

УДК 532.522

К ЗАДАЧЕ О СТРУЕ, НАТЕКАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

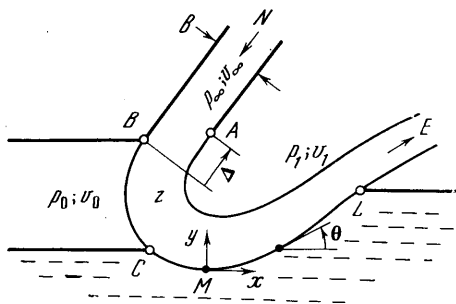
Д. С. ЦЕЛЬНИК

(Москва)

Статья — продолжение работы автора [1]. Рассматривается вопрос о неединственности угла входа тонкой струи в воду и совершенствуется математическая постановка задачи.

Схема течения изображена на фиг. 1: струя невязкой, несжимаемой, невесомой жидкости плотности ρ_1 натекает из сопла на поверхность неподвижной тяжелой жидкости плотности ρ_2 . Задача плоская.

1. Полученные ранее точные решения показывают, что для тонкой струи в общем случае остается неопределенным угол входа в воду [1, 2] и, кроме того, имеется неоднозначность картин течений, связанная с наличием «усложненных» форм участка контакта CL . Две такие формы изображены на фиг. 4 работы [1].



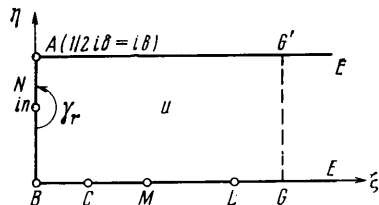
Фиг. 1

Отметим, что усложненная форма с бесконечной длиной участка контакта и $\theta(C) = 0$ должна при $\rho_2 \rightarrow \infty$ описывать натекание струи на жесткий экран; если же взять за исходное течение (фиг. 1) при $\theta(C) = 0$ и устремить ρ_2 к ∞ (и θ на CL к нулю), то для тонкой струи получим вырождение участка контакта в одну единственную точку C .

В дальнейшем рассмотрении усложненные формы обсуждаться не будут.

Для плоской задачи число свободных параметров в плоскости u (фиг. 2) таково, что позволяет удовлетворить в точности тому количеству условий, которое должно быть поставлено для течения (фиг. 1).

Неопределенность угла входа для тонкой струи формально возникает в связи с тем, что в уравнениях движения не используется параметр ρ_∞ . С физической точки зрения можно ожидать, что для достаточно тонкой струи идеальной жидкости, вытекающей из сопла и отклоняющейся затем под действием разности давлений $p_0 - p_1$, а также в результате встречи с препятствием CL (фиг. 1), асимптотика истечения в первом приближении не зависит от того, что происходит со струей после истечения на достаточном удалении от сопла.



Фиг. 2

Чтобы убедиться в этом, получим некоторые соотношения, справедливые асимптотически для течения (фиг. 1) при $b \rightarrow 0$.

Имеем (фиг. 2)

$$z(A) - z(B) = \int_{BNA} dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} dz$$

$$dz/du = v_1^{-1} e^{i\omega} dw/du, \quad \omega = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln v/v_1$$

На BA ($c > 0$)

$$\begin{aligned} \tau &\approx (2/\pi) \tau(c) \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{th}(\pi c/\delta) \operatorname{ctg}(\pi \eta/\delta)] + \\ &+ \sin(2\pi \eta/\delta) \int_c^i (\tau(\varepsilon)/\delta) [1 - \operatorname{th}^2(\pi \varepsilon/\delta)] d\varepsilon \end{aligned}$$

Исключая из рассмотрения случай $\tau(c) = 0$, получим ($\delta \rightarrow 0$)

$$\tau \approx \tau(c) [1 - (2\eta/\delta)], \quad \tau(N) \approx \tau(c) [1 - (2n/\delta)]$$

Далее

$$\begin{aligned} dz &\approx 2De^{2\eta\tau(c)/\delta} \frac{\sin(2\pi \eta/\delta) d\eta}{\cos(2\pi n/\delta) - \cos(2\pi \eta/\delta)} \\ (D &= (bv_\infty/\delta v_1) \exp^{-\tau(c)+i\theta(i\pi)}) \end{aligned}$$

Так как ($0 < n < \delta/2$)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} dz &= ibe^{i\theta(N)} \\ \int_0^{1/2\delta} e^{2\eta\tau(c)/\delta} \frac{\sin(2\pi \eta/\delta) d\eta}{\cos(2\pi n/\delta) - \cos(2\pi \eta/\delta)} &\approx \\ \approx (\delta/2\pi) \ln[(1 + \cos(2\pi n/\delta))/(1 - \cos(2\pi n/\delta))] & \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} z_B - z_A &\approx (2b/\pi) e^{i\theta(N)} \ln \operatorname{tg}(n\pi/\delta) - ibe^{i\theta(N)} \\ v_\infty &\approx v_0(v_1/v_0)^x \\ \chi &= (2/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \{\exp[\pi\Delta/2b]\} \end{aligned}$$

Если срез сопла прямой ($\Delta = 0$, $n \approx 1/4\delta$), то

$$v_\infty \approx (v_0 v_1)^{1/2}$$

Это важное соотношение было обнаружено Г. Ю. Степановым [3] при расчете натекания струи на жесткий экран как приближенное и существенно упрощающее решение задачи.

Модуль результирующей силы давления стенок сопла на струю при $b \rightarrow 0$ есть $p_1 \Delta$ если $\Delta > 0$, $p_0 |\Delta|$ если $\Delta < 0$. Сила эта направлена в сторону более короткой стенки.

Полученные выше соотношения дали возможность получить некоторые обобщения приближенной теории струйной завесы Г. Ю. Степанова ([3]) на случай непрямого среза сопла.

Асимптотика толких струй, приведенная выше, оказывается также полезной при рассмотрении задачи о соударении струй с образованием между ними зоны постоянного давления.

Как это было выяснено ранее [1], для тонкой струи течение по схеме фиг. 1 возможно лишь в том случае, если интенсивность ее $1/\nu$, где

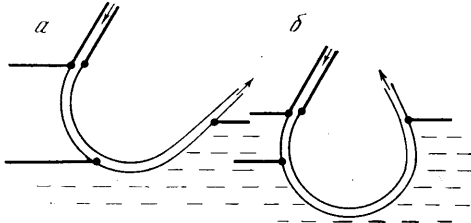
$$\nu = \rho_2 g / b \rho_1 v_\infty^2 \quad (\nu b^2 = (\rho_2 / \rho_1) \operatorname{Fr}^{-1})$$

превышает критическое значение

$$(1/\nu)_* = [(p_0 - p_1) / 2\rho_2 g]^2$$

Заметим что в записи ν здесь в отличие от [1] использована скорость v_∞ , а не v_1 ; асимптотически (при $b \rightarrow 0$) это несущественно.

Если $(1/\nu) > (1/\nu)_*$, то при одних и тех же величинах давлений p_0 , p_1 плотностей ρ_1 , ρ_2 , одном и том же угле установки сопла, форме его среза, ширине b и скорости v_∞ для тонкой струи возможно однопараметрическое семейство течений, причем за параметр может быть принят угол $\theta(C)$.



Фиг. 3

Пусть течения, изображенные на фиг. 3, a, b , из этого семейства. Очевидно им асимптотически (в приближении тонкой струи) должна соответствовать одна и та же величина давления p_∞ ; в плоской же постановке соответствующие

давления должны отличаться, чем и устраняется неопределенность угла входа. Заметим, что для достаточно тонких струй роль неучитываемых в настоящем анализе факторов может оказаться значительной.

Приведенные соображения следует рассматривать как наводящие.

2. Изучим плоскую линеаризованную задачу в неоднородной постановке

$$\theta = \theta(N) + \lambda A_1 \theta \quad (2.1)$$

Здесь A_1 — интегральный оператор с ядром fK

$$f(\varepsilon) = \frac{\text{sh}(2\pi\varepsilon/\delta)}{2 \text{sh}[\pi(\varepsilon - in)/\delta] \text{sh}[\pi(\varepsilon + in)/\delta]}$$

$$K = \ln \frac{\text{sh}[\pi(\xi + \varepsilon)/\delta]}{\text{sh}[\pi|\xi - \varepsilon|/\delta]}$$

$$\lambda = \frac{2b^2 v_\infty^3}{\pi \delta v_1^3 \nu}$$

промежутком интегрирования $[c, l]$.

Угол установки сопла считается фиксированным.

Характеристические числа λ_j оператора A_1 все вещественны. Докажем, что они положительны.

Ядро fK уравнения (2.1) симметризуем при помощи стандартного приема [4] к ядру

$$N = \{f(\xi)f(\varepsilon)\}^{1/2} K(\xi, \varepsilon)$$

и составим интегральную квадратичную форму Гильберта [4]

$$I = \int_c^l \int_c^l \gamma(t)\gamma(\varepsilon) \{f(t)f(\varepsilon)\}^{1/2} K(t, \varepsilon) dt d\varepsilon$$

Здесь $\gamma \in C[c, l]$.

Для $\theta \in L_2$, удовлетворяющих однородному уравнению (2.1), одновременно $\theta \in C[c, l]$.

Тем не менее, если предположить $\theta_{|c, l} \in H$, то

$$\theta'(\xi) |_{u=\xi \rightarrow c > 0} \approx -\lambda f(c) \theta(c) \ln |\xi - c|$$

при $\theta(c) \neq 0$ кривизна в точке c бесконечна и знаки θ и θ' совпадают!

Если $\xi \rightarrow l$, то

$$\theta' \approx \lambda f \theta \ln |\xi - l|$$

и при $\theta(l) \neq 0$ знаки θ и θ' различны; (ср. фиг. 4 из [5]).

Более подробно особенности течения в окрестности точек C, L не изучались; модель фиг. 1 не может использоваться для детального описания течения вблизи этих точек.

Продолжим $\gamma(\varepsilon)$ на $[-l, -c]$ нечетным, а $f(\varepsilon)$ — четным образом; на $[-c, +c]$ положим $\sqrt{f}\gamma \equiv 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$f_0(\varepsilon) = \int_l^\varepsilon \sqrt{f(\xi)} \gamma(\xi) d\xi \quad (-l \leq \varepsilon \leq l)$$

доопределенную на остальной части границы полосы $0 \leq \eta \leq b$ тождественным нулевым значением.

Пусть

$$F(u) = \frac{1}{\delta} \int_{-l}^{+l} f_0(\xi) \operatorname{cth} \frac{\pi(\xi - u)}{\delta} d\xi = \psi_0 + if_0$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_0(t)_{c < l \leq l} &= 1/\pi \int_c^l \gamma(\xi) \sqrt{f(\xi)} K(t, \xi) d\xi \\ I &= \pi \int_c^l \gamma(t) \sqrt{f(t)} \psi_0(t) dt = \pi \int_l^c \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \psi_0 dt \end{aligned}$$

Используя формулу Грина

$$\oint \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial n} |du| = \iint (\operatorname{grad} \psi_0)^2 d\xi d\eta$$

для контура $BGG'AB$ получим, устремляя GG' в бесконечность

$$\begin{aligned} I &= \pi \iint (\operatorname{grad} f_0)^2 d\xi d\eta \\ &(\xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq b) \end{aligned}$$

Если $\operatorname{grad} f_0 \equiv 0$, тогда $\gamma_{|cL} = 0$, поэтому $I > 0$ при $\gamma \neq 0$.

Одновременно заметим, что по крайней мере первое (наименьшее по модулю) характеристическое значение λ_1 ядра fK простое и соответствующая ему собственная функция θ неотрицательна ([6], гл. 5).

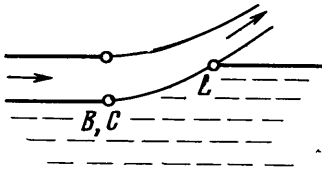
Поскольку для соответствующего (2.1) уравнения тонкой струи все характеристические числа простые, то и для достаточно тонких струй они будут также простыми.

Решение уравнения (2.1) существует и единственно при заданном $\theta(N) \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$). Непосредственные окрестности $0 < \lambda - \lambda_j < \epsilon_j$ точек λ_j из рассмотрения следует исключить.

При $\theta(N) = 0$ (см., например, фиг. 4)

$$\theta = \lambda_j A_j \theta \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

Пусть λ_j — характеристическое значение уравнения (2.2) и θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — соответствующая система линейно-независимых собственных функций. Тогда условия разрешимости при $\lambda = \lambda_j$ неоднородного уравнения (2.1)



Фиг. 4

$$\int_c^l f(\epsilon) \theta_k(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

По крайней мере если $\lambda = \lambda_1$, неоднородное уравнение (2.1) неразрешимо ($n = 1$, $\theta_1 \geq 0$, $f > 0$).

Так как линеаризованное граничное условие на участке контакта [1]

$$\tau'(\epsilon) = \pi \lambda f(\epsilon) \theta(\epsilon)$$

то выполнение хотя бы одного из условий разрешимости означало бы, что существует такая картина линеаризованного течения, когда одновременно

$$\theta(N) = 0, \quad p_0 = p_1, \quad \theta_{|CL} \neq 0$$

По крайней мере для тонкой струи это невозможно. В общем плоском случае и $\lambda \neq \lambda_1$ вопрос остается открытым.

Необходимо локализовать неусложненные формы на полуоси $\lambda > 0$.

Для тонких струй

$$\theta(\xi) = \theta(N) + \nu \int_c^l \theta(\epsilon) K^\circ(\xi, \epsilon) d\epsilon \quad (2.3)$$

$$K^\circ(\xi, \epsilon) = \begin{cases} \xi & (\epsilon > \xi) \\ \epsilon & (\epsilon < \xi) \end{cases}$$

Характеристические значения для (2.3) находятся как корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} [\sqrt{\nu_j}(l - c)] = \sqrt{\nu_j}c$$

Пусть

$$\alpha_j = \sqrt{\nu_j}(l - c)$$

Тогда

$$0 < \alpha_1 < 1/2\pi, \quad \pi < \alpha_2 < 3/2\pi, \dots$$

Две типичные картины течений для участка $(0, \alpha_1)$ схематично изображены на фиг. 5, а, б; фиг. 5, в-ж дают представление о картинах течений на (α_1, α_2) . Во всех случаях принято $\theta(N) = -45^\circ$; порядок буквенных индексов (фиг. 5) соответствует увеличению параметра ν . Для течений фиг. 5, а, ж давление $p_0 < p_1$; для фиг. 5, е давления p_0, p_1 равны; в остальных случаях (фиг. 5) $p_0 > p_1$.

Приемлемые $(\theta(L) > 0, \theta(C) \leq 0, \theta(N) < \theta(C))$ картины течений получаются на полуинтервалах $[1/2\pi \div \pi)$, $[5/2\pi \div 3\pi)$ и т. д. Однако при переходах через $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ формы участка контакта все более усложняются. По крайней мере для достаточно тонких струй ситуация должна быть аналогичной.

Если отыскивать течения на основе неоднородного уравнение (2.1), т. е. считать угол установки сопла фиксированным, то предварительно следует вычислить (первые) характеристические значения оператора A_1 . По крайней мере для достаточно тонких струй физически приемлемые решения будут получаться, если брать в (2.1) λ из некоторой внутренней части интервала (λ_1, λ_2) . Факт изменения характера картин течений при переходе через точки характеристического множества выходит за рамки конкретной задачи.

3. Однородная постановка линеаризованной задачи

$$\theta(\xi) = \lambda A_1 \theta - \lambda (A_1 \theta) |_{\xi=m} = \lambda A \theta \quad (3.1)$$

тесно связана с неоднородной.

Пусть при некотором $\lambda^\circ \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$ соответствующее θ° из (2.1) приемлемо. Тогда

$$\theta^\circ |_{\lambda=\lambda^\circ} (\xi = m^\circ) = 0, \quad m^\circ \in [c, l]$$

Случай, когда θ° ни в одной точке $[c, l]$ не обращается в нуль, для рассматриваемой задачи не интересны. Фиг 5, а указывает на необходимость изменения схемы течения. В принципе струя может затекать в зону постоянного давления, а также отдавать часть воздуха в эту зону вблизи поверхности воды и забирать такое же количество выше по течению — в той мере, которая определяется закономерностями течения вязкой струи.

Возвращаясь к выписанному выше соотношению, получим

$$\theta^\circ = \lambda^\circ A |_{m=m^\circ} \theta^\circ$$

Если, наоборот, $\lambda_* \neq \lambda_j$ есть характеристическое число оператора $A |_{m=m_* \in [c, l]}$ и θ_* — соответствующая собственная функция, то

$$\theta_*(m_*) = 0 \quad (A_1 \theta_*) |_{\xi=m_*} \neq 0$$

и (с точностью до постоянного множителя)

$$\theta_* = (I - \lambda_* A_1)^{-1} [1] \quad ([1] \equiv 1 \text{ на } [c, l]) \quad (3.2)$$

Последнее означает, что θ_* есть решение неоднородного уравнения (2.1) при $\lambda = \lambda_*$ и $\theta(N) = 1$.

Отметим, что примененный простой прием может быть полезен и при ином виде функционала в (3.1), а также и в более общих случаях.

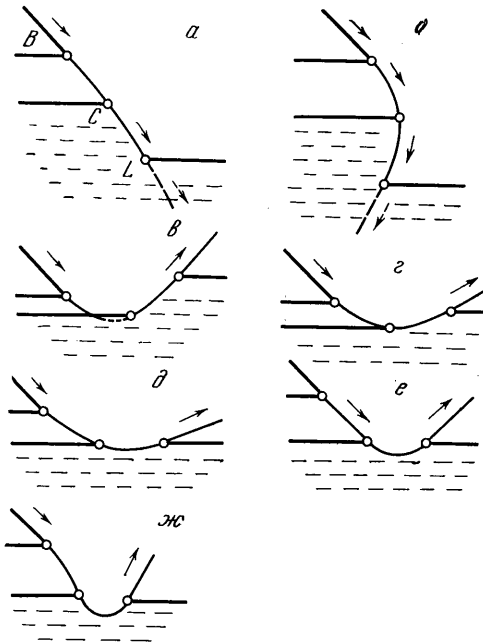
Если $\lambda_* = \lambda_j$, т. е. одновременно

$$\theta_a = \lambda_* A_1 \theta_a$$

$$\theta_b = \lambda_* A_1 \theta_b - \lambda_* (A_1 \theta_b) |_{\xi=m}$$

то, вводя новые неизвестные

$$\gamma_{a, b} = \theta_{a, b} \sqrt{f}$$



Фиг. 5

умножая уравнения скалярно на $\gamma_{b,a}$ соответственно и вычитая, получим

$$\int_c^l f(\xi) \theta_a(\xi) d\xi - \int_c^l \theta_b(\varepsilon) f(\varepsilon) K(m, \varepsilon) d\varepsilon = \alpha \beta = 0$$

Если $\beta = 0$, то $\theta(N) = 0$; однако такие случаи малоинтересны, поэтому соответствующее рассмотрение здесь не проводится.

О возможности $\alpha = 0$ см. п. 2.

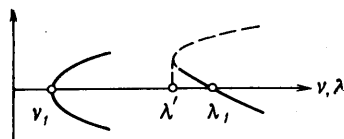
Остановимся на вопросе о точках бифуркации для уравнения

$$\theta(\xi) = \lambda \int_c^l \frac{\sin \theta(\varepsilon) f(\varepsilon) [K(\xi, \varepsilon) - K(m, \varepsilon)] d\varepsilon}{1 + 3\pi\lambda I(\varepsilon, l, \theta)} \quad (3.3)$$

$$I(\varepsilon, l, \theta) = \int_c^l f(\mu) \sin \theta(\mu) d\mu$$

которое описывает течение по фиг. 1 в однородной нелинейной постановке [1].

Точками бифуркации для этого уравнения могут быть (вещественные — см. [6], гл. IV, § 3) характеристические значения λ_* интегрального уравнения (3.1). Каждое характеристическое значение $\lambda_* \neq \lambda_j$ простое в смысле собственной кратности. Можно доказать, что каждое характеристическое значение интегрального уравнения, соответствующего для тонкой струи уравнению (3.1), простое в смысле алгебраической кратности, откуда следует, что для достаточно тонких струй любое λ_* простое в этом же смысле и, следовательно, является точкой бифуркации уравнения (3.3), причем как в сторону $\lambda > \lambda_*$, так и в сторону $\lambda < \lambda_*$ от λ_* отходит по одной ветви ненулевых решений, малых при $\lambda \approx \lambda_*$.



Фиг. 6

Следует обратить особое внимание на отличие в расположении ветвей решений в окрестности точки бифуркации для достаточно тонких струй и предельного случая тонкой струи, когда обе ветви решений идут от точки бифуркации вправо (что соответствует $\lambda > \lambda_*$).

Схематично это различие в поведении ветвей решений в окрестности точек бифуркации изображено на фиг. 6 (сплошные линии).

Покажем, ограничиваясь частным случаем симметричных форм контакта струи (фиг. 5, e) и первой точкой бифуркации, как такое различие получается математически.

Соответствующее нелинейное интегральное уравнение плоской задачи имеет вид (3.3), где

$$c = m = 0, \quad f \equiv 1, \quad \lambda = \rho_2 g / \pi \rho_1 v_0^2$$

Для получения такого уравнения область течения следует отобразить на полосу (а не полуполосу фиг. 2); участку контакта при этом соответствует промежуток $[-l, +l]$.

В приближении тонкой струи

$$\theta(\xi) = v \int_0^l \sin \theta(\varepsilon) K^0(\xi, \varepsilon) d\varepsilon$$

Для плоского случая в разложении ([⁶], стр. 218) будет фигурировать оператор

$$C(\theta, \lambda) = -3\pi\lambda^2 \int_0^l \theta(\varepsilon) K(\xi, \varepsilon) \left[\int_l^e \theta(\mu) d\mu \right] d\varepsilon$$

а для тонкой струи

$$C^\circ(\theta, \nu) = -\frac{\nu}{3!} \int_0^l \theta^3(\varepsilon) K^\circ(\xi, \varepsilon) d\varepsilon$$

Порядки малости этих операторов неодинаковы. Дальнейший анализ по методу [⁶] (стр. 218–220) немедленно приводит к отмеченному различию в поведении ветвей решений.

Одно из возможных объяснений — ветвь, идущая влево, на некотором расстоянии от точки бифуркации поворачивает и далее идет вправо (фиг. 6, пунктир). В рассматриваемом случае именно эта ветвь дает физически приемлемые решения (фиг. 5, *e*; см. также [¹], фиг. 5, *a–e*).

При этом решения нелинейного интегрального уравнения плоской задачи о симметричных формах контакта должны появляться, начиная с некоторого значения λ' параметра λ (или безразмерного параметра λb), меньшего бифуркационного $\lambda_1(\lambda_1 b)$. Затем, при $\lambda > \lambda'$ должно быть два решения — одно, вырождающееся при $\lambda = \lambda_1$ в тождественное нулевое (и при дальнейшем увеличении λ сверх λ_1 дающее течения по схеме фиг. 6 из [¹]), и другое — на повернувшей ветви. При бифуркационном значении параметра $\lambda = \lambda_1$ эта ветвь должна давать, вообще говоря, немалое ненулевое решение.

Не исключено, конечно, что поведение ветвей решений сложнее, чем предположено выше.

Рассмотрение подобных вопросов могло бы представить определенный интерес для задач о волнах, об устойчивости упругих систем и других.

Заметим в заключение, что формы участка контакта (фиг. 5, *e*; [¹], фиг. 5) повторяют известные эластики Эйлера.

Поступила 3 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Цельник Д. С. Нелинейная задача о тонкой струе, натекающей на поверхность тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
2. Mack L. R., Ben Chie Yen. Theoretical and experimental research on annular jets over land and over water. Symposium on Ground Effect Phenomena. Princeton Univ., 1959.
3. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке. М., Машгиз, 1963.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М., Физматгиз, 1958.
5. Цельник Д. С. Симметричные формы контакта струи с поверхностью тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
6. Виленкин Н. Я. и др. Функциональный анализ. М., «Наука», 1964.