

УДК 532.517.4

## О ПРИМЕНЕНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТЕОРИИ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н. И. АКАТНОВ

(Ленинград)

В статье упрощаются некоторые гипотезы, введенные в работе [1] при составлении замкнутой системы уравнений турбулентного пограничного слоя. С помощью системы уравнений [1] находится теоретическое решение задачи о струе в спутном потоке, причем предполагается, что структура турбулентности струи зависит только от местных условий. Эксперименты показывают, что турбулентность в такой струе зависит также и от предыстории течения. Найденное решение хорошо описывает распределение скорости в струе. На большом удалении от источника теоретические характеристики струи хорошо согласуются с экспериментальными характеристиками следа за телом. Рассматривается также задача о пограничном слое между двумя однородными потоками, текущими с разной скоростью.

1. В работе [1] для описания свободного турбулентного пограничного слоя применялась система уравнений, состоявшая из обычных уравнений пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

и энергетического уравнения турбулентного движения в виде

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle v' \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{3}{2} u'^2 \right) \right\rangle - W$$

$$b = \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle, \quad \tau_{xy} = -\rho \langle u'v' \rangle, \quad b = \frac{3}{2} \langle u'^2 \rangle \quad (1.2)$$

Здесь ось  $x$  декартовой системы координат направлена вдоль основного течения;  $u$  и  $v$  — проекции средней скорости на оси  $x$  и  $y$ ;  $u'$  и  $v'$  — проекции скорости пульсаций на те же оси;  $\tau_{xy}$  — касательное напряжение турбулентного трения;  $W$  — член, определяющий диссипацию турбулентности в тепло. Для замыкания системы уравнений (1.1) и (1.2) использовались гипотезы

$$\tau_{xy} = \rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}, \quad - \left\langle v' \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{3}{2} u'^2 \right) \right\rangle = \varepsilon \frac{\partial b}{\partial y}, \quad W = c \frac{\sqrt{b_m} b}{l} \quad (1.3)$$

Коэффициент турбулентной вязкости  $\varepsilon$  для плоского течения определялся следующим образом:

$$\varepsilon = a \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{b} dy \quad (1.4)$$

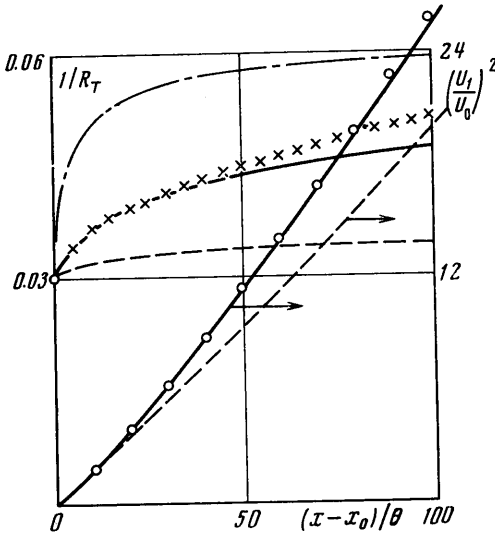
Здесь  $y_1$  и  $y_2$  — координаты точек, в которых соответственно  $u - u_2 = 0.9(u_1 - u_2)$  и  $0.1(u_1 - u_2)$ ;  $u_1$  и  $u_2$  — максимальная и минимальная скорости в данном сечении пограничного слоя;  $a$  — эмпирическая постоянная. Длина  $l$ , входящая в  $W$ , определялась для плоского течения как

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{b}{b_m}} dy \quad (1.5)$$

Здесь  $b_m$  — максимальное значение  $b$  в данном сечении пограничного слоя. Соответствующее выражение  $l$  предлагалось и для осесимметричного течения. Дальнейшие расчеты на основе уравнений (1.1)–(1.4) показали, что в качестве длины  $l$  вместо (1.5) удобнее брать толщину зоны турбулентных пульсаций. Так, можно принять

$$l = l' = y_3 - y_4 \quad (1.6)$$

где  $y_3$  и  $y_4$  — координаты  $y$  точек, в которых  $b/b_m = 0.05$ , в данном сечении пограничного слоя. В случае осесимметричного течения  $l'$  будет диа-



Фиг. 1

$(x - x_0) / \theta$  на фиг. 1 нанесены кружками. Здесь введено обозначение

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u_1} \left( \frac{u}{u_1} - 1 \right) dy \quad (2.1)$$

Заметим, что  $\theta$  в каждом частном случае — заданная величина, не зависящая от  $x$ . Путем обработки опытных данных в работе [2] вычислена величина

$$1/R_T = \varepsilon / \delta u_0 \quad (2.2)$$

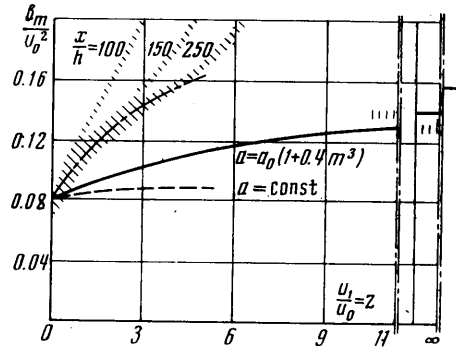
которая в зависимости от  $(x - x_0) / \theta$  показана крестиками на фиг. 1. В цитируемой работе приведен график величины  $\langle u'^2 \rangle / u_0^2$ , измеренной на оси струи, в зависимости от  $z = u_1 / u_0$ . Отношение  $\langle u'^2 \rangle / b_m$  на оси струи [3] и следа [4] практически одинаково, что позволяет найти  $b_m / u_0^2$  в функции

	Пограничный слой затопленной струи		Пограничный слой струи высокой температуры	Плоская затопленная струя	Осесимметричная струя	След за телом, струя в спутном потоке ( $x \rightarrow \infty$ )
	[9]	[10]	[11]	[3]	[12, 13]	[2, 4]
$a$	0.081	0.104	0.1	0.095	0.084	0.14
$c$	2.1	1.82	2.1	2.1	1.80	2.1
$c'$	2.42	2.12	—	2.6	2.35	2.6

от  $z$ . Распределение пересчитанных опытных данных  $b_m / u_0^2$  в зависимости от  $z$  располагается на фиг. 2 в пределах области, заштрихованной косой штриховкой. Фиг. 2 показывает, что опытные значения  $b_m / u_0^2$  зависят не только от  $z$ , но и от  $x / h$ , где  $h$  — высота щели источника струи. Вместе с тем видно, что распределения опытных данных  $b_m / u_0^2$  для разных  $x / h$  имеют общую часть. Авторы работы [2] проводят через эту общую часть осредняющую кривую, показанную на фиг. 2 штрихпунктиром, и считают, что значения  $b_m / u_0^2$ , располагающиеся на этой кривой, зависят только от  $z$ .

Заметим, что система уравнений (1.1), (1.2) при  $u_0 \ll u_1$  может быть линеаризована и имеет в этом случае одинаковый вид как для струи в

спутном потоке, так и для следа за цилиндром. Если, кроме того, пульсационное движение в дальнем следе и в струе на большом удалении от источника определяется только местными условиями, и, следовательно, справедливы гипотезы (1.3) — (1.5), то основные характеристики двух этих течений при одинаковых  $z \gg 1$  должны быть одинаковы и разница будет заключаться только в знаке  $u_0$ . На фиг. 2 нанесены опытные значения  $b_m / u_0^2$  в следе за цилиндром диаметром  $d$  [4] при  $z=12$  ( $x/d = 160$ ) и при  $z=22$  ( $x/d > 500$ ). Эти данные распола-



Фиг. 2

гаются в пределах прямоугольников, заштрихованных прямой штриховкой. Данные работы [2] не позволяют сказать что-либо определенное о характеристиках струи при  $z \gg 10$ . Но, судя по тому что  $b_m / u_0^2$  в струе имеет тенденцию расти с ростом  $z$  и  $x/h$ , можно думать, что величина  $b_m / u_0^2$ , в струе будет больше, чем в следе при одинаковых  $z > 10$ . Эта разница объясняется тем, что, как уже упоминалось выше, турбулентность в струе в спутном потоке зависит не только от местных условий, но также и от предыстории развития течения, т. е. от  $x/h$  (см. фиг. 2).

Рассмотрим теперь решение задачи с помощью уравнений (1.1) — (1.5). Для отыскания поля скоростей используем интегральные соотношения, вытекающие из (1.1), которые использовались в работе [2], а именно: условие сохранения избыточного импульса (2.1) и уравнение кинетической энергии

$$\frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} u(u^2 - u_1^2) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2.3)$$

Для нахождения поля величины  $b$  используем проинтегрированное уравнение (1.2) в виде

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} ub dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{xy}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy - \frac{c\sqrt{b_m}}{l} \int_{-\infty}^{\infty} b dy \quad (2.4)$$

Продольную проекцию скорости зададим в виде

$$u = u_1 + u_0 f(\eta) \quad (2.5)$$

Здесь  $\eta = y / \delta$ . Эксперименты многих авторов говорят о том, что  $f(\eta)$  имеет универсальный вид при всех значениях  $z$ , начиная от  $z = 0$  для затопленной струи и до самых больших  $z$ , измеренных в следе (фиг. 1). Распределения  $b / b_m = \varphi(\eta)$  для затопленной струи [3] и для следа [4], как видно из фиг. 3, несколько отличаются (темные кружочки и крестики — струя, белые кружочки — след). Напряжение трения  $\tau_{xy}$  выразим с помощью (1.3), коэффициент  $\varepsilon$  найдем по (1.4), а именно

$$\varepsilon = a \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{b} dy = au_0 \delta \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{b}}{u_0} d\eta = aa_{\varphi 1} \delta u_0 \quad (2.6)$$

Обозначив

$$D = \delta / \theta, \quad X = x / \theta, \quad t = \sqrt{b_m} / u_0$$

подставим (2.5) в (2.1) и получим

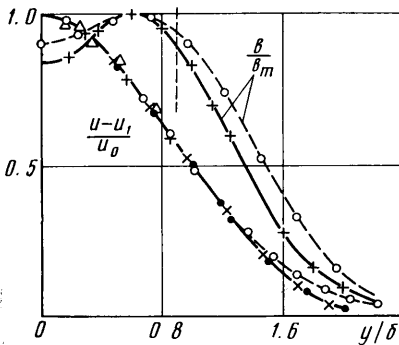
$$D = \frac{z^2}{I_1 z + I_2} \quad \left( I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f^n d\eta \right) \quad (2.7)$$

Согласно [2]  $I_1 = 2.025$ ,  $I_2 = 1.467$ . Далее подставим (1.3), (2.5), (2.6) в (2.3) и, исключая из получившегося уравнения  $D$ , с помощью (2.7) окончательно получим

$$A(z) z \frac{dz}{dX} = 2I' aa_{\varphi 1} t \quad (2.8)$$

$$\left( A(z) = \frac{I_2 I_3 + 2I_1 I_3 z + I_1 I_2 z^2}{I_2^2 + 2I_1 I_2 z + I_1^2 z^2}, \quad I' = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \right)$$

причем согласно [2]  $I' = 1.091$ ,  $I_3 = 1.197$ . Подставляя в (2.4)  $b / b_m = \varphi(\eta)$ , (1.3), (1.5), (2.5), (2.6) и переходя от производной по  $X$  к производной по  $z$  с помощью (2.8), окончательно получим следующее дифференциальное уравнение:



Фиг. 3

$$\frac{dw}{dz} + \left[ \frac{c \Phi_4 A(z)}{2I' aa_{\varphi 1}} \left( \frac{I_1 z + I_2}{\Phi_1 z + \Phi_2} \right) - 1 \right] \frac{w}{z} = \frac{A}{2z} \quad (2.9)$$

Здесь

$$w = t^2 \left( \frac{\Phi_1 z + \Phi_2}{I_1 z + I_2} \right), \quad \Phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\eta$$

$$\Phi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f d\eta, \quad \Phi_3^{-1} = \frac{l}{\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\varphi} d\eta,$$

$$\Phi_4 = \Phi_1 \Phi_3$$

Кривые  $b / b_m = \varphi(\eta)$  для затопленной струи и следа несколько отличаются (фиг. 3), поэтому величины  $\Phi_i$  и  $a_{\varphi 1}$  были вычислены для этих двух крайних случаев, а затем составлены интерполяционные формулы в виде

$$a_{\varphi 1} = 1.07 + 0.1m, \quad \Phi_1 = 2.68 + 0.28m \quad \left( m = \frac{z}{1+z} \right) \quad (2.10)$$

$$\Phi_2 = 1.74 + 0.1m, \quad \Phi_3^{-1} = 3.24 + 0.20m$$

При  $z = 0$  получим значения искомых функций для струи, а при  $z = \infty$  — для следа. Численное интегрирование (2.9) при граничном условии  $t(0)^2 = 0.082$  (затопленная струя) позволяет найти  $t(z)$ , а затем после подстановки  $t(z)$  в (2.8) — и  $z(X)$ . Результаты интегрирования уравнений (2.8), (2.9) при значениях эмпирических постоянных  $a = 0.1$  и  $c = 2.1$ , что соответствует затопленной струе, показаны на фиг. 1 и 2 пунктирными линиями. Видно, что теоретические значения  $t^2$ ,  $1/R_T$  и  $z^2$  идут значительно ниже экспериментальных. Зависимость  $z^2$  от  $(x - x_0)/\theta$ , найденная с помощью соотношения, предложенного Г. Н. Абрамовичем [5]

$$\frac{d\delta}{dx} = k \frac{u_m - u_1}{u_m + u_1} = k \frac{u_0}{2u_1 + u_0}$$

при  $k = 0.11$ , что соответствует плоской затопленной струе, в точности совпадает с кривой, показанной на фиг. 1 пунктирной линией. Заметим также, что экспериментальная постоянная  $k$  в случае плоского следа, как следует из сопоставления расчетных кривых с экспериментальными данными [6], равна  $k = 0.26 \div 0.28$ , т. е. выше, чем в струях, более чем в два раза.

Можно констатировать, что изменения, происходящие в турбулентности струи с ростом  $z$ , не исчерпываются лишь изменениями характерной скорости пульсаций  $\sqrt{b}$  и характерных длин, но происходят также значительные изменения в структуре турбулентности. Таунсенд [7] связывает увеличение  $1/R_T$  в следе с увеличением доли больших вихрей в турбулентности следа по сравнению с другими струйными течениями. Рост размеров вихрей в следе Таунсенд приписывает уменьшению влияния средней поперечной скорости в следе на вихри. На основе этой гипотезы в работе [2] получено соотношение, позволяющее найти изменение  $1/R_T$  в зависимости от  $(x - x_0)/\theta$ . График этой зависимости на фиг. 1 изображен штрихпунктиром и идет значительно выше экспериментальной кривой.

Рост доли больших вихрей в струе в спутном потоке и в следе можно объяснить и иначе. Представим себе, что в струе существует только диссипация энергии  $\sim \rho(b_m \sqrt{b_m}/l)l$ , а порождение турбулентности отсутствует. Обозначим через  $x_b$  расстояние от некоторого сечения, где энергия турбулентности равна  $\rho l b_m$ , до сечения, где эта энергия полностью исчезнет вследствие диссипации. Тогда можно записать

$$u_m \frac{\rho l b_m}{x_b} \sim \rho \frac{b_m \sqrt{b_m}}{l} l$$

откуда

$$x_b/l \sim u_m / \sqrt{b_m} = u_0 / \sqrt{b_m} (1 + z)$$

Величина  $x_b$  может служить оценкой длины пути, проходимого некоторой группой вихрей вдоль оси  $x$  до их полного исчезновения. В затопленных струях

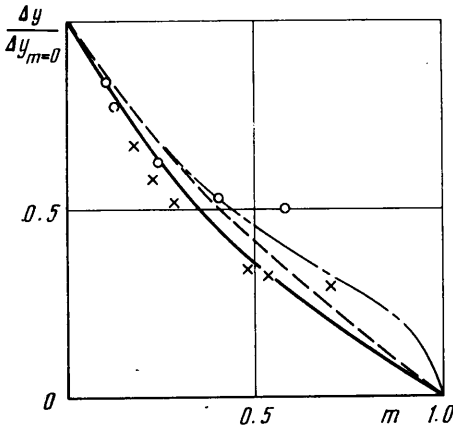
$$x_b/l \sim u_m / \sqrt{b_m} \cong 3$$

В следе (фиг. 2)  $u_0 / \sqrt{b_m} \cong 3$ , но с ростом  $z$  отношение  $x_b/l$  неограниченно увеличивается. Так как продолжительность жизни крупных вихрей больше мелких, турбулентность следа будет обогащаться крупными вихрями. Но тем не менее основную роль в турбулентности следа, по-видимому, играют местные условия, поскольку отношение  $b_m/u_0^2$  при всех  $z > 10$  почти не изменяется, т. е. течение очень близко к автомодельному. Увеличение же относительной продолжительности жизни вихрей в струе в спут-

ном потоке с ростом  $z$  приводит к тому, что турбулентность в струе определяется не только местными условиями, но и предысторией течения.

Можно построить идеализированную модель струи в спутном потоке, в котором турбулентность определяется только местными условиями и характеристики которой при  $z \rightarrow \infty$  совпадают с характеристиками следа. Для этого коэффициент  $a$  в (1.3) нужно считать функцией  $z$ , которая при  $z=0$  равна  $a_0=0.1$ , что соответствует затопленной струе, а при  $z \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к некоторому постоянному значению, характеризующему структуру следа. Подходящую зависимость  $a$  от  $z$  дает формула

$$a = a_0(1 + 0.4m^3) \quad (m = z / (1 + z)) \quad (2.11)$$



Фиг. 4

зависимости (2.11) показаны на фиг. 1 и 2 сплошными линиями. Наибольшее расхождение с опытными данными для струи имеет кривая  $b_m/u_0^2$  от  $z$ . Этот результат является следствием обусловленной выше идеализации течения. Значительно меньше расхождение кривой  $1/R_T$  с экспериментальной (фиг. 1). Минимальной оказывается разница между теоретическим и экспериментальным распределением  $z^2$  от  $(x-x_0)/\theta$  для струи. С другой стороны, теоретические значения величины  $b_m/u_0^2$  располагаются очень близко к опытным данным для следа [4] при  $x/d=160$  и  $x/d > 500$  (фиг. 2); теоретическое значение  $1/R_T$  при  $z = \infty$  равно 0.065, а экспериментальное значение этой величины в следе при  $z > 20$  равно 0.067.

3. Можно думать, что зависимость (2.11) описывает также и изменения в структуре пограничного слоя на границе между двумя однородными потоками, текущими параллельно со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ , поскольку в данном случае

$$m = \frac{z}{1+z} = \frac{u_1}{u_1+u_0} = \frac{u_1}{u_2}$$

Численное решение задачи о пограничном слое между двумя однородными потоками при различных  $m$  на основе уравнений (1.1) – (1.5) и при  $a=0.084$  и  $c=2.1$  было найдено А. П. Кузнецовым<sup>1</sup>. В этом решении дифференциальное уравнение для профиля средней скорости является уравнением, полученным Гертлером [8] и решение которого хорошо известно. Изменение условной толщины пограничного слоя  $\delta_1$  описывается уравнением вида

$$\frac{d\delta_1}{dx} = a \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\sqrt{b}}{u_2} d\zeta \quad (3.1)$$

<sup>1</sup> Кузнецов А. П. Струйные турбулентные течения проводящей жидкости и газа в продольном магнитном поле. Дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. н., Ленингр. политехн. ин-т, 1971.

Здесь  $\xi = y / \delta_1$ . Вследствие уменьшения  $(u_2 - u_1) / u_2$  с ростом  $m$  уменьшается порождение энергии турбулентности, убывает отношение  $b_m / u_2^2$  и соответственно уменьшается  $d\delta_1 / dx$ . На фиг. 4, взятой из [5], штриховой линией показано теоретическое изменение условной толщины пограничного слоя в некотором его сечении в зависимости от  $m$  по отношению к его толщине при  $m = 0$ . Сплошной линией на фиг. 4 показано изменение той же величины по формуле Г. Н. Абрамовича [5]. На фиг. 4 кружками обозначены экспериментальные данные О. В. Яковлевского, а крестиками — Б. А. Жесткова. Штрихпунктиром нанесено изменение относительной толщины пограничного слоя, рассчитанное так же, как в работе А. П. Кузнецова, но с использованием соотношения (2.11), в котором  $a_0 = 0.084$ ,  $c = 2.1$ . Видно, что при  $m < 0.4$  все теоретические кривые дают близкие результаты. При  $m > 0.4$  учет роста  $a$  с  $m$  дает лучшее согласование теории с экспериментом.

Поступила 29 VI 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акатнов Н. И., Кузнецов А. П. Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного турбулентного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
2. Bradbury L. T. S., Riley J. The spread of a turbulent plane jet issuing into a parallel moving airstream. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 2, pp. 381—394.
3. Bradbury L. T. S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 1, pp. 31—64.
4. Townsend A. A. Measurements in the turbulent wake of a cylinder. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1947, vol. 190, No. 1023, pp. 551—561.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
7. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Gortler H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. ZAMM, 1942, Bd 22, Nr 5.
9. Liepmann H. W., Lanfer J. Investigation of free turbulent mixing. Tech. Notes NASA, 1947, No. 1257.
10. Wignanski I., Fiedler H. E. The two-dimensional mixing region. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 2, pp. 327—361.
11. Безменов В. Я., Борисов В. С. Турбулентная струя воздуха, нагретого до 4000° К. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
12. Corrsin S. Investigation of flow in an axially symmetrical heated jet of air. MACA Wartime. Rept W-94, December 1943.
13. Wignanski J., Fiedler H. Some measurements in the self-preserving jet. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3, pp. 577—618.