

УДК 532.517

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЯХ

В. Р. КУЗНЕЦОВ, В. А. ФРОСТ

(Москва)

В турбулентном потоке значения скорости, а при смешении концентрации и температуры суть величины случайные, поэтому при осреднении различных зависимостей необходимы соответствующие распределения вероятностей. Особенно остро такая необходимость проявляется при анализе процессов воспламенения, стабилизации и распространения пламени в турбулентном потоке. В этих процессах смешение и химическая кинетика должны рассматриваться совместно, а так как скорость химической реакции нелинейно зависит от температуры и концентраций, то для решения задачи необходимо знать распределения вероятностей температур и концентраций.

Естественно пытаться получить и решить соответствующие уравнения для вероятностей [1-3]. Вывод таких соотношений на основе уравнений движения, диффузии и теплопроводности возможен [1, 2], но для получения замкнутого описания необходимы некоторые предположения. С другой стороны (что и сделано в данной работе), можно получить необходимое уравнение, исходя из некоторых феноменологических соображений [3-6]. Из этого уравнения следует, что в области, где отсутствует перемежаемость, вероятность концентрации распределена по нормальному закону. Для края турбулентного потока полученное уравнение позволяет вычислить интенсивность пульсаций концентрации во вполне турбулентной жидкости.

1. Предположим, что для описания скорости движения жидкого элемента и изменения концентрации пассивной примеси в этом элементе можно использовать уравнения Ланжевена

$$\frac{du_i}{dt} = -\alpha(u_i - \langle u_i \rangle) + f_i \quad (1.1)$$

$$\frac{dc}{dt} = -\beta(c - \langle c \rangle) \quad (1.2)$$

Здесь u_i ($i = 1, 2, 3$) — скорость, c — концентрация, f_i — случайная сила, действующая на элемент со стороны потока, t — время.

В уравнении (1.1) опущены средние силы давления и вязкости, так как предполагается, что изменение скорости в развитом турбулентном потоке происходит из-за действия случайных гидродинамических сил f_i . Уравнение (1.2) описывает процесс выравнивания пульсаций концентрации в турбулентном потоке, т. е. процессы смешения до молекулярного уровня. Скорости этих процессов характеризуются величинами α и β .

Строго говоря, параметры α и β должны быть неотрицательными случайными функциями. Однако такое рассмотрение сильно усложняет задачу. В связи с этим в дальнейшем предполагается, что в тех областях потока, где отсутствует перемежаемость, т. е. там, где в точке наблюдения нельзя встретить фиксированную концентрацию с отличной от нуля вероятностью, пульсации величин α и β отсутствуют.

Такой подход использовался при замыкании уравнений для моментов поля скорости, для описания турбулентной диффузии и турбулентного горения и позволил получить интересные результаты [4-7].

При некоррелированном во времени случайном воздействии f_i трудно получить соответствующее системе (1.1), (1.2) уравнение

А. Н. Колмогорова для совместной плотности вероятностей скорости жидкого элемента, его положения в пространстве и концентрации. В том случае, когда перемежаемость отсутствует, оно имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} [\alpha (u_i - \langle u_i \rangle) p] + \\ + \varepsilon \frac{\partial^2 p}{\partial u_i^2} + \frac{\partial}{\partial c} [\beta (c - \langle c \rangle) p] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $p(\mathbf{u}, c, \mathbf{x}, t | \mathbf{v}, s, \mathbf{y})$ — плотность вероятности скорости, положения и концентрации при условии, что в начальный момент времени $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $c = s$; x_i — координата, $\varepsilon = \langle f_i^2 \rangle$.

Решение этого уравнения дает лагранжево описание процесса. Чтобы получить распределение в фиксированной точке, т. е. эйлерово описание, в случае несжимаемой жидкости достаточно проинтегрировать соотношение (1.3) по всевозможным значениям $\mathbf{v}, \mathbf{y}, s$. В силу связи между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками [8] и независимости коэффициентов уравнения (1.3) от $\mathbf{v}, \mathbf{y}, s$ уравнение (1.3) будет также описывать изменение функции $p(\mathbf{u}, c | \mathbf{x}, t)$.

Одним из преимуществ введения совместной плотности вероятности скорости и концентрации является возможность точного учета конвективного переноса. При попытках получить уравнение только для вероятности концентрации необходимы те или иные гипотезы, позволяющие выразить интеграл от величины $(u_i p)$ по пространству скоростей через плотность вероятности концентрации $p(c | \mathbf{x}, t)$. Если соотношение

$$\int (u_i - \langle u_i \rangle) p(\mathbf{u}, c, \mathbf{x}, t) d^3 u = -d \frac{\partial p(c | \mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \quad (1.4)$$

рассматривать как определение коэффициента турбулентной диффузии d , то в результате интегрирования (1.3) по всем \mathbf{u} получается уравнение для плотности вероятности концентрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial c} [\beta (c - \langle c \rangle) p] \quad (1.5)$$

Несколько другим способом аналогичные уравнения получены в [2, 3].

2. В центральной части турбулентного потока перемежаемость отсутствует. Как свидетельствуют эксперименты [9], в этой области наиболее сильно по сечению изменяется средняя концентрация, а интенсивность пульсаций концентраций почти постоянна или же имеет слабо выраженный максимум, расположенный там, где поток вещества в поперечном направлении максимален. Это обстоятельство позволяет построить приближенное решение уравнения (1.5) при следующих предположениях: 1) диффузионный перенос вдоль направления потока пренебрежимо мал, 2) течение стационарно и автомодельно, 3) среднеквадратичная концентрация и высшие центральные моменты постоянны по сечению. В силу этих предположений решение уравнения (1.5) можно искать в виде

$$p = f(\psi) / \sigma \quad (\psi = (c - \langle c \rangle) / \sigma, \quad \sigma = \sqrt{\langle (c - \langle c \rangle)^2 \rangle})$$

Используя уравнение турбулентной диффузии, которое получается из (1.5) умножением на c и интегрированием по c , приводим соотношение (1.5) к виду

$$-\langle u_i \rangle \frac{d\sigma}{dx_i} \frac{d\psi f}{d\psi} \sigma^{-2} = d \left(\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \right)^2 \frac{d^2 f}{d\psi^2} \sigma^{-3} + \beta \sigma^{-1} \frac{d\psi f}{d\psi}$$

Здесь индекс 1 относится к направлению потока. Автомодельное решение существует при выполнении следующего соотношения:

$$\langle u_1 \rangle \sigma d\sigma / dx_1 + \beta \sigma^2 = bd(\partial \langle c \rangle / \partial x_1)^2$$

Здесь b — некоторая постоянная.

Уравнение для плотности вероятности принимает вид

$$f'' + b(\psi f)' = 0$$

Отсюда получаем

$$f = \sqrt{b / (2\pi)} \exp(-b\psi^2 / 2)$$

т. е. вероятность концентрации распределена по нормальному закону. Из условия нормировки

$$\int (c - \langle c \rangle)^2 p dc = \sigma^2$$

постоянная $b = 1$. Полученный результат подтверждается данными, приведенными в работе [10].

3. Известно, что при смешении в турбулентных струях и следах у края потока наблюдается перемежаемость, т. е. в фиксированной точке в течении конечных интервалов времени отсутствует вещество, вносимое в поток струей. Рассматриваемое явление вызывается хаотическим колебанием границ струи, вне которых пассивная примесь отсутствует. Ту часть потока, в которой наблюдается вещество, вносимое струей, будем называть слоем смешения. Термин «вполне турбулентная жидкость», который встречается в литературе, тоже обозначает слой смешения и применяется в том случае, когда в окружающем струю пространстве течение потенциально.

В рассматриваемом случае уравнение (1.5) следует несколько видоизменить. Для этого предположим, что соотношение (1.2) описывает выравнивание концентрационных неоднородностей только в слое смешения, т. е. имеет вид

$$dc / dt = -\beta(c - \langle c \rangle_c)$$

Здесь $\langle c \rangle_c$ — средняя концентрация в слое смешения.

Вне слоя смешения концентрация постоянна, т. е. $dc / dt = 0$. Таким образом, предполагается, что в каждой точке β есть случайная величина, которая может принимать два значения: $\beta = 0$, если рассматриваемая точка находится вне колеблющихся границ, и $\beta = \beta_1 > 0$, если эта точка находится внутри границ.

Описанным выше методом получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial c} [\beta(c - \langle c \rangle_c) p_c] \quad (3.1)$$

Здесь p_c — плотность вероятности концентрации в слое смешения, γ — коэффициент перемежаемости, т. е. вероятность наблюдения слоя смешения.

Связь между функциями p и p_c имеет вид

$$p = \gamma p_c + (1 - \gamma) \delta(c) \quad (3.2)$$

Здесь $\delta(c)$ — дельта-функция Дирака.

Поскольку концентрация в слое смешения не может быть отрицательной, то функция p_c должна иметь вид

$$p_c = \theta(c) F \quad (3.3)$$

Здесь $\theta = 0$ при $c < 0$, $\theta = 1$ при $c > 0$, F — произвольная гладкая функция.

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1) и приравнивая члены с δ -функцией и без нее, получаем

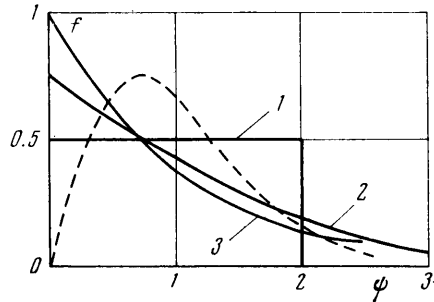
$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) + \beta \langle c \rangle_c F(0, \mathbf{x}, t) \gamma \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \frac{2d}{\gamma} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial c} [\beta (c - \langle c \rangle_c) F] - \beta \langle c \rangle_c F(0, \mathbf{x}, t) F \end{aligned} \quad (3.5)$$

В этих уравнениях члены, пропорциональные $F(0, \mathbf{x}, t)$, описывают захват вещества из спутного потока, который приводит к расширению струи и уменьшению концентрации в слое смешения.

Из уравнения (3.5) умножением на c и интегрированием по c получаем уравнение диффузии в слое смешения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c \rangle_c}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle c \rangle_c}{\partial x_i} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial \langle c \rangle_c}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \frac{2d}{\gamma} \frac{\partial \langle c \rangle_c}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} - \\ &- \beta \langle c \rangle_c F(0, \mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$



Фиг. 1

В стационарном случае будем искать величину F в виде

$$F = f(\psi) / \langle c \rangle_c \quad (\psi = c / \langle c \rangle_c) \quad (3.7)$$

Предполагается, что функция f явным образом от координат не зависит. Такое представление решения подразумевает установление равновесия между процессами захвата свежих порций жидкости из спутного потока и смешением до молекулярного уровня.

Подставляя (3.7) в (3.5) и учитывая (3.4) и (3.6), получаем

$$\begin{aligned} f(0) (\psi f)' + [f(0) - 1]f - (\psi - 1)f' &= Q(\psi^2 f'' + 4\psi f' + 2f) \\ (Q = d(\partial \langle c \rangle_c / \partial x_i)^2 \beta^{-1} \langle c \rangle_c^{-2}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

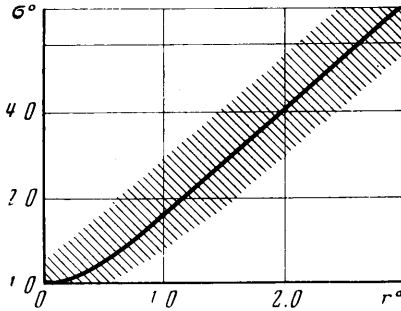
Следует отметить, что наличие в уравнении (3.8) параметра Q , который может зависеть от координат, противоречит сделанному выше предположению (3.7). Однако из экспериментальных данных [9] следует, что в области, где существенна перемежаемость, средняя по слою смешения концентрация изменяется слабо, и можно приближенно положить $Q = 0$. Если $Q = 0$, то при $\psi = \psi_m = (1 - f(0))^{-1}$ уравнение (3.8) имеет особую точку, через которую проходит бесконечное множество решений. Используя для отбора условие $f \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow \infty$, получаем: $f = 0$ при $\psi > \psi_m$. При $\psi < \psi_m$ решение имеет вид

$$f = f(0) \{1 - [1 - f(0)]\psi\}^{-[1-2f(0)] / [1-f(0)]} \quad (3.9)$$

При $f(0) = 1$ имеем $f = \exp(-\psi)$.

Если сделать предположение об ограниченности моментов всех порядков, то получаем $f(0) \leq 1$, а из условия ограниченности плотности вероятности имеем $f(0) \geq 1/2$. На фиг. 1 построены полученные решения: $1 - f(0) = 0,5$, $2 - 0,7$ $3 - 1$. Там же пунктирной линией изображено решение, полученное в [2]. Распределения, найденные выше, дают значения интенсивностей пульсаций концентрации $\sigma_c / \langle c \rangle_c$, изменяющиеся от 1 при $f(0) = 1$ до 0,573 при $f(0) = 1/2$. Здесь σ_c — среднеквадратичная концентрация в слое смешения. Для сравнения укажем значение, полученное в [2]:

$$\sigma_c / \langle c \rangle_c = 0,555.$$



Фиг. 2

Согласно экспериментальным данным [9] на краю затопленной осесимметричной струи в области перемежающегося течения величина $\sigma_c / \langle c \rangle_c$ меняется немонотонно от 0,5 до 0,82.

Вообще говоря, из семейства распределений (3.9) для струи можно выбрать одно единственное, если воспользоваться следующими соображениями. Заметим, что соотношение (3.5) можно рассматривать как уравнение, описывающее случайное «блуждание» отдельных объемов жидкости (молей), внутри которых наблюдаются пульсации концентрации. Эти пульсации плавно затухают в процессе движения.

Пусть в начальном сечении потока ($x_1 = 0$) задано распределение вероятностей. Форма уравнения (3.5) такова (это определяется членом $\partial / \partial x_i (d\partial F / \partial x_i)$), что в любой точке потока через конечный интервал времени будут наблюдаться (быть может с малой вероятностью) моли, которые в начальный момент находились в сечении $x_1 = 0$. Поскольку пульсации концентрации затухают с конечной скоростью, а время движения может быть как угодно мало, то максимально возможная концентрация (скажем, $c = c_m$) будет везде одинакова.

Заметим далее, что автомодельное решение вида (3.7) должно быть справедливо при $x_1 \rightarrow \infty$ и, следовательно, при $\langle c \rangle_c \rightarrow 0$. Отсюда видно, что максимально возможное значение переменной ψ равно $\psi_m = c_m / \langle c \rangle_c$ и $\psi_m \rightarrow \infty$ при $x_1 \rightarrow \infty$. Таким образом, решение уравнения (3.8) должно быть отлично от нуля при всех $\psi > 0$. В противном случае максимальное значение концентрации $c_m \sim \langle c \rangle_c$ и не постоянно. Нетрудно видеть, что указанным свойством обладает только решение, которое реализуется при $f(0) = 1$ и приводит к значению $\sigma / \langle c \rangle_c = 1$.

Эти рассуждения до некоторой степени подтверждаются экспериментальными данными работы [11], где приведены результаты измерений пульсаций концентрации в слугных струях одинаковой скорости. Если в рассматриваемом случае предположить, что величина $\langle c \rangle_c$ по сечению не меняется, то имеем

$$\gamma = \langle c \rangle / \langle c \rangle_c = \langle c \rangle / \langle c(x_1, 0, 0) \rangle = c^\circ$$

Здесь предполагается, что значение коэффициента перемежаемости на оси равно единице. Далее, используя полученное выше равенство $\sigma_c / \langle c \rangle_c = 1$, находим

$$\sigma^2 = \gamma^2 / \langle c \rangle_c^2 + \gamma \sigma_c^2 - \langle c \rangle^2 = \gamma(2 - \gamma) / \langle c \rangle_c^2$$

Отсюда получаем

$$\sigma^{\circ} = \sigma^2 / \langle c \rangle^2 = (2 - c^{\circ}) / c^{\circ} \quad (3.10)$$

На фиг. 2 в виде сплошной линии приведены результаты расчетов по формуле (3.10). По оси абсцисс отложена величина r° — отношение расстояния до оси к полуширине струи. В расчете использованы экспериментально найденные в [11] значения c° . Заштрихованная область соответствует разбросу опытных данных, полученных на различных расстояниях от сопла (3–6 калибров) и при разных скоростях потока (40–50 м/сек). Из графика видно, что расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются между собой.

4. Полученные выше результаты не зависят от скорости смещения до молекулярных масштабов, и поэтому на их основе не удается определить априорно введенную характеристику β . Из физических соображений ясно, что изменение скорости смещения до молекулярного уровня, т. е. величины β , должно изменять скорость захвата вещества от окружающей среды. При этом должно изменяться распределение коэффициента перемежаемости.

На примере смещения пассивной примеси в условиях однородной турбулентности рассмотрим особенности уравнения (3.4), описывающего распределение коэффициента перемежаемости. Анализ, приведенный ниже, позволяет установить качественную связь между скоростью смещения до молекулярных масштабов, распределением коэффициента перемежаемости и геометрическими характеристиками.

В рассматриваемом случае коэффициент турбулентной диффузии можно считать постоянным. Тогда из (3.4) имеем

$$\partial \gamma / \partial t = d \Delta \gamma + \beta \langle c \rangle_c F(0, \mathbf{x}, t) \gamma \quad (4.1)$$

Будем рассматривать случаи, когда распределение параметров характеризуется сферической или цилиндрической симметрией или симметрией относительно плоскости. Будем искать автомодельное решение в виде

$$\gamma = \gamma_0(t) \bar{\gamma}(\eta) \quad (\eta = \sqrt{x_j^2 / td}, \quad j = 1, \dots, \nu)$$

Здесь $\nu = 3$ в случае сферической симметрии, $\nu = 2$ в случае цилиндрической симметрии, $\nu = 1$ в случае симметрии относительно плоскости.

Из (4.1) имеем

$$\eta^{1-\nu} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{\nu-1} \frac{d\bar{\gamma}}{d\eta} \right) + \frac{1}{2} \eta \frac{d\bar{\gamma}}{d\eta} + (n - \kappa) \bar{\gamma} = 0 \quad (4.2)$$

$$(\kappa = \gamma_0' t / \gamma, \quad n = \beta t \langle c \rangle_c F(0, \mathbf{x}, t))$$

В дальнейшем для проведения качественных оценок будем предполагать, что величина n не зависит от η . Очевидно, что $n \geq 0$. Из определения постоянной κ следует что $\gamma_0 \sim t^{\kappa}$, и поскольку $\gamma \leq 1$, то $\kappa \leq 0$.

Заметим далее, что ограниченное неотрицательное решение уравнения (4.2) существует лишь при

$$2n - 2\kappa = \nu$$

Для доказательства этого достаточно соотношение (4.2) умножить на $\eta^{\nu-1}$ и проинтегрировать по всевозможным значениям η . Из формулы (4.2) видно, что увеличение параметра n , т. е. скорости смещения до молекулярного уровня, приводит к увеличению κ и, следовательно, к все бо-

лее и более медленному убыванию коэффициента перемежаемости на оси или плоскости симметрии. Поскольку $\kappa \leq 0$, то из (4.3) следует, что существует предельное значение величины n , и скорость захвата невозмущенной жидкости не может быть слишком высока. В предельном случае величина $\kappa = 0$ и в центральной части слоя смешения невозмущенная жидкость отсутствует ($\gamma = 1$).

С другой стороны, из (4.3) вытекает, что при одном и том же значении n увеличение ν приводит к уменьшению κ . Отсюда следует, что предельная скорость захвата невозмущенной жидкости будет максимальна в сферически симметричном случае и минимальна в случае симметрии относительно плоскости.

Авторы благодарят Г. И. Баренблатта за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 29 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. Уравнения для конечномерных распределений вероятностей поля турбулентности. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 5.
2. Кузнецов В. Р. Распределение вероятностей концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
3. Фрост В. А. Математическая модель турбулентного горения. Труды третьего Всесоюзного совещания по теории горения, М., Изд-во АН СССР, 1960, т. 1, стр. 121.
4. Новиков Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентности. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6.
5. Chung P. P. A symplified statistical model of turbulent chemically reacted shear flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 10.
6. Chung P. M. Chemical reaction in a turbulent flow field. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 5.
7. Онуфриев А. Т. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентного переноса. ПМТФ, 1970, № 2.
8. Новиков Е. А. Связь лагранжевого и эйлера описания турбулентности. ПММ, 1969, вып. 5.
9. Becker H. A., Hottel H. C., Williams G. C., The nozzle-fluid concentration field of the round turbulent free jet. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 2.
10. Кузнецов В. Р. Распределение вероятностей концентрации пассивной примеси в затопленной осесимметричной струе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
11. Becker H. A., Rosenzweig R. E., Gwozdz J. R. Turbulent dispersion in a pipe flow. American Inst. Chem. Engng., 1966, vol. 12, No. 5.