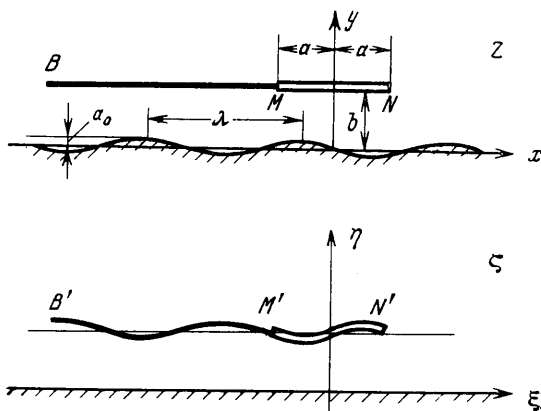
Фиг. 2

Использование формулы (4.3) при весьма малых значениях $b/2a$ равносильно предположению о незначительном влиянии вихревых следов на величину фиктивной скорости $v_n(\xi, x)$. Для случая установившегося движения на фиг. 2 приведено сравнение значений подъемной силы пластинки ($V_n = +c\beta$, $\varphi = 0$), полученных по формуле (4.3) с экспериментальными данными [2], которое показывает на вполне удовлетворительное совпадение. Здесь $Y' = Y/Y_\infty$, $b' = b/2a$, β — угол атаки пластинки.

Для случая установившегося движения на фиг. 2 приведено сравнение значений подъемной силы пластинки ($V_n = +c\beta$, $\varphi = 0$), полученных по формуле (4.3) с экспериментальными данными [2], которое показывает на вполне удовлетворительное совпадение. Здесь $Y' = Y/Y_\infty$, $b' = b/2a$, β — угол атаки пластинки.

5. Движение профиля вблизи волнистой стенки.

Рассмотрим задачу о движении тонкого слабо изогнутого профиля со скоростью c вдоль волнистой стенки $y = a_0 \sin \gamma x$, $\gamma = 2\pi / \lambda$. Решение ищем методом конформных отображений. Пусть $z = f(\zeta, t)$ — аналитическая функция, отображающая физическую плоскость z на вспомогательную ζ , где деформируемый профиль движется вблизи плоского экрана (фиг. 3). Если через $w(z, t) = \varphi + i\psi$ обозначить характеристическую



Фиг. 3

функцию при движении профиля MN в физической плоскости, а $W(\zeta, t) = \Phi + i\Psi$ — характеристическая функция во вспомогательной плоскости, которая предполагается известной, то между ними будет иметь место следующее соотношение:

$$w(z, t) = w[f(\zeta, t)] = W(\zeta, t) \tag{5.1}$$

Отображение физической плоскости на вспомогательную, где деформируемый профиль движется вблизи плоского экрана, производится с помощью функции

$$z = \zeta + a_0 \exp[i\gamma(\zeta + ct)] \tag{5.2}$$

Выражение для комплексно-сопряженной скорости в физической плоскости принимает вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{1 + ia_0\gamma \exp[i\gamma(\zeta + ct)]} \frac{dW}{d\zeta}$$

Зная потенциал скорости во вспомогательной плоскости $\Phi(\xi, \eta, t)$, из уравнений (5.1), (5.2) в рамках линейности получаем

$$\varphi(x, y, t) = \Phi[x - a_0 e^{-\gamma y} \cos \gamma(x + ct), y - a_0 e^{-\gamma y} \sin \gamma(x + ct), t]$$

Аналогично после несложных преобразований находим выражения для подъемной силы и момента, действующих на профиль, при движении вблизи волнистого экрана

$$Y = Y_0 - a_0 \gamma e^{-\gamma b} \int_{-a}^{+a} \Delta P(\xi, t) \sin \gamma(\xi + ct) d\xi$$

$$M = M_0 - a_0 \gamma e^{-\gamma b} \int_{-a}^{+a} \Delta P(\xi, t) [\gamma \xi \sin \gamma(\xi + ct) - \cos \gamma(\xi + ct)] d\xi$$

где $Y_0, M_0, \Delta P(\xi, t)$ — подъемная сила, момент и перепад давлений на профиле при движении вблизи плоского экрана.

6. Влияние потока жидкости на движение профиля вблизи волнистой стенки. До сих пор рассматривалось движение профиля в покоящейся жидкости (в случае плоского экрана эти две задачи для идеальной жидкости по постановке не отличаются). При наличии потока волнистая стенка вносит возмущения и профиль дви-

жется в предварительно возмущенном потоке. Обозначим скорость потока в неподвижной системе отсчета через u . Тогда в системе координат (ξ, η) , связанной с серединой профиля, движущегося со скоростью c в положительном направлении горизонтальной оси, потенциал возмущенного движения жидкости вдоль волнистой стенки равен [5]

$$\varphi_1(\xi, \eta, t) = -a_0 u \cos \gamma(\xi + ct) \exp[-\gamma(\eta + b)]$$

где $\eta = -b + a_0 \sin \gamma(\xi + ct)$ — уравнение волнистой стенки в подвижной системе координат.

Если потенциал абсолютного движения жидкости вблизи плоского экрана обозначить через $\varphi_0(\xi, \eta, t)$, то при наложении на это течение потока с потенциалом $\varphi_1(\xi, \eta, t)$ условие обтекания на профиле будет нарушено. В этом случае решение можно искать в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$$

где φ_2 — дополнительный потенциал, для определения которого имеем следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right|_{MN} = - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right|_{MN}, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=-b} = 0$$

Потенциал $\varphi_2(\xi, \eta, t)$ определяется с помощью методов, изложенных в п. 1—4.

Институт механики МГУ

Поступила 31 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. Егоров И. Т., Соколов В. Т. Гидродинамика быстроходных судов. Л., «Судо-строение», 1971.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. Ерошин В. А. Нестационарное глассирование и движение профиля со сбегающими вихрями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.—Л., Гостехиздат, 1950.