

УДК 533.6

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. Д. УСТИНОВ

(Минск)

Показано, что задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну $x(t) = h(\exp t/k - 1)$, которая распространяется по покоящемуся газу с параметрами

$$p_0 = \text{const}, \quad \rho_*(x) = \rho_0 h^2 / (x + h)^2$$

при $h < 0$, $k < 0$ и при $\gamma p_0 k^2 < \rho_0 h^2$ решается неоднозначно. Рассмотрена задача об определении движения поршня, порождающего ударную волну, которая движется по закону $x = a \ln(1 + t/b)$ в область $x > 0$, занятую покоящимся газом с параметрами

$$p_0 = 0, \quad \rho_*(x) = \rho_0 \exp x/a, \quad \rho_0 = \text{const}$$

Показано, что при $a > 0$, $b > 0$ задача решается неоднозначно. В работе получено новое точное решение, которое рассматривается как решение некоторой задачи Коши. Доказано, что найденное Л. И. Седовым точное решение уравнений одномерного движения газа, содержащее произвольную функцию и ряд констант, в плоском случае можно применить к задаче о движении поршня конечной массы под действием давления газа после кратковременного удара.

1. Уравнения одномерного адиабатического движения идеального газа [1] запишем в следующей форме [2]:

$$bw + \frac{\partial w}{\partial \sigma} + (w + 1) \frac{\partial w}{\partial s} - ap^{-1/\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \sigma} + (w + 1) \frac{\partial p}{\partial s} - p \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

$$u = \frac{p_0 k}{\rho_0 h} \varphi(\tau) w, \quad p = \rho^\gamma f^\gamma(\tau), \quad d\sigma = \frac{p_0 k}{\rho_0 h} \varphi(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

$$a = \rho_0 h^2 f(\tau) / \gamma p_0 k^2 \varphi^2(\tau), \quad b = \rho_0 h \varphi'(\tau) / p_0 k \varphi^2(\tau)$$

где p_0 , ρ_0 , h и k — произвольные постоянные, имеющие размерности давления, плотности, длины и времени соответственно, $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ — произвольные функции τ . Геометрическая координата x и время t связаны с независимыми переменными τ и s соотношениями

$$p dt = (u + \varphi) dt - ds, \quad p \rho dx = (p + \rho u^2 + \rho u \varphi) d\tau - \rho u ds \quad (1.2)$$

Рассмотрим следующее точное решение [2] уравнений (1.1):

$$\varphi(\tau) = \frac{\rho_0 h}{\rho_0 h - \tau}, \quad p = p_0 (w + 1), \quad c = \frac{p_0 k^2}{\rho_0 h^2}$$

$$f(\tau) = \frac{\sigma_0 h^2}{k^2} \varphi^2(\tau) \left(\frac{c}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma},$$

$$s = p_0 k \int_w^{\infty} \left[\frac{\sigma_0}{\gamma} c^{-(\gamma+1)/\gamma} (z+1)^{-(\gamma+1)/\gamma} - 1 \right] \frac{z+1}{z} dz \quad (1.3)$$

$$\sigma_0 = \frac{\gamma - 1 + 2c\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{2 + c - c\gamma}{\gamma + 1} \right)^{1/\gamma}, \quad w_* = \frac{2(1 - c\gamma)}{c(1 + \gamma)}, \quad 0 < c \leq \frac{1}{\gamma}$$

Решение (1.3), как показано ранее [2], при $h > 0, k > 0$ описывает течение газа за ударной волной, распространяющейся по покоящемуся газу с параметрами $\rho = \rho_*(x), p = p_0$ со скоростью $x' = x'_0(t)$, причем

$$\rho_*(x) = \rho_0 h^2 / (x + h)^2, \quad x_0(t) = h(\exp t / k - 1) \quad (1.4)$$

Закон движения поршня, порождающего ударную волну (1.4) определяется равенствами

$$xh^{-1} = c[w - w_* + \sigma_0 c^{-(\gamma+1)/\gamma}(w+1)^{-1/\gamma} - \sigma_0 c^{-(\gamma+1)/\gamma}(w_*+1)^{-1/\gamma}]$$

$$tk^{-1} = \ln(ww_*^{-1}) - \gamma^{-1} \sigma_0 c^{-(\gamma+1)/\gamma} \int_w^\infty z^{-1}(z+1)^{-(\gamma+1)/\gamma} dz \quad (1.5)$$

и в области течения w изменяется от w_* до ∞ . При $c = 1/\gamma$ ударная волна вырождается в звуковую волну сжатия, возникающую в газе при движении поршня по закону, который получается из (1.5) при $c \rightarrow 1/\gamma$.

Рассмотрим случай, когда $h < 0, k < 0$ и $0 < c < 1/\gamma$. Покоящийся газ находится в области $0 \leq x \leq -h$ и масса его оказывается бесконечной. Траектория ударной волны в плоскости xt имеет вертикальную асимптоту $x = -h$. При движении вдоль траекторий частиц газа $\tau = \text{const}$ в направлении $dt > 0$ w уменьшается от w_* до значения $w_1 > 0$, при котором выражение в квадратных скобках под знаком интеграла в (1.3) обращается в нуль. Предельному значению $w = w_1$ соответствует некоторая линия в плоскости xt . Нетрудно доказать, что эта линия является C_+ -характеристикой и ее уравнение имеет следующий вид:

$$x = (h + x_0)[e^{(t-t_0)/h} - 1] + x_0 \quad (1.6)$$

где $M(x_0, t_0)$ — точка на поршне, из которой выходит эта характеристика. Сравнивая (1.4) и (1.6), заключаем, что C_+ -характеристика и ударная волна не пересекаются.

Поскольку задача о продолжении решения через характеристику решается неоднозначно, приходим к следующему результату: задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну, распространяющуюся по закону (1.4), по покоящемуся газу с параметрами $p_0 = \text{const}, \rho = \rho_*(x)$ при $h < 0, k < 0$ и при $c < 1/\gamma$ имеет бесчисленное множество решений.

При $c = 1/\gamma$ ударная волна вырождается в звуковую волну, а поршень движется в отрицательном направлении оси x . Анализ (1.5) показывает, что при $w \rightarrow 0$ траектория поршня в плоскости xt имеет наклонную асимптоту

$$\frac{x}{h} + \frac{t}{\gamma k} = -\frac{1}{\gamma} - \Phi(\gamma), \quad \Phi(\gamma) = \int_0^\infty (x+1)^{-1} [(x+1)^\gamma - 1]^{-1} x dx \quad (1.7)$$

а течение будет однозначным в неограниченной области между поршнем и C_+ -характеристикой, выходящей из точки $x = t = 0$.

2. Пусть в области $x \geq 0$ находится покоящийся газ, давление которого равно нулю, а плотность $\rho_*(x)$ распределена по экспоненциальному закону. В момент $t = 0$ в область $x > 0$ по логарифмическому закону начинает распространяться ударная волна $x = x_0(t)$

$$p_0 = 0, \quad \rho_*(x) = \rho_0 e^{x/a}, \quad x_0(t) = a \ln(1 + t/b) \quad (2.1)$$

где ρ_0, a, b — постоянные, имеющие размерности плотности, длины и времени соответственно. Требуется определить движение поршня, порождающего ударную волну (2.1).

В области между поршнем и сильной ударной волной течение газа описывается следующими уравнениями [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \tau} + R \frac{\partial U}{\partial \xi} + U \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0 \\ u = U(\tau, \xi), \quad p = R^{-1}(\tau, \xi), \quad \rho = P^{-1}(\tau, \xi), \quad R = P^\gamma f(\tau) \\ dx = (P + RU^2)d\tau - RUd\xi, \quad dt = RUd\tau - Rd\xi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Образом сильной ударной волны в плоскости $\tau\xi$ является линия $\xi = 0$ [3], на которой

$$\begin{aligned} p = \frac{2\rho_*(\tau)}{\gamma + 1} U_0^2(\tau), \quad u = \frac{2U_0(\tau)}{\gamma + 1}, \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_*(\tau) \\ \rho_*(\tau) = \frac{\tau + a\rho_0}{a}, \quad U_0(\tau) = \frac{a^2 \rho_0 b^{-1}}{\tau + a\rho_0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

причем выражения для $\rho_*(\tau)$ и $U_0(\tau)$ получены из (2.1) с учетом того, что $d\tau = \rho_* dx$.

Решение поставленной задачи ищем в форме

$$R = \rho_*^{-1} U_0^2 Z(s), \quad U = U_0 V(s), \quad P = \rho_*^{-1} W(s), \quad s = -b\xi / a^2 \rho_0 \quad (2.4)$$

Тогда уравнения (2.2) и граничные условия (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} V + V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{z} \frac{dW}{ds} = 0, \quad Z - \frac{d(ZV)}{ds} = 0, \quad W = CZ^{1/\gamma} \\ Z(0) = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad V(0) = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad W(0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решая задачу (2.5), найдем

$$\begin{aligned} V(h) = \sqrt{\frac{2h}{\gamma + 1} \left(h^{1/(\gamma-1)} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}, \quad Z = \frac{\gamma+1}{2} h^{\gamma/(1-\gamma)}, \\ W = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h^{1/(1-\gamma)} \\ s = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \int_0^h [V(h)]^{-1} \{h^{1/(\gamma-1)} - (\gamma-1)/\gamma\} dh \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя полученное решение, нетрудно получить из выражений (2.2) для x и t уравнения траекторий частиц газа $\tau = \text{const}$ за ударной волной

$$\begin{aligned} x = a \ln \frac{\tau + a\rho_0}{a\rho_0} - \frac{a\gamma}{2(\gamma-1)} \left[\ln h + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} (h^{-1/(\gamma-1)} - 1) \right] \\ t = \frac{b\tau}{a\rho_0} - \frac{\gamma b(\tau + a\rho_0)}{2a\rho_0(\gamma-1)} \int_1^h \frac{h^{-1} - h^{-\gamma/(\gamma-1)}(\gamma-1)/\gamma}{V(h)} dh \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть $a > 0$, $b > 0$. При движении вдоль линий тока в направлении возрастания t $ds > 0$ и, как это видно из (2.6), h монотонно убывает от значения $h = 1$ на ударной волне до значения $h_* = [(\gamma-1)/\gamma]^{\gamma-1}$. Нетрудно доказать, что образом точки $h = h_*$ в плоскости xt является C_+ -характери-

стика. Обозначим через x_0, t_0 координаты нулевой линии тока $\tau = 0$ (линии поршня), из которой выходит эта характеристика и которые определяются из (2.7) при $\tau = 0, h = h_*$. Полагая, далее в (2.7) $h = h_*$ и исключая τ , найдем ее уравнение

$$x = x_0 + a \ln [1 + (t - t_0)(b + t_0)^{-1}] \quad (2.8)$$

Можно показать, что характеристика (2.8) и ударная волна не пересекаются. Поэтому имеем следующий результат: задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну (2.1), которая распространяется по покоящемуся газу с параметрами $p_0 = 0, \rho_*(x) = \rho_0 \exp x/a$ при $a > 0, b > 0$ имеет бесчисленное множество решений.

Пусть теперь $a < 0, b < 0$. Тогда при движении вдоль траекторий частиц газа в направлении $dt > 0$ имеем $ds < 0$ и, следовательно, h возрастает от 1 до ∞ .

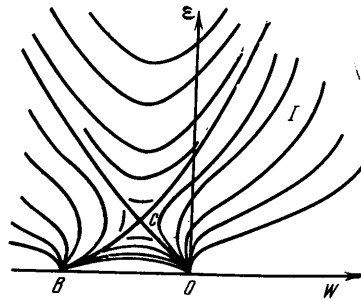
Все частицы газа (как и ударная волна) уходят в бесконечность за конечный промежуток времени, различный для разных частиц. Если t_* — момент встречи частицы $\tau = \tau_*$ с ударной волной (τ_* определяется из (2.7) при $h = 1$), то момент времени T_* ее ухода в бесконечность

$$T_* = T + t_* + Tt_*b^{-1}, \quad T = - \frac{b\gamma}{2(\gamma - 1)} \int_1^\infty \frac{h^{-1} - h^{-\gamma/(\gamma-1)}(\gamma - 1)/\gamma}{V(h)} dh$$

где T соответствует поршню ($\tau = 0$). Таким образом, задача о нахождении поршня, порождающего ударную волну (2.1), которая распространяется по покоящемуся газу с параметрами $p_0 = 0, \rho_* = \rho_0 \exp x/a$ при $a < 0, b < 0$ имеет единственное решение. Закон движения поршня дается равенствами (2.7) при $\tau = 0$ и при $1 \leq h < \infty$.

3. Будем искать решение системы (1.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \varphi^\beta(\tau) \varepsilon^{\gamma/(\gamma-1)}(s), \\ \rho &= \frac{\rho_0^2 h^2}{\gamma \rho_0 k^2} \varphi^{\beta-2}(\tau) \varepsilon^{1/(\gamma-1)}(s), \quad \varepsilon > 0 \\ u &= \frac{p_0 k}{\rho_0 h} \varphi(\tau) w(s), \quad \varphi(\tau) = \frac{\rho_0 h}{\rho_0 h - \tau} \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 1

Тогда можно показать, что уравнения (1.1) переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dw} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varepsilon \frac{w(1 + \beta) + \beta}{\beta\varepsilon + w(w + 1)}, \quad \frac{dv}{dw} = \frac{\varepsilon - (w + 1)^2}{\beta\varepsilon + w(w + 1)}, \quad dv = \frac{ds}{p_0 k} \\ dx &= \frac{p_0 k^2}{\rho_0 h} \varphi^{1-\beta}(\tau) \varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)}(s) \left[(\gamma\varepsilon + w + w^2) \frac{d\varphi}{\varphi} - w dv \right] \\ dt &= k\varphi^{-\beta}(\tau) \varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)}(s) \left[(w + 1) \frac{d\varphi}{\varphi} - dv \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поле интегральных кривых первого из уравнений (3.2) изображено на фиг. 1 для случая, когда $0 < \beta < \gamma / (\gamma - 1)$, который и рассматривается ниже. Каждой интегральной кривой соответствует некоторое течение газа.

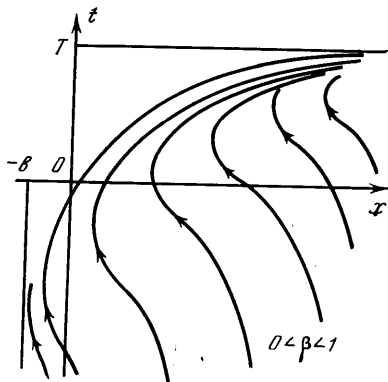
Рассмотрим кривые, проходящие через начало координат и расположенные выше кривой, проходящей через особые точки 0 и С (кривые типа 1). Для них имеем

$$w = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \varepsilon + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \tag{3.3}$$

$$w = C\varepsilon^{\gamma/(\gamma-1)(1+\beta)} [1 + O(\varepsilon^{-1/(2\gamma-1)})], \quad \varepsilon \rightarrow \infty$$

Рассматривая каждую кривую типа 1 как решение некоторой задачи Коши, положим в (3.2) $dt = 0$ и найдем, что при изменении x от 0 до ∞ давление меняется от ∞ до некоторого постоянного значения, отличного от нуля, плотность — от ∞ до 0, скорость — от некоторого положительного значения до $-\infty$. Вдоль траекторий частиц газа ($d\varphi = 0$) t возрастает до некоторого значения T , а x — до бесконечности (при $0 < \beta \leq 1$).

Докажем, что значение T одинаково для всех частиц газа, находящихся в момент $t = 0$ в области $0 < x < \infty$. Действительно, рассмотрим тождество



Фиг. 2

$$\beta \varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{dv}{d\varepsilon} - \frac{d}{d\varepsilon} [\varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)} (w + 1)] = 0$$

и проинтегрируем его вдоль какой-либо интегральной кривой типа 1 от некоторой точки $\varepsilon > 0$ до $\varepsilon = \infty$, используя (3.3)

$$\beta \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{dv}{d\varepsilon} d\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)} (w + 1) = 0 \tag{3.4}$$

Пусть теперь $\varepsilon = \varepsilon_*$ — значение ε для некоторой частицы при $t = 0$. Из (3.2) находим, что

$$T(\varepsilon_*) = -k\varphi^{-\beta}(\varepsilon_*) \int_{\varepsilon_*}^{\infty} \varepsilon^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{dv}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

Беря логарифмическую производную от обеих частей этого равенства, используя связь между φ и ε_* , полученную из (3.2) при $dt = 0$, и тождество (3.4), найдем, что $dT/d\varepsilon_* = 0$, т. е. $T = \text{const}$.

При $1 < \beta < \gamma / (\gamma - 1)$ полученный результат остается справедливым, но x стремится к конечному значению, которое, как нетрудно доказать, также одинаково для всех частиц газа.

При движении вдоль кривых типа 1 в направлении уменьшения ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) $t \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, причем $x \sim A|t|^{1/\gamma}$.

Для исследования формы кривой в плоскости xt , вдоль которой скорость газа равна нулю, положим в (3.2) $w = 0$, $dv = 0$. Интегрируя, найдем

$$x = a(T - t)^{(\beta-1)/\beta} - b, \quad \beta \neq 1 \tag{3.5}$$

$$x = -a_1 \ln(1 - t/T) - b_1, \quad \beta = 1$$

Можно показать, что здесь a и b , зависящие от β и γ , положительны при $0 < \beta < 1$ и отрицательны при $1 < \beta < \gamma / (\gamma - 1)$.

Из (3.5) следует, что при $0 < \beta < 1$ линия нулевой скорости имеет асимптоту $x = -b < 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Каждая «линия тока» (траектория каждой частицы газа) имеет единственную точку перегиба. Множество этих точек в плоскости xt образует линию, которой соответствует точка на интегральной кривой, где w принимает минимальное значение. Уравнение этой линии имеет вид (3.5), что нетрудно доказать, полагая в (3.2) $w = w_{\min} < 0$, $dv = 0$ и интегрируя полученные уравнения (a, b, a_1, b_1 будут, естественно, другими). Картина линий тока изображена на фиг. 2. При $0 < \beta \leq 1$ все частицы газа к моменту времени T уходят в бесконечность; при $1 < \beta < \gamma / (\gamma - 1)$ все они одновременно приходят в точку M .

4. Уравнения одномерного адиабатического течения идеального газа имеют следующее точное решение [4]:

$$u = \pm \mu [A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} x, \quad dt = \pm \mu^{-2} [A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} d\mu$$

$$p = \mu^{\nu} \left[C + \frac{\nu(\gamma-1)}{2} B\varphi(\mu x) \right], \quad \rho = \frac{\mu^{\nu-1}}{x} \varphi'(\mu x) \quad (4.1)$$

где u, p, ρ — скорость, давление и плотность газа, t — время, x — геометрическая координата, φ — произвольная функция, A, B, C — произвольные постоянные, $\nu = 1, 2, 3$.

Из (4.1) находим после вычислений, что ускорение частиц газа

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\gamma-1}{2} B\nu x \mu^{\nu(\gamma-1)+2}$$

Следовательно

$$w = \frac{1}{p} \frac{du}{dt} = -\frac{(\gamma-1)\nu B\mu^{2-\nu} x}{2C + \nu(\gamma-1)B\varphi(\mu x)} \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что в плоском случае, т. е. при $\nu = 1$, $w = w(\mu x)$, а из (4.1) видно, что $\mu x = \text{const}$ вдоль траекторий частиц газа. Предположим теперь, что рассматривается течение газа в трубе, ограниченного слева движущимся поршнем, масса которого на единицу площади сечения равна m . Тогда граничное условие на поршне (левое поршня — пустота) имеет вид

$$m \frac{dU}{dt} = -p \quad (4.3)$$

где $U(t)$ — скорость поршня. Сравнивая (4.2) и (4.3), приходим к выводу: движение, определяемое (4.1), в плоском случае обладает тем свойством, что в каждом сечении ($\mu x = \text{const}$) может быть помещен поршень, масса которого

$$m = \frac{\varphi(\mu x)}{\mu x} + \frac{2C}{(\gamma-1)B\mu x}$$

Уравнения одномерного, с плоской симметрией, адиабатического течения идеального газа допускают существование [5] таких функций $\tau(x, t)$, $\xi(x, t)$ и $\eta(x, t)$, что

$$d\tau = \rho dx - \rho u dt, \quad d\xi = \rho u dx - (p + \rho u^2) dt$$

$$d\eta = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dx - \rho u \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) dt, \quad \varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} \quad (4.4)$$

Из законов сохранения массы, импульса и энергии на ударной волне следует, что τ , ξ и η являются непрерывными при переходе через нее. Предположим, что перед движущейся вдоль оси x со скоростью $U_0(t)$ ударной волной находится покоящийся газ, давление которого постоянно и равно p_0 , а плотность равна $\rho_0(x)$. Тогда, используя условия на ударной волне, найдем, что

$$d\tau = \rho_0 U_0 dt, \quad d\xi = -\rho_0 dt, \quad d\eta = (\gamma - 1)^{-1} \rho_0 U_0 dt$$

Таким образом, вдоль ударных волн бесконечной интенсивности ($p_0 = 0$) функции ξ и η сохраняют постоянные значения, которые, очевидно, можно принять равным нулю. Что касается τ , то она постоянна для каждой частицы. Поэтому при рассмотрении течений газа в областях, ограниченных, с одной стороны твердой стенкой (поршень), а с другой — ударной волной, целесообразно в некоторых случаях в качестве независимых переменных вместо (x, t) , принимать (τ, ξ) или (τ, η) .

Рассмотрим теперь следующую задачу: пусть в области $x > 0$ находится покоящийся газ, давление которого p_0 и плотность $\rho_0(x)$. В момент $t = 0$ на поршень имеющий массу m и находящийся в сечении $x = 0$, начинает действовать внешняя сила $F(t)$ (m и F относятся к единице площади сечения). Тогда на поршне

$$m \frac{du}{dt} = -p + F(t), \quad \tau = 0 \quad (4.5)$$

Соотношение (4.5) можно проинтегрировать, используя (4.4)

$$u|_{\tau=0} = m^{-1}\xi + m^{-1}I(t), \quad I(t) = \int_0^t F(t) dt \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2}u^2|_{\tau=0} = m^{-1}\eta + m^{-1}A(t), \quad A(t) = \int_0^t F(t)u(t) dt$$

В предельном случае, когда производится удар по поршню, в результате которого поршень мгновенно приобретает скорость $u_0 > 0$, условия (4.6) принимают вид

$$u_{\tau=0} = m^{-1}\xi + u_0, \quad \frac{1}{2}u^2|_{\tau=0} = m^{-1}\eta + \frac{1}{2}u_0^2 \quad (4.7)$$

Рассматривая поставленную выше задачу, можно удовлетворить условию (4.7) по крайней мере в тех случаях, когда U является линейной функцией ξ . В этом случае имеем [6] следующее решение уравнений (2.2):

$$U = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} (\xi + h) \equiv \varphi(\tau) (\xi + h), \quad f(\tau) = \frac{\varphi' + \varphi^2}{2\varphi}, \quad u = U$$

$$V = \psi(\tau) (\xi + h)^2 + [C\psi(\tau)]^{(1-\gamma)/(\gamma+1)}, \quad p = V^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho = V^{1/(\gamma-1)} / (\gamma - 1)f(\tau) \quad (4.8)$$

Формулы (4.8) дают все решения уравнений одномерного адиабатического течения газа, для которых скорость u является линейной функцией ξ (ψ — произвольная функция, C, h — произвольные постоянные). Условия (4.7) будет выполнено, если

$$-\frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\psi'(0)}{\psi(0)} = m^{-1}, \quad m^{-1}h = u_0$$

Принимая за независимые переменные τ и η , можно преобразовать уравнения одномерного адиабатического течения газа к следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\gamma}{\gamma-1} (U+V) \frac{\partial V}{\partial \eta} - V \frac{\partial U}{\partial \eta} + V \frac{F'(\tau)}{F(\tau)} &= 0 \\ -2U \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \tau} + (U+V) \frac{\partial U}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

причем газодинамические величины выражаются через $U(\tau, \eta)$ и $V(\tau, \eta)$ равенствами

$$p = (\gamma - 1)F(\tau) V^{\gamma / (\gamma-1)}, \quad \rho = F(\tau) V^{1 / (\gamma-1)}, \quad u = \pm \sqrt{2U} \quad (4.10)$$

где $F(\tau)$ — произвольная функция.

Условие на поршне (второе из равенств (4.7)) наводит на мысль найти все решения (4.9), для которых функция $U(\tau, \eta)$ является линейной функцией переменной η . В этом случае, как нетрудно доказать, V также является линейной функцией η . Тогда система (4.9) сводится к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решая ее, найдем, что

$$\begin{aligned} U &= -C_1 \psi'^2(\tau) + \left[C_1 \int \psi'^2(\tau) d\tau + \eta \right] \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} \\ V &= \left[C_1 \int \psi'^2(\tau) d\tau + \eta \right] \frac{\psi''(\tau)}{\psi'(\tau)}, \\ F(\tau) &= C_2^{\gamma/(\gamma-1)} [\psi''(\tau)]^{-\gamma/(\gamma-1)} [\psi(\tau)]^{-1/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $\psi(\tau)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Условие (4.7) будет выполнено, если

$$\frac{\psi'(0)}{\psi(0)} = m^{-1}, \quad C_1 \left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} \int \psi'^2(\tau) d\tau - \psi'^2(\tau) \right] \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2} u_0^2$$

Оказывается, решения (4.8) и (4.11) дают в параметрическом виде решение (4.1) для случая $\nu = 1$. Докажем это для решения (4.11), для чего положим в (4.4) $dt = 0$ и найдем, используя (4.11), что

$$d\eta = (U+V) d\tau = \left[-C_1 \psi'^2(\tau) + \left(\frac{\psi'}{\psi} + \frac{\psi''}{\psi'} \right) \left(C_1 \int \psi'^2 d\tau + \eta \right) \right] d\tau$$

откуда после интегрирования

$$C_1 \int \psi'^2(\tau) d\tau + \eta = A \psi \psi' \quad (4.12)$$

Далее $dx = \rho^{-1} d\tau$, и, учитывая (4.10) — (4.12), получим

$$x = A (AC_2)^{-\gamma / (\gamma-1)} \psi'(\tau) + B$$

где A и B зависят лишь от времени t . Дифференцируя это равенство вдоль линий тока $\tau = \text{const}$, найдем, что $B = \text{const}$ и, следовательно, скорость газа является линейной функцией координаты x , так как из (4.11) имеем

$$u = \pm \sqrt{A - C_1} \psi'(\tau)$$

В работах [7-9] использовалось решение Л. И. Седова (4.1) и его параметрическое представление (4.8) для построения течений, содержащих ударные волны как конечной, так и бесконечной интенсивностей. Следовательно, построенные в них течения дают также точное решение задачи о движении поршня под действием давления газа после кратковременного удара.

Поступила 25 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1965.
2. Устинов М. Д. О течении идеального газа за ударной волной конечной амплитуды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
3. Устинов М. Д. Преобразование и некоторые решения уравнений движения идеального газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М., «Наука», 1968.
6. Устинов М. Д. О движении поршня под действием давления газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
7. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. Построение точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики и их приложения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
8. Шикин И. С. О точных решениях уравнений одномерной газодинамики с ударными и детонационными волнами. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1.
9. Устинов М. Д. Некоторые одномерные течения идеального газа, содержащие ударные волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.