

УДК 532.51

ВИНТОВЫЕ ПОТОКИ С МНОГОКРАТНОЙ ЦИРКУЛЯЦИЕЙ В КАНАЛАХ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, О. А. УСПЕНСКИЙ, П. Ф. ПОХИЛ

(Москва)

Получено общее решение задачи о винтовом движении несжимаемой жидкости по каналу с сечением в виде кольцевого сектора и треугольника. Показана возможность использования полученных решений для описания вторичных течений с многократной циркуляцией в каналах простой формы (кольцо, круг, квадрат, ромб, прямоугольник, равносторонний треугольник). Отмечается согласование теории с экспериментом.

В частной постановке задачи о винтовом движении идеальной несжимаемой жидкости в каналах простой конфигурации решались в [1, 2]. В предлагаемой работе исследуются течения более общего вида с многократной циркуляцией, когда в сечении трубы имеется несколько вихрей.

Двухпараметрический винтовой поток идеальной несжимаемой жидкости с независимым от продольной координаты q_3 распределением скоростей в криволинейных координатах описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{\lambda H_1 H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{\lambda H_2 H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} \right) + \frac{\lambda H_1 H_2}{H_3} v_3 = 0 \\ H_2 H_3 v_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial (H_3 v_3)}{\partial q_2}, \quad H_1 H_3 v_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial (H_3 v_3)}{\partial q_1} \\ E = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь q_i — криволинейные ортогональные координаты, H_i — коэффициенты Ляме, v_3 — продольная скорость жидкости, функция $\lambda(q_1, q_2, q_3)$ вводится условием винтообразности $\text{rot } \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Рассмотрим последовательно однородные ($\lambda = \text{const}$) двухпараметрические движения в каналах различной формы.

1. В цилиндрических координатах система (0.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \lambda^2 v_z = 0, \quad v_\theta = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad v_r = \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \quad (1.1)$$

Граничными условиями к (1.1) при движении жидкости по трубе, сечение которой представляет собой кольцевой сектор ($R_1, R_2, \theta_1 = 0, \theta_2 = \alpha$), будут

$$v_z|_{r=R_1} = v_z|_{r=R_2} = v_z|_{\theta=0} = v_z|_{\theta=\alpha} = v_0 = \text{const} \quad (1.2)$$

(продольная скорость постоянна по контуру сечения).

Условие постоянства осевой скорости на границах является необходимым. В самом деле, для рассматриваемого течения имеет место соотношение

$$\lambda H_3 \mathbf{v}_\tau = -\mathbf{i}_3 \times \text{grad } H_3 v_3 \quad (1.3)$$

где \mathbf{v}_τ — полная поперечная скорость жидкости, \mathbf{i}_3 — единичный вектор. Тогда, вводя в рассмотрение орты \mathbf{s} и \mathbf{n} касательной и нормами к контуру S , ограничивающему область движения, и направляя их так, чтобы они

вместе с i_3 образовывали правый триэдр (s, n, i_3) , для нормальной к контуру составляющей скорости v_n из (1.3) получим

$$\lambda H_3 v_n = -n \cdot (i_3 \times \text{grad } H_3 v_3) = -(n \times i_3) \text{grad } H_3 v_3 = d(H_3 v_3) / dS$$

Так как на границе $v_n = 0$, то вдоль контура имеем $H_3 v_3 = \text{const}$ (и только в частном случае $v_3 = 0$).

Переходя к безразмерным $\xi = r/R_2$, $p = \lambda R_2$, (R_2 — наружный радиус) и вводя новую функцию $F = v_z / v_0 - 1$, сведем (1.1) к

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + p^2 F = -p^2 \quad (1.4)$$

Решение (1.4) представляется рядом Фурье со следующими уравнениями для коэффициентов разложения:

$$(1.5)$$

$$F(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi) \sin m\pi\theta/\alpha$$

$$\frac{d^2 f_m}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df_m}{d\xi} + \left(p^2 - \frac{m^2 \pi^2}{\alpha^2 \xi^2} \right) f_m = \frac{2p^2 [(-1)^m - 1]}{\pi m} \quad (1.6)$$

Для f_m из (1.6) и (1.4) имеем

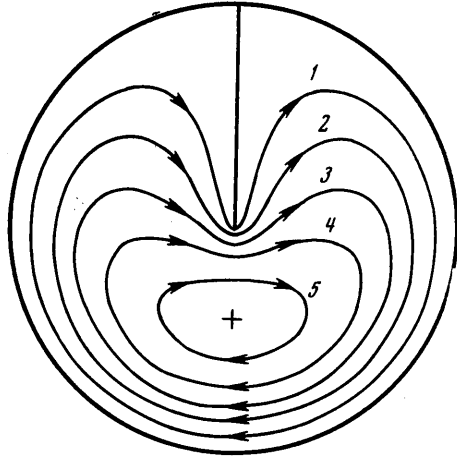
$$f_m = \frac{(-1)^m - 1}{m} \int_{p\xi_1}^{p\xi} x [N_\nu(p\xi) J_\nu(x) - J_\nu(p\xi) N_\nu(x)] dx + C_1 J_\nu(p\xi) + C_2 N_\nu(p\xi), \quad \nu = m\pi/\alpha \quad (1.7)$$

После нахождения значений C_1 и C_2 из (1.2) общее решение задачи о винтовом течении жидкости по каналу исследуемой формулы приобретает вид

$$\frac{v_z}{v_0} = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \pi(2s+1)\theta/a}{2s+1} \left\{ \int_{p\xi_1}^{p\xi} x [N_\nu(p\xi) J_\nu(x) - J_\nu(p\xi) N_\nu(x)] dx + [N_\nu(p\xi_1) J_\nu(p) - J_\nu(p\xi_1) N_\nu(p)]^{-1} [N_\nu(p\xi_1) J_\nu(p\xi) - J_\nu(p\xi_1) N_\nu(p\xi)] \times \int_{p\xi_1}^p x [J_\nu(p) N_\nu(x) - N_\nu(p) J_\nu(x)] dx \right\} \quad (1.8)$$

Случай движения в трубе с сечением в виде кругового сектора следует из (1.8) после выполнения предельного перехода $\xi_2 \rightarrow 0$

$$\frac{v_z}{v_0} = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin \pi(2s+1)\theta/\alpha}{2s+1} \left\{ \left[J_\nu(p) \int_{p\xi}^p x N_\nu(x) dx - N_\nu(p) \int_0^p x J_\nu(x) dx \right] \frac{J_\nu(p\xi)}{J_\nu(p)} + N_\nu(p\xi) \int_0^{p\xi} x J_\nu(x) dx \right\} \quad (1.9)$$



Фиг. 1

В частном случае $\alpha = 2\pi$ из (1.8) и (1.9) получаются решения для винтового потока в трубах кольцевого и круглого сечений с радиальной перегородкой. На фиг. 1 представлен пример такого движения ($p = 1.0$, $\psi_1 = 0.32 \cdot 10^{-2}$, $\psi_2 = 0.64 \cdot 10^{-2}$, $\psi_3 = 0.96 \cdot 10^{-2}$, $\psi_4 = 1.28 \cdot 10^{-2}$, $\psi_5 = 1.60 \cdot 10^{-2}$).

Решения (1.8), (1.9) при $\alpha = \pi/N$ ($N = 1, 2, \dots$) можно трактовать как вторичные винтовые движения с многократной циркуляцией внутри кольца или круга (такие движения в односвязных областях при N , не равном целому числу, неустойчивы).

Для примера на фиг. 2 дана картина линий тока поперечного движения ($\psi_1 = 1.10 \cdot 10^{-2}$, $\psi_2 = 2.20 \cdot 10^{-2}$, $\psi_3 = 3.30 \cdot 10^{-2}$, $\psi_4 = 4.40 \cdot 10^{-2}$) при четырехкратной ($N = 2$) циркуляции в трубе круглого сечения для $p = 1.0$ (функция ψ определяется соотношениями

$$H_2 H_3 v_1 = \partial \psi / \partial q_2, \quad H_1 H_3 v_2 = -\partial \psi / \partial q_1,$$

откуда $\lambda \psi = H_3(v_3 - v_0)$. Здесь же приведены эпюры осевой скорости $F(\xi, \theta) = v_z / v_0 - 1$.

Анализ (1.9) показывает, что при увеличении интенсивности относительного вращения p до величины, большей 3.83, вблизи центров вихрей образуются зоны обратных осевых течений. Наличие таких движений подтверждается экспериментом [3].

2. Для винтового течения по каналу с сечением в виде равнобедренного прямоугольного треугольника из (0.1) имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + p^2 F = -p^2, \quad F|_S = 0 \quad (2.1)$$

$$F(\eta, \xi) = v_z / v_0 - 1, \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/a, \quad p = \lambda a$$

Здесь a — длина катета, S — область, ограниченная прямыми $\eta = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 1 - \xi$, S — граница области.

Будем искать решение (2.1) в виде двойного ряда Фурье

$$F(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{mn} \quad (2.2)$$

$$\Phi_{mn} = \sin[\pi(m+n)\xi] \sin(\pi n \eta) - (-1)^m \sin[\pi(m+n)\eta] \sin(\pi n \xi)$$

где Φ_{mn} ортогональны и образуют полную в рассматриваемой области систему.

Чтобы показать, что выбранный вид $\Phi_{mn}(\xi, \eta)$ удовлетворяет граничному условию из (2.1) на гипотенузе треугольника, повернем оси координат на угол $\pi/4$, положив

$$\xi = \frac{\xi' - \eta'}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\xi' + \eta'}{\sqrt{2}}$$

После выполнения некоторых тригонометрических преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\xi', \eta') &= \sin[\pi(m+2n)\xi'/\sqrt{2}] \sin(\pi m \eta'/\sqrt{2}) - \\ &- \sin[\pi(m+2n)\eta'/\sqrt{2}] \sin(\pi m \xi'/\sqrt{2}) \quad (m = 2, 4, \dots) \\ \Phi_{mn}(\xi', \eta') &= \cos[\pi(m+2n)\eta'/\sqrt{2}] \cos(\pi m \xi'/\sqrt{2}) - \\ &- \cos[\pi(m+2n)\xi'/\sqrt{2}] \cos(\pi m \eta'/\sqrt{2}) \quad (m = 1, 3, \dots) \end{aligned}$$

Видно, что Φ_{mn} обращается в нуль при $\xi' = \sqrt{2}/2$ (на гипотенузе).

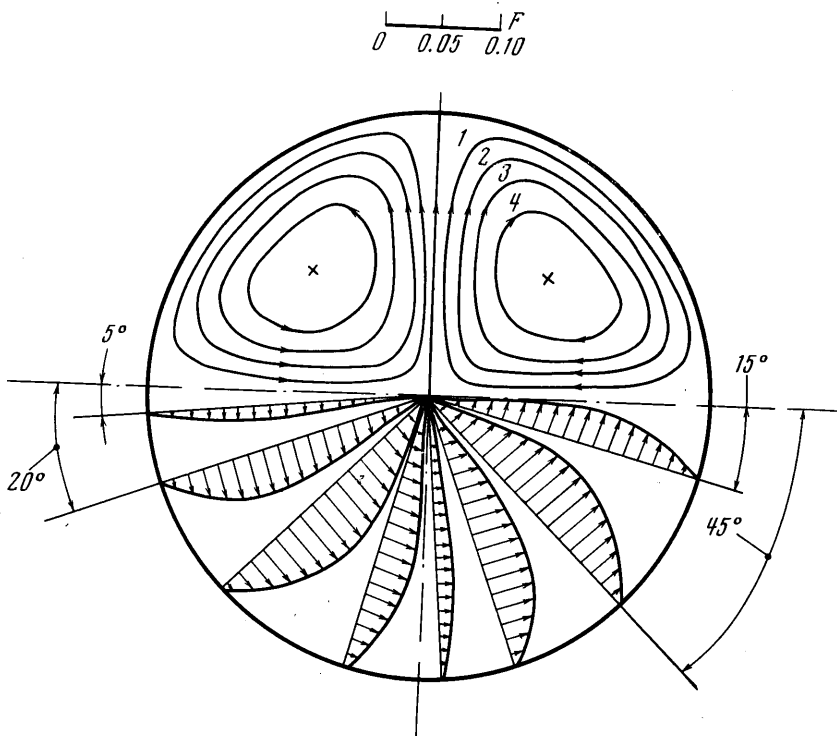
Производя обычные операции по определению коэффициентов разложения A_{mn} в (2.2), будем иметь для общего решения задачи о винтовом

движении жидкости в трубе исследуемого сечения выражение

$$\frac{v_z}{v_0} = 1 + \frac{4p^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][m(m+2n) - (-1)^n(m^2 + 2mn + 2n^2)]}{mn(m+n)(m+2n)[\pi^2(m^2 + 2mn + 2n^2) - p^2]} \times \\ \times \{ \sin[\pi(m+n)\xi] \sin(\pi n \eta) - (-1)^m \sin[\pi(m+n)\eta] \sin(\pi n \xi) \} \quad (2.3)$$

Отметим, что (2.3) годится и для случая многократной циркуляции в квадрате.

На фиг. 3 даны распределения линий тока ($\psi_1 = 0.50 \cdot 10^{-3}$, $\psi_2 = 1.00 \cdot 10^{-3}$, $\psi_3 = 1.50 \cdot 10^{-3}$, $\psi_4 = 2.00 \cdot 10^{-3}$) и поперечной скорости при $p = 0.1$.



Фиг. 2

Значение p было выбрано из соображений сопоставления результатов расчета течения по вышеприведенным формулам с известными экспериментальными данными о движении полностью развитого турбулентного потока с восьмикратной циркуляцией [4]. Из эксперимента бралось значение поперечной скорости v_x/v_0 в точке A ($1/2, 1/2$). Так как для винтового течения

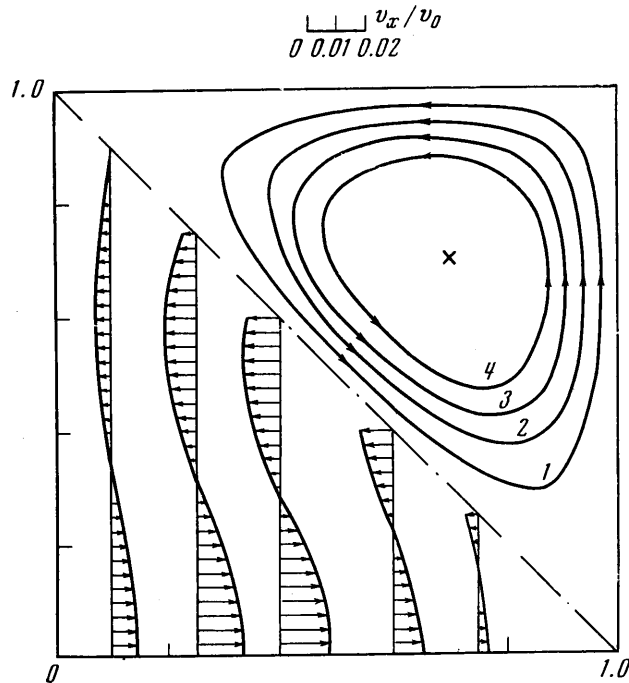
$$\frac{v_x}{v_0} \Big|_A = \frac{1}{p} \frac{\partial(v_z/v_0)}{\partial \eta} \Big|_A = \frac{4p^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial \eta} \Big|_A \quad (2.4)$$

то можно найти величину параметра p , соответствующую взятому v_x/v_0 .

Сравнение дает хорошее согласование теории с экспериментом во всей области ядра турбулентного потока как по картине линий тока, так и по значениям скоростей. Такое согласование не является случайным и демон-

стрирует возможность использования модели винтового движения для описания полностью развитых турбулентных течений [5].

Анализ (2.3) показывает, что с увеличением p до величины, большей $\pi / \sqrt{5}$, на осях вихрей имеют место обратные токи жидкости.



Фиг. 3

3. Для винтового движения в трубе с сечением в виде равностороннего треугольника система уравнений и граничные условия имеют вид (2.1), причем граница области задана прямыми

$$\eta = \zeta\sqrt{3}, \quad \eta = (1 - \zeta)\sqrt{3}, \quad \eta = 0$$

На основании результатов работы [6] для функции Грина задачи (2.1) имеем разложение

$$G(\zeta, \eta; \xi_1, \xi_2) = -\frac{12}{\sqrt{3}} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{\varphi_{s_1 s_2}^s(\zeta, \eta) \varphi_{s_1 s_2}^s(\xi_1, \xi_2) + \varphi_{s_1 s_2}^c(\zeta, \eta) \varphi_{s_1 s_2}^c(\xi_1, \xi_2)}{16\pi^2 (S_1^2 - S_1 S_2 + S_2^2) - 9p^2} \quad (3.1)$$

где $\varphi_{s_1 s_2}^s(\zeta, \eta)$ и $\varphi_{s_1 s_2}^c(\zeta, \eta)$ — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \lambda F, \quad F|_s = 0 \quad (3.2)$$

$$\varphi_{s_1 s_2}^s = \sin \left[\frac{2\pi}{3} (S_1 + S_2) \xi_1 \right] \sin \left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (S_1 - S_2) \xi_2 \right] -$$

$$- \sin \left[\frac{\pi}{3} (S_1 + S_2) (\xi_1 + \xi_2 \sqrt{3}) \right] \sin \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} (S_1 - S_2) (\xi_1 \sqrt{3} - \xi_2) \right] -$$

$$-\sin \left[\frac{\pi}{3} (S_1 + S_2) (\xi_2 \sqrt{3} - \xi_1) \right] \sin \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} (S_1 - S_2) (\xi_1 \sqrt{3} + \xi_2) \right] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{S_1 S_2}^c &= \cos \left[\frac{2\pi}{3} (S_1 + S_2) \xi_1 \right] \sin \left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (S_1 - S_2) \xi_2 \right] + \\ &+ \cos \left[\frac{\pi}{3} (S_1 + S_2) (\xi_1 + \xi_2 \sqrt{3}) \right] \sin \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} (S_1 - S_2) (\xi_1 \sqrt{3} - \xi_2) \right] - \\ &- \cos \left[\frac{\pi}{3} (S_1 + S_2) (\xi_2 \sqrt{3} - \xi_1) \right] \sin \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} (S_1 - S_2) (\xi_1 \sqrt{3} + \xi_2) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Непосредственное применение функций (3.3), (3.4) для расчетов приводит к громоздким выкладкам. Существенное упрощение получаем после преобразования $\varphi_{S_1 S_2}^s$ и $\varphi_{S_1 S_2}^c$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varphi_{S_1 S_2}^s &\equiv \varphi_{lmn}^s = \sin \left[\frac{2\pi l}{\sqrt{3}} \left(\xi_2' - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \sin \left[\frac{2\pi(m-n)}{3} \xi_1' \right] + \\ &+ \sin \left[\frac{2\pi m}{\sqrt{3}} \left(\xi_2' - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \sin \left[\frac{2\pi(n-l)}{3} \xi_1' \right] + \\ &+ \sin \left[\frac{2\pi n}{\sqrt{3}} \left(\xi_2' - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \sin \left[\frac{2\pi(l-m)}{3} \xi_1' \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{S_1 S_2}^c &\equiv \varphi_{lmn}^c = \sin \left[\frac{2\pi l}{\sqrt{3}} \left(\xi_2' - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{2\pi(m-n)}{3} \xi_1' \right] + \\ &+ \sin \left[\frac{2\pi m}{\sqrt{3}} \left(\xi_2' - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{3} \xi_1' \right] + \\ &+ \sin \left[\frac{2\pi n}{\sqrt{3}} \left(\xi_2' - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{2\pi(l-m)}{3} \xi_1' \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$(m = S_1, n = -S_2, l = S_2 - S_1, \xi_1' = \xi_1 - 1/2, \xi_2 = \xi_2')$$

Действительно, каждая функция $\varphi_{s_1 s_2}$ состоит теперь из трех идентичных членов с разделенными переменными. Это позволяет значительно упростить вычисления, пользуясь циклической перестановкой чисел l, m, n .

С помощью (3.1) общее решение задачи о винтовом движении жидкости в равностороннем треугольнике представимо выражением

$$\begin{aligned} \frac{v_z}{v_0} &= 1 + \frac{81p^2}{2\pi^2} \times \\ &\times \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{[S_1 \sin^2 /_{3\pi} (2S_2 - S_1) - S_2 \sin^2 /_{3\pi} (2S_1 - S_2) + (S_1 - S_2) \sin^2 /_{3\pi} (S_1 + S_2)]}{[9p^2 - 16\pi^2 (S_1^2 - S_1 S_2 + S_2^2)] (S_1 + S_2) (2S_1 - S_2) (2S_2 - S_1)} \times \\ &\times \varphi_{S_1 S_2}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение (3.7) пригодно и для описания вторичного течения с двукратной циркуляцией в канале ромбовидного сечения.

4. Аналогично предыдущему случаю может быть построено решение задачи о винтовом движении по трубе с сечением в виде прямоугольного треугольника с отношением катетов $b/a = \operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$.

Разложение функции Грина получим с помощью метода работы [6]

$$G(\zeta, \eta; \xi_1, \xi_2) = -\frac{24}{\sqrt{3}} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{\varphi_{s_1 s_2}^s(\zeta, \eta) \varphi_{s_1 s_2}^s(\xi_1, \xi_2)}{16\pi^2 (s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2) - 9\rho^2} \quad (4.1)$$

где $\varphi_{s_1 s_2}^s(\zeta, \eta)$ — полная ортогональная система собственных функций граничной задачи (3.2), определяемая (3.3), причем граница здесь образована прямыми

$$\eta = \zeta/\sqrt{3}, \quad \eta = (1 - \zeta)\sqrt{3}, \quad \eta = 0$$

Искомое решение имеет вид

$$\frac{v_z}{v_0} = 1 + \frac{18\rho^2}{\pi^2} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^{s_1}}{s_1(2s_2 - s_1)} - \frac{1 - (-1)^{s_2}}{s_2(2s_1 - s_2)} - \frac{1 - (-1)^{s_1 - s_2}}{s_1^2 - s_2^2} \right] \frac{\varphi_{s_1 s_2}^s(\zeta, \eta)}{16\pi^2 (s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2) - 9\rho^2} \quad (4.2)$$

Отметим, что оно годится для описания наблюдаемых на практике случаев вторичного движения с многократной циркуляцией

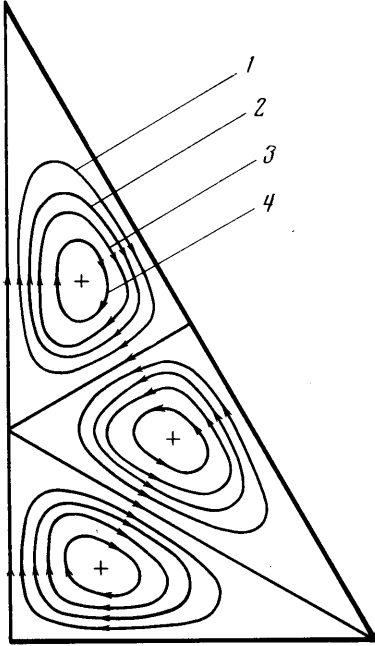
в трубах любого сечения, составленного из рассмотренных треугольников. Например, на фиг. 4 представлена рассчитанная картина вторичных течений, образующихся внутри равностороннего треугольника ($p = 0.1$, $\psi_1 = 0.28 \cdot 10^{-3}$, $\psi_2 = 0.56 \cdot 10^{-3}$, $\psi_3 = 0.84 \cdot 10^{-3}$, $\psi_4 = 1.12 \cdot 10^{-3}$).

Подобная конфигурация турбулентного потока известна из экспериментов [7].

Поступила 28 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И. С. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952.
2. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Госэнергоиздат, 1958.
3. Смитберг Е., Лэндис Ф. Трение и характеристики теплообмена при вынужденной конвекции в трубах с завихрителями из скученной ленты. Теплопередача, 1964, № 1.
4. Gessner F. B., Jones J. B. On some aspects of fully-developed turbulente flow in rectangular channels. Fluid Mech., 1965, vol. 23.
5. Гостинцев Ю. А., Зайцев В. М. О кинематическом подобии турбулентного вращающегося потока в трубе. Инж.-физ. ж., 1971, № 3.
6. Шестопал А. Ф. Разложение по фундаментальным решениям эллиптических операторов. Киев, «Наукова думка», 1968.
7. Nikuradze I. Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Rohren. Ingr-Arch., 1930, Bd 1, H. 3.



Фиг. 4