

УДК 532.517

О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Исследуется нелинейное развитие во времени двумерных возмущений течения в плоском канале. Применяется разложение в ряд Фурье по координате, отсчитываемой вдоль оси канала, и конечные разности по другой пространственной координате. Задача о развитии возмущений сводится к задаче с начальными данными для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе численного интегрирования этой системы исследован характер развития возмущений различной формы при разных значениях начальной амплитуды.

Будем рассматривать гидродинамические возмущения плоскопараллельного течения Пуазейля, которые являются периодическими по продольной координате. Линеинная теория позволила установить [1], что существуют критические значения числа Рейнольдса Re_k и волнового числа α_k , при которых бесконечно малые возмущения этого типа начинают возрастать. Условие $Re > Re_k$ представляет собой достаточное условие неустойчивости течения Пуазейля, однако оно не является необходимым. В экспериментальных работах (например, [2, 3]) установлено, что в той или иной форме неустойчивость может наступать уже при числе Рейнольдса Re_n , которое существенно меньше ($Re_k = 5780$, $Re_n = 1000$). Заметное влияние на неустойчивость оказывает величина характерной амплитуды возмущений на входе в канал. Это указывает на возможность проявления нелинейных эффектов в процессе потери устойчивости.

В настоящее время вопрос о роли нелинейных возмущений рассматриваемого вида недостаточно исследован. Первый метод исследования нелинейной неустойчивости плоскопараллельного течения предложен в [4], а конкретные расчеты проведены в [5, 6]. В этих работах установлена принципиальная возможность существования нелинейной неустойчивости в докритической области по крайней мере при малых отклонениях от Re_k . В работе [7] дается расчет предельных режимов, которые могут существовать при $Re < Re_k$. Как отмечается в обзоре [8], применение специального метода разложения по малому параметру приводит к выводу, что нелинейные возмущения в докритической области должны затухать. Некоторые численные результаты получены в [9]. На основе анализа проведенных расчетов отмечается, что заметного нарастания возмущений с конечной амплитудой при $Re < Re_k$ не обнаружено.

1. Постановка задачи и частные решения. Двумерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается следующими уравнениями для функции тока $\psi(x, y, t)$ и вихря $\omega(x, y, t)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

Здесь t — время, x, y — продольная и поперечная координаты. В случае течения в плоском канале должны выполняться условия прилипания

$$\psi = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0 \quad (y = \pm 1) \quad (1.2)$$

В качестве характерных величин в (1.1) и (1.2) взяты максимальная скорость жидкости и полуширина канала. Основное стационарное течение соответствует решению

$$\Psi = y - 1/3y^3, \quad p_x = -2/\text{Re}, \quad q = 1/3 \quad (1.3)$$

где p_x — градиент давления, q — расход.

Введем переменную $\xi = \alpha(x - ct)$, где α, c — положительные константы. Представим периодическое по ξ решение уравнений (1.1) в виде

$$\psi = \Psi + \varphi_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k e^{-ik\xi} + \varphi_k^* e^{ik\xi}] \quad (1.4)$$

$$(\varphi_k = \varphi_{kr}(y, t) + i\varphi_{ki}(y, t))$$

Здесь звездочки — комплексно-сопряженные величины. Подставим разложение (1.4) в систему (1.1) и приравняем нулю выражения при различных степенях $e^{i\xi}$ в результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial\varphi_0 / \partial t &= \text{Re}^{-1}\varphi_0'' + 1/2i\alpha F_0 + \alpha B y \\ \partial\omega_k / \partial t - \text{Re}^{-1}(\omega_k'' - \alpha_k^2\omega_k) - i\alpha_k[(u - c)\omega_k - u''\varphi_k] &= 1/2i\alpha F_k \quad (1.5) \\ \varphi_k'' - \alpha_k^2\varphi_k &= \omega_k \quad (u = U + u_1 = \Psi' + \partial\varphi_0 / \partial y) \\ \alpha_k &= k\alpha, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ограничимся в дальнейшем первыми тремя членами разложения (1.4). Если в (1.4) положить $\varphi_k = 0, k \geq 3$, то правые части F_k будут иметь вид

$$\begin{aligned} F_0 &= \text{Im}(\varphi_1^*\varphi_1 + 2\varphi_2^*\varphi_2) \\ F_1 &= \varphi_1^*\omega_2' + 2\varphi_1^*\omega_2 - \varphi_2'\omega_1^* - 2\varphi_2\omega_1^* \\ F_2 &= \varphi_1'\varphi_1'' - \varphi_1\varphi_1''' \end{aligned}$$

Штрихи здесь обозначают производные по y . В первом уравнении (1.5) проведено двукратное интегрирование по y и использовано условие антисимметричности φ_0 . Система уравнений (1.5) и граничные условия (1.2) позволяют рассмотреть два типа возмущений, которые отличаются характером симметрии относительно $y = 0$. Ограничимся рассмотрением антисимметричного возмущения φ_1 , которое наиболее неустойчиво согласно линейной теории. Тогда граничные условия можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}' &= 0, \quad \varphi_{2k-1}''' = 0, \quad \varphi_{2k} = 0, \quad \varphi_{2k}'' = 0 \quad (y = 0) \quad (1.6) \\ \varphi_k &= 0, \quad \varphi_k' = 0 \quad (y = -1), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Легко доказать, что безразмерные выражения для среднего градиента давления p_x и расхода жидкости q будут иметь вид

$$p_x = (-2 + B)/\text{Re}, \quad q = 1/3 + 2[\varphi_0(0, t) - \varphi_0(-1, t)]$$

Сравнивая эти выражения с (1.3), видим, что величину $B(t)$ в первом уравнении (1.5) можно выбрать двояко. Если принять условие, что сохраняется постоянный расход, то $B(t)$ следует подобрать так, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_0'(-1, t) = 0, \quad \varphi_0(-1, t) = 0, \quad \varphi_0(0, t) = 0 \quad (1.7)$$

Если предположить, что в потоке сохраняется постоянный средний градиент давления, то надо положить $B = 0$ и граничные условия для φ_0 будут иметь вид

$$\varphi_0'(-1, t) = 0, \quad \varphi_0(0, t) = 0 \quad (1.8)$$

Рассмотрим некоторые частные решения системы (1.5), которые можно получить разложением от линейного решения. Введем действительную величину $A(t)$ соотношением

$$dA/dt = \sigma A + b_3 A^3 + b_5 A^5 + \dots$$

и представим решение (1.5) в виде разложений

$$\begin{aligned} \varphi_k &= A^k (\varphi_{k0} + A^2 \varphi_{k2} + \dots) \\ \varphi_0 &= A^2 (\varphi_{00} + A^2 \varphi_{02} + \dots) \\ c &= c_0 + A^2 c_2 + \dots, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.5) и приравнявая нулю выражения при степенях A , получим для φ_{kl} , ω_{kl} и φ_{00} уравнения

$$\begin{aligned} (\alpha \operatorname{Re})^{-1} (\omega_{kl}'' - \alpha_k^2 \omega_{kl}) + ik [(U - c_0 + \sigma m \alpha^{-1} i) \omega_{kl} - U'' \omega_{kl}] &= \Phi_{kl} \\ \varphi_{kl}'' - \alpha_k^2 \varphi_{kl} &= \omega_{kl} \quad (m = l + 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(\alpha \operatorname{Re})^{-1} \varphi_{00}'' - 2\sigma \alpha^{-1} \varphi_{00} = 1/4 i (\varphi_{10} \varphi_{10}^{*'} - \varphi_{10}^* \varphi_{10}') - B y$$

с однородными граничными условиями (1.6), (1.7) или (1.8).

Правые части Φ_{kl} выражаются через функции φ_{kl} с меньшими номерами, поэтому систему (1.10) можно решать последовательно. В первом приближении $\Phi_{10} = 0$, и для φ_{10} получается краевая задача Орра — Зоммерфельда, из которой определяем φ_{10} с точностью до числового множителя и собственное число $c_0 - \sigma i / \alpha$. Если $\sigma \neq 0$, то все операторы в (1.10) различны, и краевые задачи разрешимы при произвольных b_k , c_k для всех φ_{kl} . Положим $b_k = 0$, $c_k = 0$. Тогда $A = A_0 \exp(\sigma t)$, где амплитуда A_0 произвольная, но достаточно малая, чтобы ряды по A сходились. Получаем таким образом первое частное решение. Развитие по времени этого решения определяется линейным приближением. В устойчивой области $\operatorname{Re} < \operatorname{Re}_k$ оно затухает, в неустойчивой области нарастает. Если в некоторый момент $\exp(\sigma t) \ll 1$, то решение близко к линейному. С увеличением t будет возрастать роль более высоких гармоник в разложении (1.4), поэтому это частное возмущение вызовет быстрое разрушение исходного ламинарного течения.

Так как имеется произвол в выборе b_k , c_k , то можно построить и другие частные решения. Если $\sigma = 0$, то краевые задачи для φ_{kl} не разрешимы при произвольных b_k , c_k . Действительно, для коэффициентов φ_{kl} разложения φ_1 получаем краевые задачи, в каждой из которых соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Поэтому краевые задачи будут разрешимы, если правые части удовлетворяют

условию ортогональности

$$\int_{-1}^0 \Phi_{1l} g dy = 0 \quad (1.11)$$

где g есть ортогонально сопряженная к Φ_{10} функция, удовлетворяющая таким же граничным условиям. Условие (1.11) может быть выполнено, если выбрать соответствующим образом b_k, c_k . В частности, при $l = 1$ получаем

$$i\alpha \left(c_2 - i \frac{b_3}{\alpha} \right) = \left(\int_{-1}^0 \Phi_{10}^{\circ} g dy \right) \left(\int_{-1}^0 \omega_{10} g dy \right)^{-1} \quad (1.12)$$

$$\Phi_{10}^{\circ} = \varphi_{00}' \omega_{10} - \varphi_{00}'' \varphi_{10} + 1/2 \varphi_{10}^* \omega_{20}' + \varphi_{10}^* \omega_{20} - 1/2 \varphi_{20} \omega_{10}^* - \varphi_{20} \omega_{10}^{*'}$$

Хотя при $Re \neq Re_k$ выполнение (1.11) не является необходимым условием, можно и при произвольном Re рассматривать частное решение, для которого коэффициенты b_k, c_k определяются из (1.11). Это второе частное решение было предложено в [4], а конкретные расчеты по формулам, подобным (1.12), проведены в [5] и [6]. Так как согласно расчетам $b_3 > 0$ при Re_k, α_k , то в докритической области имеется предельный режим, для которого $dA/dt = 0, A = A_k$. В окрестности α_k в закритической области это частное решение не дает предельного режима. Если $A(0) < A_k$, то при $Re < Re_k$ это частное решение затухает; оно может возрастать, если $A(0) > A_k$. При $Re = Re_k$ имеем $A_k = 0$. В окрестности Re_k предельные режимы удобно получить разложением по $\varepsilon = [(Re_k - Re)/Re_k]^{1/2}$. Примем для φ, c, Re разложения

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varepsilon^k a^k (\varphi_{k0} + \varepsilon^2 \varphi_{k2} + \dots) \quad (k = 1, 2, \dots) \\ \varphi_0 &= \varepsilon^2 a^2 (\varphi_{00} + \varepsilon^2 \varphi_{02} + \dots) \\ c &= c_0 - \varepsilon^2 c_2 - \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.5) и приравнивая нулю выражения при разных степенях ε , получим уравнения для коэффициентов разложений. Из условия (1.11) разрешимости задачи для φ_{02} получаем уравнения для a^2, c_2

$$a^2 = (I_1 - c_2 I_2) / I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 [(U - c_0) \omega_{10} - U'' \varphi_{10}] g dy, \quad I_2 = \int_{-1}^0 \omega_{10} g dy$$

$$I_3 = \int_{-1}^0 (\varphi_{00}' \omega_{10} - \varphi_{00}''' \varphi_{10} + 1/2 \varphi_{10}^* \omega_{20}' + \varphi_{10}^* \omega_{20} - 1/2 \varphi_{20}' \omega_{10}^* - \varphi_{20} \omega_{10}^{*'}) dy$$

В работах [5, 7] расчеты выполнены при условии постоянства расхода и получено соответственно $ra = 0.044, ra = 0.035$, где $\rho = |\varphi_{10}(0)|$. При условии постоянства давления в [6] получено $ra = 0.044$. Так как $|\varphi_{10}|$ имеет максимум при $y = 0$, то максимальное значение амплитуды первой гармоники возмущения для предельного режима будет $\varphi_{1 \max} = \varepsilon a \rho$. При $Re = 5000$ предельный режим имеет следующие характеристики: $\varphi_{1 \max} = 0.016, u_1(0) = 0.024$ при $p_x = \text{const}, u_1(0) = 0.0077$ при $q = \text{const}$. Соответствующие значения при $Re = 4000$ (если допустить, что разложение (1.13) сохраняет силу) будут 0.024, -0.055, 0.018. На фиг. 1 показана средняя скорость возмущения $u = [2\alpha Re_k \varepsilon^2 a^2 \rho^2]^{-1} u_1$ в случае $p_x = \text{const}$ (1)

и $q = \text{const}$ (2). Во втором случае кривая смещена вниз на $\Delta u = -0.005$. Действительная и мнимая части собственной функции линейной задачи в критической точке даны на фиг. 2 (линии 1 и 2).

Вывод о возможности докритической неустойчивости в [4] основан на анализе второго частного решения. Неустойчивость возмущения этой конкретной формы должна проявляться при малых начальных амплитудах $A(0) = \varepsilon \rho = 0.016$ для $\text{Re} = 5000$ и $A(0) = 0.024$ для $\text{Re} = 4000$. Цель численных расчетов заключается в том, чтобы проследить поведение начальных возмущений достаточно произвольной формы и выяснить, в какой связи оно находится с рассмотренными частными решениями.

2. Развитие возмущений во времени.

Начальное возмущение определяется заданием функций $\varphi_k(0, y)$ в момент времени $t = 0$. Естественно предположить, что в начальный момент возбуждена только первая гармоника $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_k = 0$, $k \neq 1$. В частном случае $\varphi_1(0, y)$ можно взять в соответствии с линейной теорией, задав некоторую начальную амплитуду $A(0)$. Тогда уравнения (1.5) вместе с граничными условиями позволяют рассчитать каким-либо численным методом развитие такого возмущения в последующие моменты времени. Таким образом можно установить, затухает или возрастает начальное возмущение, и тем самым показать, насколько сильным является рассматриваемый механизм неустойчивости.

Выразим φ_k через ω_k , чтобы понизить порядок производных по y в системе (1.5). Обращая оператор $\varphi_k'' - \alpha_k^2 \varphi_k$, получим

$$\varphi_k = \frac{1}{2\alpha_k} \left(e^{\alpha_k y} \int_0^y e^{-\alpha_k y} \omega_k dy - e^{-\alpha_k y} \int_0^y e^{\alpha_k y} \omega_k dy \right) = L_k(\omega_k) \quad (2.1)$$

Применяя теперь оператор L_k к уравнениям (1.5) при $k = 1, 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} \partial \varphi_k / \partial t = & \text{Re}^{-1} (\varphi_k'' - \alpha_k^2 \varphi_k) + i\alpha_k [(u - c)\varphi_k - 2L_1(u'\varphi_k)] + \\ & + i\alpha_k [\alpha_k^2 L(\Phi_k) + L_1(G_k) + R_k] + D_k e^{\alpha_k y} + B_k e^{-\alpha_k y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

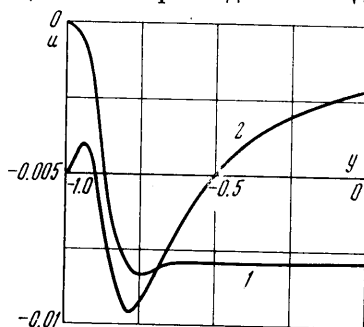
Здесь оператор L совпадает с L_1 , если заменить знак перед вторым членом, и

$$\begin{aligned} G_1 &= \varphi_1^* \varphi_2' - \frac{3}{2} \varphi_1^* \varphi_2, & G_2 &= \frac{1}{2} \varphi_1'^2 \\ \Phi_1 &= -\frac{5}{2} \varphi_1^* \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi_1^* \varphi_2', & \Phi_2 &= -\frac{1}{4} \varphi_1' \varphi_1 \\ R_1 &= \varphi_1^* \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi_1^* \varphi_2', & R_2 &= -\frac{1}{2} \varphi_1' \varphi_1 \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (1.6), положим

$$D_k = \beta_k B_k, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -1$$

Величина B_k подбирается так, чтобы $\varphi_k' = 0$ при $y = -1$. Функция φ_c определяется из первого уравнения (1.5) с граничными условиями (1.7) или (1.8). Так как функции $\varphi_k(t, y)$ сильно изменяются только вблизи стенки $y = -1$, то можно сделать их более гладкими с помощью замены $y = y(s)$,



Фиг. 1

при которой растягивается окрестность точки $y = -1$. Решение системы из трех уравнений (2.2) и (1.5) для φ_0 , φ_1 , φ_2 проводилось численным методом. Введем $n + 1$ расчетных точек s_n на отрезке $-1 \leq s \leq 0$ и пусть $\varphi_k(t, s_n) = \varphi_{k,n}$. Тогда исходная система, записанная в расчетных точках, принимает вид

$$d\varphi_{k,n}/dt = F_{k,n} \quad (2.3)$$

В правых частях производные по y заменяются конечно-разностными выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_{k,n}' &= (\varphi_{k,n+1} - \varphi_{k,n-1}) / 2\Delta s \\ \varphi_{k,n}'' &= (\varphi_{k,n+1} - 2\varphi_{k,n} + \varphi_{k,n-1}) / (\Delta s)^2 \end{aligned}$$

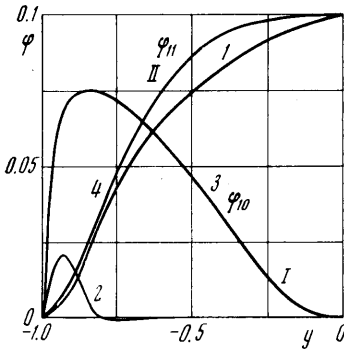
Система (2.3) представляет собой теперь систему $5n$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Она интегрировалась методом Рунге — Кутты с максимальным шагом, обеспечивающим достаточную точность, и $n = 25$.

Фазовую скорость $c = c_r$ в уравнениях (1.5) можно задавать, вообще говоря, произвольно; наиболее естественно определить ее по линейной теории.

Решение линейной задачи для φ_1 и $c = c_r + ic_i$ проводилось независимо от решения нелинейных уравнений при каждом исследованном наборе Re , α . Применялась разностная схема [10] с центральными разностями повышенной точности.

В момент времени $t = 0$ задавались коэффициенты первой гармоники $A\varphi_{1r}(y)$, $A\varphi_{1i}(y)$. Возбуждение второй гармоники φ_2 , стационарной части решения φ_0 происходит автоматически вследствие нелинейности уравнений (2.3). Рассмотрим два основных варианта:

- 1) $\varphi_{1r} \neq 0$, $\varphi_{1i} = 0$;
- 2) $\varphi_{1r} = 0$, $\varphi_{1i} \neq 0$.



Фиг. 2

Функции φ_{1r} , φ_{1i} показаны на фиг. 2 (линии 3 и 4). Начальная амплитуда A менялась так, что максимальное отношение возмущения скорости к значению скорости основного течения (1.3) на оси $y = 0$ охватывало интервал примерно от 0.01 до 0.1. Результаты удобно представить, если наряду с амплитудной функцией ввести фазу $\theta(t)$ соотношением

$$\varphi_1 = \varphi_1^\circ(y, t) e^{-i\theta} A(t) \quad (\varphi_1^\circ(0, t) = 1)$$

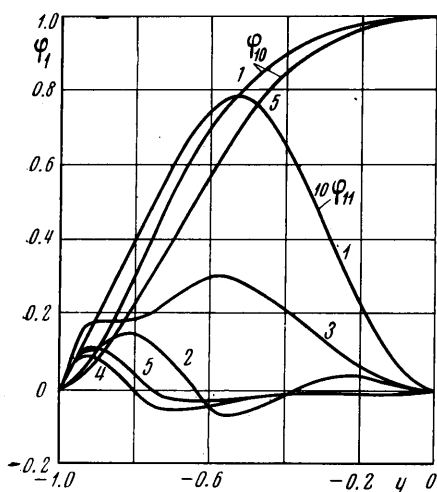
Тогда решение линейной задачи с точностью до постоянного множителя будет иметь вид

$$\varphi_1 = \varphi_1^\circ(y) e^{-\alpha c_i t}, \quad A(t) = A(0) e^{-\alpha c_r t}, \quad \theta = \text{const}$$

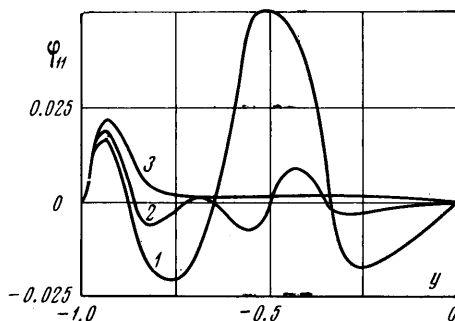
В нелинейном случае функция $A(t)$ определяется как своим начальным значением, так и формой возмущения $\varphi_1^\circ(y, 0)$. Если с течением времени влияние нелинейности уменьшается, то θ будет стремиться к $(c - c_r)t$, где c есть величина, принятая в разложении (1.4), а c_r — действительная часть собственного значения линейной задачи. Поэтому если принять $c = c_r$, то в коэффициентах первой гармоники будут уменьшены колебания по времени.

Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 3–7. Прежде всего отметим, что принципиальное различие между случаями $p_x = \text{const}$ и $q = \text{const}$ отсутствует. Наиболее интересный вывод из анализа расчетов заключается в том, что независимо от формы возмущения в начальный момент, коэффициенты первой гармоники с течением времени приближаются к соответствующим функциям линейной теории. На фиг. 3 показано, как происходит изменение начального возмущения в 2) при

$Re = 4000$, $\alpha = 1$, $A(0) = 0.1$, $p_x = \text{const}$. Линии 1–5 относятся соответственно к моментам времени $t = 1.6, 11.2, 30.4, 44.8, 70.4$. На фиг. 4 приведена функция φ_{11}° при $Re = 10000$, $\alpha = 1$ в 1) в моменты време-



Фиг. 3



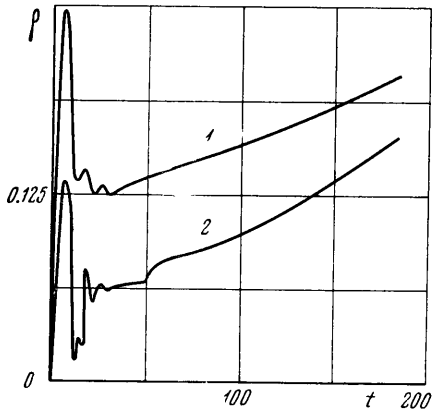
Фиг. 4

ни $t = 16$ (1), 25.4 (2), 72 (3). Уже при $t \approx 70$ решения мало отличаются от решений линейной задачи. На этом начальном участке развития среднее возмущение φ_0 и вторая гармоника φ_2 , которые возбуждаются нелинейным взаимодействием, не воздействуют существенно на основную гармонику φ_1 . Характер развития φ_0 , φ_2 сильно зависит от начальных данных, однако значения φ_0 , φ_2 при начальных возмущениях до 10% основной скорости остаются малыми.

Характер проявления нелинейности в докритической и закритической областях существенно различный. На фиг. 5 линии 1, 2 изображают зависимость от времени амплитуд первой и второй гармоник $\rho_1 = 10^2 |\varphi_1(0, t)|$ и $\rho_2 = 10^4 |\varphi_2'(0, t)|$ в варианте 1) при $Re = 10\,000$, $\alpha = 1$ и $q = \text{const}$. Отчетливо виден начальный участок примерно до $t = 70$, после которого устанавливается асимптотический характер развития, когда $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ возрастают соответственно как $\exp(\sigma t)$ и $\exp(2\sigma t)$. Каждая последующая гармоника φ_k будет возрастать как $\exp(k\sigma t)$. Даже в том случае, когда в начальный момент равны нулю все коэффициенты φ_k , кроме φ_1 , и амплитуда φ_1 мала, в результате нелинейного взаимодействия возбуждаются более высокие гармоники $\varphi_2, \varphi_3, \dots$, при этом с течением времени более высокие гармоники нарастают быстрее. Поэтому наступит момент, когда в решении (1.4) станут существенными высокие частоты, что приведет к быстрому разрушению основного течения. Этот результат соответствует экспериментальным данным о характере неустойчивости при $Re > Re_k$ [2].

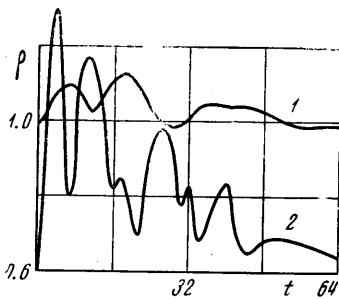
На фиг. 6 показано развитие амплитуд первой и второй гармоники в 2) при $Re = 4000$, $\alpha = 1$, $p_x = \text{const}$. На этой фигуре приведены $\rho_1 = 10 |\varphi_1(0, t)|$ и $\rho_2 = 50 |\varphi_2'(0, t)|$. Здесь амплитуда второй гармоники с течением времени медленно убывает, поэтому влияние ее на развитие

первой гармоники уменьшается. На фиг. 7 для этого случая даны значения энергии, заключенной в первой и второй гармониках $10 E_1(1)$, $10^2 E_2(2)$ и в среднем течении $10^3 E_0(3)$ (сплошные линии 1, 2, 3). После начального участка развития, на котором происходят значительные колебания, устанавливается асимптотический режим развития, когда возмущение изменяется медленно. В начальный момент амплитуда ρ_1 равнялась 0.1, что почти на порядок больше амплитуды предельного режима, однако отчетливые проявления неустойчивости отсутствуют. На фиг. 7 пунктирными линиями даны значения энергии $10 E_1(1)$, $10^2 E_2(2)$ и $10^3 E_0(3)$ при $Re = Re_k$, $\alpha = 1$, $p_x = \text{const}$ в 2) Амплитуда начального возмущения также составляла 0.1. В этом случае имеется слабое возрастание возмущения за счет нелинейности.

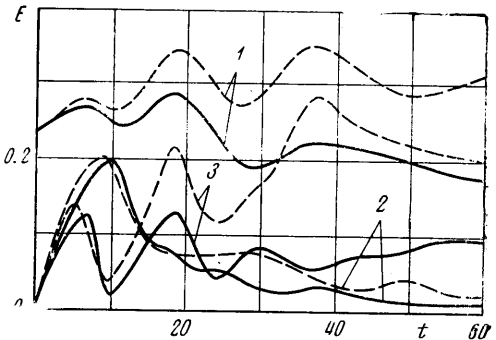


Фиг. 5

Таким образом, возбуждение первой гармоники с произвольно определенной амплитудой $\varphi_1(y)$ не приводит к заметному проявлению неустойчивости в докритической области, связанному с нелинейным возбуждением второй гармоники и искажением среднего течения. Можно отме-



Фиг. 6



Фиг. 7

тить, что на фиг. 7 имеются моменты времени, когда энергия первой гармоники и общая энергия возрастают, и моменты, когда они убывают. Поэтому поведение энергии не является однозначной характеристикой направления развития возмущений, что находится в соответствии с выводами [11] о недостаточности энергетического критерия неустойчивости.

Рассмотренные возмущения частного вида налагают определенные ограничения на основное течение, так как не учитывается влияние концов трубы. Потеря устойчивости ламинарного течения может вызываться также возмущениями более общей формы. В частности, заметную роль могут играть пространственно растущие возмущения, на развитие которых оказывают влияние условия на концах [12]. Как показывают проведенные расчеты (примеры даны на фиг. 3, 4), развивающееся возмущение принимает сложные промежуточные формы. Это создает возможность

проявления другого механизма, связанного со вторичной неустойчивостью [13]. Отметим, что при численном исследовании нелинейного развития простых периодических возмущений в плоскопараллельном течении Куэтта [14] получаются во многих отношениях аналогичные результаты.

Поступила 22 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Davies S. J., White C. M. An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section. Proc. Roy. Soc. London. A, 1928, vol. 110, pp. 92—107.
3. Timothy W. Као, Park C. Experimental investigation of the stability of channel flows, pt 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, pt 1, p. 145.
4. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flow. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 9, pt 3, pp. 353—370.
5. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 3, pp. 465—492.
6. Pekeris Chaim L., Shkoller B. The neutral curves for periodic perturbations of finite amplitude for plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 3, pp. 629—639.
7. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, стр. 791—794.
8. Струминский В. В. Проблемы устойчивости ламинарных потоков и перехода в турбулентные течения. В сб. «Турбулентные течения», М., «Наука», 1970, стр. 11—23.
9. Dowell E. H. Non-linear theory of unstable plane Poiseuille flow J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 2, pp. 401—414.
10. Крылов А. Л., Малыхина И. Д. Решение задачи о собственных значениях для уравнения Орра — Зоммерфельда разностным методом. Сб. работ ВЦ МГУ, 1968, № 11, стр. 44—54.
11. Петров Г. И. О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности. Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 345.
12. Куликовский А. Г. Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, стр. 822—835.
13. Stuart J. T., Meksyn D. Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances. Proc. Roy. Soc. London A, 1951, vol. 208, p. 517.
14. Шкадов В. Я. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных течениях вязкой жидкости. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 9, стр. 4—28.