

УДК 517.9:532

**ГИДРОДИНАМИКА В СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ.
О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ**

И. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

(Харьков)

Рассматривается задача об определении частот и форм малых собственных колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде в условиях, близких к невесомости. Предполагается, что параллельно вертикальной образующей цилиндра действует слабое однородное гравитационное поле.

В отличие от [1], где найдена только первая частота антисимметричных колебаний в полуబесконечном цилиндрическом сосуде, получены зависимости нескольких первых частот осесимметричных, антисимметричных и т. д. колебаний от интенсивности гравитационного поля и других параметров задачи. Применяется метод Ритца для двух различных вариационных задач, эквивалентных задаче о колебаниях идеальной жидкости в условиях невесомости [1-5].

1. Постановка задачи. Пусть идеальная несжимаемая жидкость плотности ρ частично заполняет цилиндрический сосуд и занимает в положении равновесия область Ω , ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ (фиг. 1). На жидкость действует однородное гравитационное поле интенсивности ng (n — коэффициент перегрузки, g — ускорение силы тяжести), направленное при $n > 0$ сверху вниз параллельно вертикальным стенкам сосуда.

В этих условиях равновесия поверхность жидкости Γ будет осесимметричной, и на ней можно ввести криволинейные ортогональные координаты (s, θ) , где θ — угловая цилиндрическая координата, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, s — дуговая координата вдоль образующей поверхности Γ , $0 \leq s \leq s_0$ (см. фиг. 1).

Рассмотрим задачу о малых колебаниях жидкости в неподвижном сосуде под действием слабых гравитационных сил и сил поверхностного натяжения. Постановка этой задачи известна [6, 7]. Пространственная часть $\Phi(r, \theta, z)$ потенциала скорости жидкости является решением следующей однородной задачи на собственные значения:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\mathbf{r} \in \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\mathbf{r} \in S), \quad \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (1.1)$$

$$B\partial\Phi/\partial n = \lambda\Phi \quad (\mathbf{r} \in \Gamma) \quad (1.2)$$

$$(\lambda = \rho\omega^2 R^3 \sigma^{-1})$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к области Ω , λ — собственное значение задачи (1.1), (1.2), ω — неизвестная частота колебаний, σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе Γ , \mathbf{r} — безразмерный радиус-вектор (в качестве характерного размера выбран радиус R цилиндра).

Через B в (1.2) обозначен неограниченный самосопряженный оператор потенциальной энергии [6]. Он действует в гильбертовом пространстве H функций $u = u(s, \theta) = (\partial\Phi/\partial n)_{\Gamma}$, ортогональных к единице в смысле скалярного произведения вещественного гильбертова пространства $L_2(\Gamma)$ (см. последнее условие (1.1)). Оператор B задается дифференци-

альным выражением [6]

$$Bu = (au - \Delta_{\Gamma} u) - 1/\Gamma \int_{\Gamma} (au - \Delta_{\Gamma} u) d\Gamma$$

$$a = a(s) = b \cos \varphi - k_1^2 - k_2^2$$

на множестве функций $D(B) \subset H$, имеющих вторые производные из $L_2(\Gamma)$ и удовлетворяющих граничному условию

$$\partial u / \partial s + \mu u = 0 \quad (s = s_0)$$

$$\mu = k_1(s_0) \operatorname{ctg} \delta$$

где $a(s)$ — известная функция на (осесимметричной) поверхности Γ , b — число Бонда, $k_1 = k_1(s)$ и $k_2 = k_2(s)$ — главные кривизны поверхности Γ , Δ_{Γ} — оператор Лапласа — Бельтрами [8] на Γ , δ — угол смачивания (краевой угол), φ — угол между нормалью и осью z .

Будем считать, что B положительно определен в H , т. е. состояние равновесия жидкости в сосуде устойчиво по линейному приближению [6]. Тогда существует вполне непрерывный положительный самосопряженный оператор B^{-1} , и (1.2) в предположении $\Phi(s, \theta) \in H$ можно переписать в виде

$$\partial \Phi / \partial n = \lambda B^{-1} \Phi \quad (\mathbf{r} \in \Gamma) \quad (1.3)$$

2. Вариационные формулировки задачи. Двум формам записи граничного условия на Γ — соотношениям (1.2) и (1.3) — соответствуют две эквивалентные

вариационные формулировки задачи о колебаниях. В [6] показано, что задача (1.1), (1.2) отвечает квадратичный функционал

$$I_1(\Phi) = \left(B \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - \lambda \int_{\Omega} (\nabla \Phi)^2 d\Omega \quad (2.1)$$

где круглыми скобками в первом члене правой части (2.1) обозначено скалярное произведение в H .

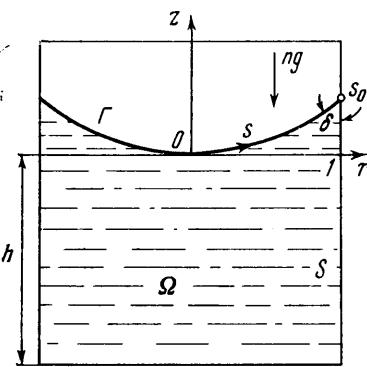
Стационарные значения функционала (2.1) нужно разыскивать в классе функций $\Phi(\mathbf{r})$, удовлетворяющих соотношениям (1.1) и имеющих конечные интегралы в (2.1).

Задаче о колебаниях в форме (1.1), (1.3) соответствует функционал

$$I_2(\Phi) = \int_{\Omega} (\nabla \Phi)^2 d\Omega - \lambda (B^{-1} \Phi, \Phi) \quad (2.2)$$

В [2] показано, что стационарные значения $I_2(\Phi)$ можно разыскивать на множестве функций $\Phi(\mathbf{r})$ с конечным интегралом Дирихле (первый интеграл в (2.2)); выполнение соотношений (1.1) для сравниваемых функций вовсе не является обязательным: экстремали функционала (2.2) будут удовлетворять этим (естественным) условиям.

Воспользуемся в дальнейшем методом Ритца при вычислении частот и форм колебаний жидкости и будем применять его к функционалам (2.1) и (2.2); соответствующие вариационные задачи назовем коротко: задача 1 и задача 2. Методика вычисления частот колебаний в цилиндрическом сосуде по методу Ритца для задачи 1 описана в [1], поэтому в данной работе остановимся подробнее только на задаче 2.



Фиг. 1

3. Реализация метода Ритца. Задача (1.1), (1.2) решается просто, если свободная поверхность Γ горизонтальна, т. е. угол смачивания $\delta = 90^\circ$. В этом случае собственные функции $\Phi_{mp}(r, \theta, z)$ и собственные значения λ_{mp} находятся методом разделения переменных

$$\Phi_{mp}(r, \theta, z) = J_m(\mu_{mp}r) \operatorname{ch}[\mu_{mp}(z + h)] \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\lambda_{mp} = \mu_{mp}(\mu_{mp}^2 + b) \operatorname{th}(\mu_{mp}h) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; p = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

Здесь $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода m -го порядка, μ_{mp} — нули функции $dJ_m(x) / dx$. (Их значения при целых и полуцелых m , $0 \leq m \leq 20.5$, для $p = 1, 2, \dots, 50$ можно найти в [9].)

Совокупность собственных форм колебаний

$$u_{mp}(r, \theta) = \left(\frac{\partial \Phi_{mp}}{\partial z} \right)_{z=0} = \mu_{mp} J_m(\mu_{mp}r) \operatorname{sh}(\mu_{mp}h) \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta, \quad p = 1, 2, \dots \end{cases}$$

при заданном m образует полную ортогональную систему функций в подпространстве $H_m \subset H$. В H_m входят функции вида

$$u_m(r, \theta) = u_m(r) \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases}$$

Можно убедиться, что подпространства H_m с разными индексами m ортогональны, а все пространство H разбивается на бесконечную ортогональную сумму подпространств

$$H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m \quad (3.3)$$

Ортогональное разложение (3.3) сохраняется и в случае, когда угол смачивания $\delta \neq 90^\circ$, а равновесная поверхность Γ осесимметрична. Разложению (3.3) соответствует разложение функции $u(s, \theta) \in H$ в ряд Фурье по θ .

Можно доказать, что совокупность собственных форм колебаний — решений задачи (1.1), (1.2)

$$u_{mp}(s, \theta) = (\partial \Phi_{mp} / \partial n)_r \quad (p = 1, 2, \dots)$$

с заданным индексом m образует полную ортогональную систему функций в H_m , а собственные числа λ_{mp} в задаче (1.1), (1.2) обладают следующими свойствами:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{mp} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{mp} = +\infty$$

(другой индекс фиксирован).

Воспользуемся методом Ритца для решения вариационной задачи (2.2). В качестве системы координатных функций при осесимметричной равновесной поверхности Γ и произвольном угле смачивания $\delta \neq 90^\circ$ выберем функции

$$f_{mp}(r, \theta, z) = c_{mp} [\Phi_{mp}(r, \theta, z) - d_{mp}] \quad (m = 0, 1, 2, \dots; p = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

Здесь $\Phi_{mp}(r, \theta, z)$ — функции (3.1), удовлетворяющие требованиям (1.1), c_{mp} — нормировочные постоянные, которые выберем позднее. Числа d_{mp} отличны от нуля только при $m = 0$ и определяются из условия $(\Phi_{mp})_r - d_{mp} \in H_m$, что приводит к равенствам

$$d_{mp} = \frac{1}{\Gamma} \int_{\Gamma} (\Phi_{mp})_r d\Gamma \quad (p = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, координатные функции (3.4) при каждом m обладают свойством $(f_{mp})_\Gamma \in H_m$.

Приближенное решение вариационной задачи (2.2) будем искать в виде

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{q=1}^M a_q f_{mq}(r, \theta, z) \quad (3.5)$$

где a_q — неизвестные постоянные (коэффициенты Ритца), f_{mq} — функции (3.4). Такая линейная комбинация соответствует отысканию собственных форм колебаний в подпространстве H_m .

Необходимые условия стационарности функционала (2.2) приводят к системе линейных уравнений

$$\sum_{q=1}^M a_q (\alpha_{pq} - \lambda \beta_{pq}) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, M) \quad (3.6)$$

относительно постоянных a_q . Здесь

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \int_{\Omega} \nabla f_{mp} \nabla f_{mq} d\Omega, \quad \beta_{pq} = \beta_{qp} = (B^{-1} f_{mp}, f_{mq}) \quad (3.7)$$

Нетривиальное решение системы уравнений (3.6) возможно только в том случае, когда

$$\det(\alpha_{pq} - \lambda \beta_{pq})_{p,q=1}^M = 0$$

Из этого уравнения находятся приближенно собственные значения задачи (1.1), (1.3).

Нормировочные постоянные c_{mp} в (3.4) выберем из условий

$$a_{pp} = 1, \quad p = 1, 2, \dots, M$$

(см. также [5]). Для горизонтальной равновесной поверхности Γ эти условия совпадают с условиями ортонормальности последовательности (3.4) собственных функций задачи (1.1), (1.3) в энергетическом пространстве «главного» оператора этой задачи. Для осесимметричной (негоризонтальной) поверхности Γ эти условия, как показывают вычисления, приводят к тому, что в матрице (α_{pq}) главными являются диагональные элементы, а в матрице (β_{pq}) при увеличении любого индекса элементы убывают достаточно быстро. Этот прием обеспечивает хорошую сходимость метода Ритца [10].

4. Определение семейства равновесных поверхностей. Собственные числа λ задачи (1.1), (1.3) зависят от трех параметров: числа Бонда b , угла смачивания δ и средней глубины жидкости h_0 (соответствующей углу смачивания $\delta = 90^\circ$). Зафиксируем два из них — δ и h_0 — и будем следить за поведением частот колебаний при изменении интенсивности гравитационного поля.

Чтобы построить семейство равновесных поверхностей Γ при фиксированных $\delta \neq 90^\circ$ и при различных $b \neq 0$, применим такой прием [5]. Записанное в параметрической форме $r = r(s)$, $z = z(s)$ уравнение поверхности Γ является решением следующей задачи Коши [11]:

$$\begin{aligned} r'' = -z'(bz + c - z'/r), \quad z'' = r'(bz + c - z'/r), \quad r(0) = z(0) = z'(0) = 0, \\ r'(0) = 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь s — параметр семейства, равный удвоенной средней кривизне поверхности Γ в начальной точке $s = 0$.

Параметры b и c в (4.1) нужно выбрать таким образом, чтобы в конечной точке $s = s_0$ было (см. фиг. 1)

$$r(s_0; b, c) = 1, \quad r'(s_0; b, c) = \sin \delta, \quad z'(s_0; b, c) = \cos \delta$$

Осуществим в (4.1) преобразование подобия по формулам ($b \neq 0$)

$$s = s_* / |b|^{1/2}, \quad r = r_* / |b|^{1/2}, \quad z = z_* / |b|^{1/2}, \quad c = c_* |b|^{1/2} \quad (4.2)$$

Тогда в новых переменных задача (4.1) сохранит свой прежний вид, однако на месте параметра b будет стоять $\varepsilon = \text{sign } b$. Полученная система уравнений содержит, таким образом, при выбранном ε только один параметр c_* . Будем интегри-

ровать эту систему при каком-либо $c_* \neq 0$ до тех пор, пока при некотором $s_* = (s_*)_0$ будет

$$z'[(s_*)_0] \equiv z'(s_0) = \cos \delta$$

Поскольку должно быть $r(s_0) = 1$, то из (4.2) находим, что

$$|b|^{\frac{1}{2}} = r_*[(s_*)_0] \equiv (r_*)_0.$$

Возвращаясь теперь по формулам (4.2) к первоначальным переменным, получим длину интервала интегрирования s_0 и параметры задачи (4.1)

$$s_0 = (s_*)_0 / (r_*)_0, \quad b = \varepsilon [(r_*)_0]^2, \quad c = c_* (r_*)_0$$

Таким образом, меняя c_* , получаем набор значений b , c и s_0 при фиксированном δ , а затем, после решения на ЭВМ задачи (4.1), уравнение кривой Γ и глубину жидкости

$$h = h_0 - z(s_0) + \int_0^{s_0} [r(s)]^2 z'(s) ds$$

5. Вычисление коэффициентов Ритца. Формулы (3.7) для коэффициентов Ритца упрощаются, если учсть свойства (1.1), которыми обладают координатные функции (3.4). После применения формулы Грина, интегрирования по θ и деления на общий множитель получим

$$\begin{aligned} a_{pq} &= \int_0^{s_0} f_{mp}(s) (\partial f_{mq}/\partial n)_r r(s) rs, \quad \beta_{pq} = \int_0^{s_0} f_{mp}(s) (B_m^{-1} f_{mq})(s) r(s) ds \\ (B_m^{-1} u)(s) &= \int_0^{s_0} G_m(s, t) u(t) r(t) dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь B_m^{-1} — интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, s_0]$ с весом $r(s)$. Ядро $G_m(s, t)$ этого оператора является функцией Грина такой задачи:

$$\begin{aligned} B_0 u &\equiv (\mathcal{L} u)(s) - \int_0^{s_0} (\mathcal{L} u)(s) r(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} r(s) ds = f(s) \\ \int_0^{s_0} f(s) r(s) ds &= 0, \quad \int_0^{s_0} u(s) r(s) ds = 0, \quad m = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} B_m u &\equiv (\mathcal{L} u)(s) + m^2 u(s) / [r(s)]^2 = f(s), \quad m = 1, 2, \dots \\ |u(0)| < \infty, \quad du/ds + \mu u &= 0 \quad (s = s_0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} u \equiv -\frac{1}{r(s)} \frac{d}{ds} \left[r(s) \frac{du}{ds} \right] + a(s) u, \quad a(s) = br' - [k_1(s)]^2 - [k_2(s)]^2$$

При $m = 0$ оператор B_0 , а вместе с ним и B_0^{-1} действуют в подпространстве функций из $L_2[0, s_0]$, ортогональных к единице.

Функцию Грина $G_m(s, t)$ можно выразить через линейно-независимые решения уравнения

$$\mathcal{L} u + m^2 u / r^2 = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

Если параметр c в (4.1) равен нулю, то равновесная поверхность Γ плоская ($r(s) = s$, $z(s) = 0$), и (5.3) переходит в уравнение Бесселя с линейно-независимыми решениями

$$u_{m1}(s) = I_m(s|b|^{\frac{1}{2}}), \quad u_{m2}(s) = K_m(s|b|^{\frac{1}{2}})$$

где $I_m(x)$ и $K_m(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда. Их поведение при малых s таково:

$$\begin{aligned} u_{01}(s) &= O(1), \quad u_{02}(s) = O(\ln s), \quad m = 0 \\ u_{m1}(s) &= O(s^m), \quad u_{m2}(s) = O(s^{-m}) \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.4)$$

В силу аналитической зависимости решений задачи (4.1) от параметра c характер поведения линейно-независимых решений уравнения (5.3) при $c \neq 0$ также имеет вид (5.4), и при малых s их можно получить разложением в степенные ряды по s , выделив предварительно главный множитель вида (5.4). (Для функции $u_{02}(s)$ удобнее выделить главное слагаемое вида $\ln s$.) Выбрав затем в качестве начальной точки малое значение $s = \Delta s \neq 0$ (чтобы избежать в (4.1) и (5.3) особенности при $s = 0$), можно проинтегрировать совместно с (4.1) уравнения (5.3) для функций $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$, использовав в качестве начальных данных их разложения при $s = \Delta s$.

Таблица 1

M	δ ⁰										
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165
4	3.006	3.638	4.332	4.952	5.505	5.932	6.209	6.332	6.323	6.237	6.146
5	3.006	3.638	4.332	4.952	5.505	5.932	6.209	6.329	6.313	6.213	6.106
6	3.006	3.638	4.332	4.952	5.505	5.932	6.209	6.328	6.309	6.203	6.089
4	50.26	76.68	104.9	129.4	145.9	151.8	147.0	134.4	118.9	105.0	97.25
5	50.16	76.67	104.7	129.4	145.9	151.8	146.8	133.5	116.5	100.9	90.03
6	50.10	76.67	104.6	129.4	145.9	151.8	146.7	133.1	115.4	98.94	87.50

Функция Грина $G_m(s, t)$ выражается через $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$ следующим образом:

$$G_m(s, t) = \begin{cases} [u_{m2}(s) u_{m1}(t) - (\tau_2/\tau_1) u_{m1}(t) u_{m1}(s)]/(2m), & 0 \leq t \leq s \\ [u_{m2}(t) u_{m1}(s) - (\tau_2/\tau_1) u_{m1}(t) u_{m1}(s)]/(2m), & s \leq t \leq s_0 \end{cases}$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad \tau_1 = (u_{m1}' + \mu u_{m1})_{s=s_0} \neq 0, \quad \tau_2 = (u_{m2}' + \mu u_{m2})_{s=s_0}$$

$$G_0(s, t) = \begin{cases} w(s, t) - u_{02}(s) u_{01}(t), & 0 \leq t \leq s \\ w(s, t) - u_{02}(t) u_{01}(s), & s \leq t \leq s_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w(s, t) = w(t, s) = \kappa_1 \{ \kappa_2 u_{01}(t) u_{01}(s) - \kappa_3 [F(t) u_{01}(s) + F(s) u_{01}(t)] + \\ + (\tau_1 / \tau_2) F(s) F(t) \}, \quad F(s) = u_{01}(s) [\psi_2(s_0) - \psi_2(s)] + u_{02}(s) \psi_1(s) \end{aligned}$$

$$\psi_1(s) = \int_0^s u_{01}(t) r(t) dt, \quad \psi_2(s) = \int_0^s u_{02}(t) r(t) dt \quad (5.5)$$

$$\kappa_2 = \int_0^{s_0} F(s) r(s) ds, \quad \kappa_3 = \psi_1(s_0), \quad \kappa_1 = \tau_2 / (\tau_1 \kappa_2 - \tau_2 \kappa_3^2)$$

Формула для коэффициентов Ритца β_{pq} принимает вид

$$\beta_{pq} = [(\xi_p \eta_q + \xi_q \eta_p) - (\tau_2 / \tau_1) \xi_p \xi_q - (\gamma_{pq} + \gamma_{qp})] / (2m) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.6)$$

$$\beta_{pq} = \kappa_1 \kappa_2 \xi_p \xi_q + \kappa_2 (\tau_1 / \tau_2) \xi_p \xi_q - \kappa_1 \kappa_3 (\xi_p \xi_q + \xi_q \xi_p) + (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}) \quad (m = 0)$$

Здесь

$$\xi_p = \int_0^{s_0} u_{m1}(s) f_{mp}(s) r(s) ds, \quad \eta_p = \int_0^{s_0} u_{m2}(s) f_{mp}(s) r(s) ds \quad (5.7)$$

$$\xi_p = \int_0^{s_0} F(s) f_{mp}(s) r(s) ds, \quad \gamma_{pq} = \int_0^{s_0} u_{m1}(s) f_{mp}(s) r(s) ds \int_0^s u_{m2}(t) f_{mq}(t) r(t) dt$$

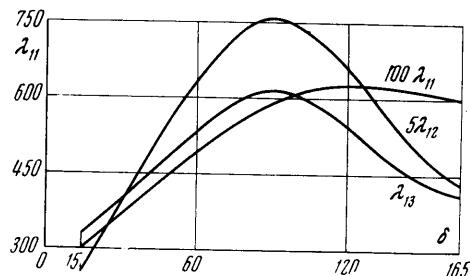
Таким образом, чтобы найти коэффициенты Ритца α_{pq} и β_{pq} , нужно вычислить вдоль равновесной поверхности Γ одномерные интегралы из (5.1) и (5.7). Для этого

разобъем отрезок $[0, s_0]$ на N равных частей и заменим интегралы квадратурными суммами Симпсона (для вычисления коэффициентов γ_{pq} внутренний интеграл заменим по методу трапеций). Значения подынтегральных функций в узлах квадратурных формул можно получить, запомнив информацию в процессе совместного интегрирования задачи (4.1), уравнений (5.3) для функций $u_{m1}(s)$ и $u_{m2}(s)$, а также уравнений для $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ (см. (5.5)).

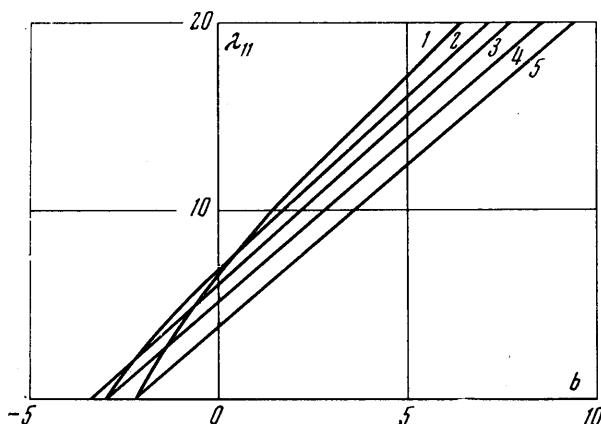
6. Антисимметричные колебания ($m=1$). Приведем результаты вычислений на ЭВМ М-20 наиболее важных с практической точки зрения частот и форм антисимметричных колебаний. Этим колебаниям соответствует ненулевая результирующая сила на боковые стенки сосуда.

Для контроля правильности вычислений были проведены сравнения полученных результатов для конкретных примеров задач 1 и 2. Они практически совпали, и поэтому все вычисления этого пункта проведены только для задачи 2.

Вычисления проводились для средней глубины жидкости $h_0 = 1$ при шести координатных функциях и 70 квадратурных точках. Они показали, что для углов смачивания, близких к $\delta = 90^\circ$, достаточно выбрать две — три координатные функции, а для $\delta < 45^\circ$ и $\delta > 135^\circ$ практически



Фиг. 2

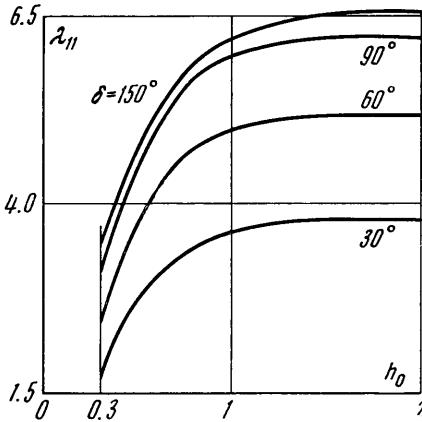


Фиг. 3

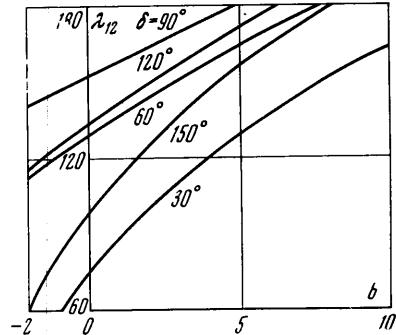
достаточно шести координатных функций. В табл. 1 этот факт иллюстрируется на примере первых двух собственных значений λ_{11} и λ_{12} для случая полной невесомости ($b = 0$) при $15^\circ \leq \delta \leq 165^\circ$ и числе координатных функций $M = 4, 5$ и 6 .

На фиг. 2 представлены (в разных масштабах по оси ординат) зависимости первых трех частот антисимметричных колебаний от угла смачивания δ при $b = 0$. Как и в задаче о плоских колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном канале [5], в данной задаче при $p \geq 2$ ($m = 1$) функции $\lambda_{mp}(\delta)$ имеют ярко выраженный максимум в окрестности точки $\delta = 90^\circ$. В случае $p = 1$, $m = 1$, соответствующем наименьшей частоте колебаний задачи (1.1), (1.3), этот максимум менее резко выражен и смешен вправо.

На фиг. 3 показана зависимость $\lambda_{11}(b; \delta)$ при $\delta = 150, 120, 90, 60, 30^\circ$ (линии 1–5). Из графика видно, что при $\delta \leq 90^\circ$ функция $\lambda_{11}(b; \delta)$ линейна по параметру b , а при $\delta > 90^\circ$, $b \leq 0$, линейность нарушается при подходе к критическим значениям $b_*(\delta)$, соответствующим границе области устойчивости [11] и определяемым из уравнения $\lambda_{11}(b; \delta) = 0$.



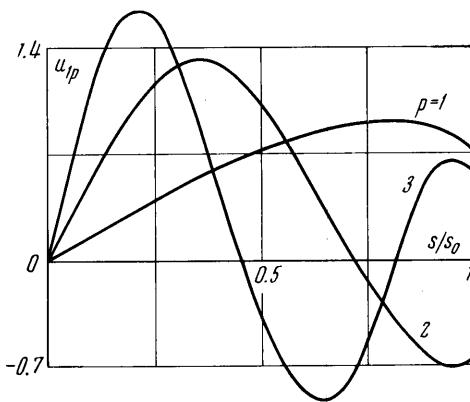
Фиг. 4



Фиг. 5

При $\delta = 60^\circ$ результаты вычислений λ_{11} близки к расчетам в [3] для случая $h_0 = 1.07$, $M = 6$, где в качестве координатных выбраны шаровые функции (однородные гармонические полиномы).

Характер зависимости частот колебаний от средней глубины жидкости h_0 виден уже из (3.2) для $\delta = 90^\circ$ ($h = h_0$). Он сохраняется и для других

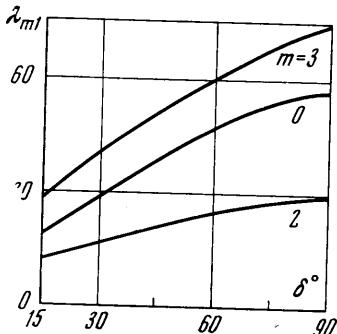


Фиг. 6

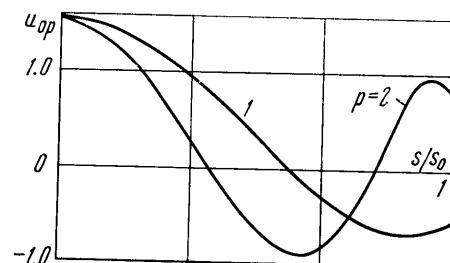
углов смачивания. На фиг. 4 показано, как меняется $\lambda_{11}(h_0)$ при фиксированных значениях δ и $b = 0$. Для других частот колебаний ширина «пограничного слоя» еще меньше, и для них глубину $h_0 = 1$ можно считать соответствующей случаю бесконечно глубокой жидкости. При $h_0 \geq 2$ результаты вычислений $\lambda_{11}(h_0)$ совпадают с расчетами в [1] для случая $h_0 = \infty$.

На фиг. 5 показано, как меняется вторая частота колебаний $\lambda_{12}(b; \delta)$ при изменении интенсивности гравитационного поля. Аналогичный ха-

рактер имеют графики и для других собственных значений: при $b \rightarrow +\infty$ они идут вдоль асимптоты, наклон которой соответствует углу смачивания $\delta = 90^\circ$, т. е. для горизонтальной равновесной поверхности Г. Этот факт можно объяснить, по-видимому, тем, что для больших b (гравитационные силы много больше поверхностных) равновесная поверхность



Фиг. 7



Фиг. 8

жидкости Г почти плоская, и небольшое ее отклонение от горизонтальной в окрестности линии контакта с твердой стенкой S мало влияет на частоты колебаний жидкости.

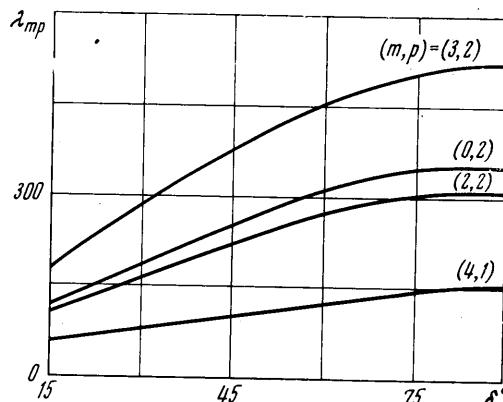
На фиг. 6 представлены типичные формы

$$u_{1p}(s, \theta) = \left(\frac{\partial \Phi_{1p}}{\partial n} \right)_r = u_{1p}(s) \begin{cases} \sin \theta \\ \cos \theta \end{cases}, \quad p = 1, 2, 3,$$

собственных антисимметричных колебаний. Они построены для $\delta = 45^\circ$, $b = 4.34$, однако при других значениях b и δ характер их поведения такой же. Вычисления показали, что для углов смачивания δ в интервале $30^\circ \leq \delta \leq 150^\circ$ первая собственная форма колебаний хорошо аппроксимируется первой координатной функцией (3.4), вторая — второй, и т. д. Так, коэффициенты Ритца $\{a_q^{(p)}\}_{q=1}^M$ из (3.5) в рассматриваемом примере, представленные в табл. 2, быстро убывают с увеличением q , причем главный вклад в приближенное решение (3.5) вносят слагаемые с «диагональными» коэффициентами $a_p^{(p)}$. Верхние значения даны для λ_{11} , нижние — для λ_{13} .

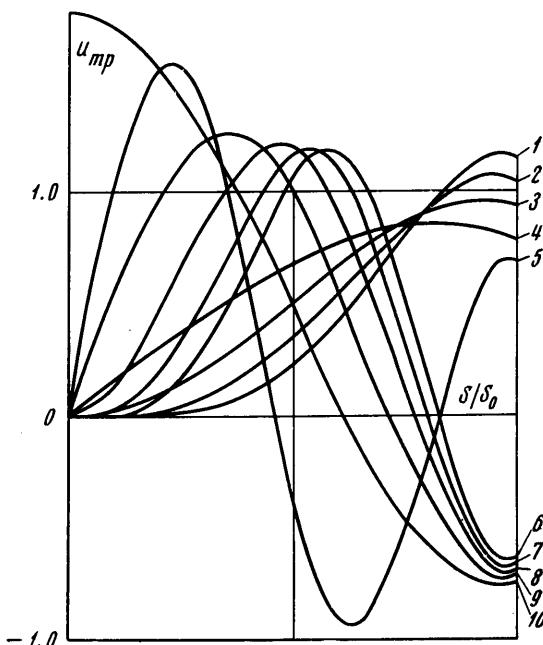
7. Осесимметричные колебания и колебания высших тонов. Приведем теперь результаты вычислений других тонов колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде. Несколько контрольных примеров при $m = 0$ в задаче 1 и 2 совпали, поэтому все последующие вычисления приведены для задачи 1.

На фиг. 7 показана зависимость первых собственных значений $\lambda_{m1}(\delta)$ при $b = 0$, $h_0 = 1$, $m = 0, 2, 3$. Как и в задаче о колебаниях жидкости в



Фиг. 9

плоском канале [5], собственные значения задачи (1.1), (1.2) уменьшаются при $\delta \rightarrow 0$, а крутизна графиков $\lambda_{m1}(\delta)$ увеличивается с ростом номера m .



Фиг. 10

Собственные формы колебаний $u_{mp}(s/s_0)$ при $m = 0, 1, 2, 3, 4$ для кривых 1–10 соответствуют $(m, p) = (4,1), (3,1), (2,1), (1,1), (1,3), (4,2), (3,2), (2,2), (1,2), (0,1)$ для случая $b = 0, h_0 = 1, \delta = 45^\circ$ и изображены на фиг. 10. Для каждого тона колебаний m хорошо видно их поведение в окрестности точек $s = 0$ и $s = s_0$.

Таблица 2

p	q					
	1	2	3	4	5	6

Антисимметричные колебания

1	1.000	0.095	0.004	0.042	0.053	0.025
2	0.194	1.000	0.274	-0.095	-0.078	-0.033
3	-0.037	0.317	1.000	0.468	0.020	0.007

Осесимметричные колебания

1	1.000	0.591	0.168	0.009	-0.005	-0.003
2	0.369	1.000	0.448	-0.121	-0.132	-0.059

При увеличении числа Бонда ($b \rightarrow +\infty$) у графиков функций $\lambda_{mp}(b; \delta)$ обнаруживается та же тенденция, что и в случае антисимметричных колебаний: наклон графиков при $b \geq 10$ для $\delta \neq 90^\circ$ такой же, как и для $\delta = 90^\circ$, и не зависит от глубины при $h_0 \geq 2$. Поэтому приближенно при $b \geq 10, h_0 \geq 2$ формулу для частот колебаний жидкости в ци-

ходимость последовательных приближений в методе Ритца хуже, чем для антисимметричных колебаний, однако практически вполне достаточно выбрать шесть координатных функций (3.4) в задачах 1 и 2. Это видно из табл. 2 для коэффициентов Ритца $\{a_q^{(p)}\}_1^6, p = 1, 2$, для случая осесимметричных колебаний (задача 2) при $b = 0, \delta = 30^\circ, h_0 = 1$. На фиг. 8 показаны соответствующие формы колебаний $u_{op}(s/s_0), p = 1, 2$.

На фиг. 9 показаны зависимости $\lambda_{mp}(\delta)$ при $b = 0, h_0 = 1$, для значений $m = 4, p = 1$, а также при $m = 0, 2, 3, p = 2$. Эти функции ведут себя аналогично функциям, изображенным на фиг. 7.

Собственные формы колебаний

цилиндрическом сосуде при произвольном угле смачивания δ можно записать в таком виде:

$\lambda_{mp}(b; \delta) = \mu_{mp}(b - 10) + \lambda_{mp}(10; \delta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $p = 1, 2, \dots$)
где μ_{mp} — числа из (3.2), а $\lambda_{mp}(10; \delta)$ — зависимость собственных значений задачи (1.1), (1.2) от угла смачивания δ при $b = 10$, $h_0 \geq 2$.

Поступила 4 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Копачевский Н. Д., Морозовская Н. Н. Определение первой частоты колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле. Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», М., ВЦ АН СССР, 1968.
2. Барнек М. Я., Комаренко А. Н. Вариационный метод решения задач о колебаниях жидкости в слабом гравитационном поле. Труды семинара по дифференциальному и интегральному уравнениям, вып. I, Киев, 1969.
3. Барнек М. Я. Нахождение собственных частот и форм малых колебаний идеальной жидкости в сосуде, находящемся в слабом гравитационном поле. Сб. «Математическая физика», № 9, Киев, «Наукова думка», 1971.
4. Копачевский Н. Д., Мышкин А. Д., Тюпцов А. Д. О колебаниях жидкости в условиях полной или частичной невесомости. Сб.: «Математическая физика и функциональный анализ», вып. 1, Харьков, 1969.
5. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О плоских колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
6. Копачевский Н. Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. Сб.: «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.
7. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
8. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, М., Физматгиз, 1963.
9. Таблицы нулей функций Бесселя, вып. 44. М., ВЦ АН СССР, 1967.
10. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
11. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», М., ВЦ АН СССР, 1968.