№ 2 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

УДК 532.5

ВЕРТИКАЛЬНОЕ ПОГРУЖЕНИЕ ПЛАВАЮЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

В. Н. ШАЦ

(*Ленинград*)

Работа посвящена исследованию безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости при вертикальном погружении цилиндрического тела. В отличие от задач об ударе [1] и входе тела в воду [2] в статье изучается случай непрерывного погружения с изменением формы свободной поверхности, но при постоянной ширине смоченной поверхности тела. Разыскиваются коэффициенты степенных рядов по времени для потенциала скорости, уравнения свободной поверхности и давления на тело при учете всех членов в уравнении Коши — Лагранжа.

Приведены результаты расчетов в случае погружения днища с эллиптической формой подводной части.

1. На поверхности покоящейся жидкости плавает цилиндрическое тело, подводная часть которого ограничена гладкой и симметричной кривой ABC $y=y_1(x)$; в точках A и C тело имеет вертикальные стенки. Погружение происходит со скоростью $v(t)$ при $t\geqslant 0$.

Рассматривается идеальная и несжимаемая жидкость. Потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

Предполагая обтекание тела безотрывным, получим на поверхности тела (n — внешняя нормаль к кривой ABC)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=v_n(t) \qquad \left(y=y_1-\int_0^t v(\tau)\,d\tau\right) \tag{1.2}$$

На свободной поверхности жидкости $y=\eta(x, t)$ выполняются динамическое и кинематическое условия (g — ускорение силы тяжести)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\eta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.3}$$

Система (1.3) при $t=0$ и $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ имеет начальные и граничные условия $\eta=\varphi=0$.

2. Решение ищем методом малого параметра, в качестве которого принимаем время t.

Рассмотрим следующие ряды:

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\varphi_k(x,y), \quad \eta=\sum_{j=1}^{\infty}t^j r_j(x), \quad v=\sum_{m=0}^{\infty}t^m\frac{d^m v(0)}{dt^m} \tag{2.1}$$

Здесь φ_k и r_j — неизвестные функции. Из (1.1) и (2.1) следует, что φ_k — гармонические функции. Разложим φ_k в ряд Тейлора в окрестности кривой L, ограничивающей сверху область D, занятую невозмущенной жидкостью в начальный момент времени. При этом выполняются соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}kt^{k-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(y-y_0)^s}{s!}\frac{\partial^s\varphi_k(y_0)}{\partial y^s}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(y-y_0)^s}{s!}\frac{\partial^{s+1}\varphi_k(y_0)}{\partial q\,\partial y^s} \qquad (2.2)$$

Здесь q — один из векторов x, y или n; $y=y_0(x)$ — уравнение кривой L. Поскольку на кривой ABC $y_0=y_1(x)$, а на свободной поверхности $y_0\equiv 0$, то

$$y-y_0=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{m+1}}{m+1}\frac{d^mv(0)}{dt^m}, \quad |x|\leqslant l \qquad (2.3)$$

$$y-y_0=\sum_{j=1}^{\infty}t^jr_j(x), \quad |x|>l \quad (l=AC/2)$$

Краевые условия для φ_k на границе L и значения r_j определяются путем подстановки рядов (2.2), (2.3) в уравнения (1.2), (1.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t.

Соответствующие зависимости для нескольких первых значений k и m имеют вид.

При $|x|\leqslant l$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}=v_n(0), \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=v_n(0)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial n}+\frac{dv_n(0)}{dt} \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial n}=\frac{1}{2}\frac{d^2v_n(0)}{dt^2}, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n}=\frac{1}{2}\frac{dv_n(0)}{dt}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial n}+\frac{1}{6}\frac{d^3v_n(0)}{dt^3}$$

при $|x|>l$

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right), \quad \varphi_2=0$$

$$\varphi_3=-\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+g\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right] \qquad (2.5)$$

$$r_1=\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}, \quad r_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y\partial x}\right)$$

$$r_3=\frac{1}{3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$$

Зависимости φ_2, φ_3 и r_3 в (2.4), (2,5) вычислены при $v(0)=0$.

Краевые условия (2.4) позволяют проследить связь явлений удара и погружения. Согласно [1] φ_0 есть потенциал скорости при ударе тела со скоростью $v(0)$. В этом случае нарушается непрерывность функций φ и v при $t=0$; ряды (2.1) и последующие разложения будут справедливы при $t>0$. Из (2.4) следует также: если $d^mv(0)\,/\,dt^m=0$ при всех $m<\lambda$, то φ_λ равен потенциалу скорости при ударе тела со скоростью, численно равной $\lambda d^\lambda v(0)\,/\,dt^\lambda$, а $\varphi_k\equiv 0$ при всех $k<\lambda$.

Для отыскания φ_k конформно отобразим область D на нижнюю полуплоскость $\zeta=u+iv$ с помощью функций $z=z(\zeta)$ $(z=x+iy)$, обеспечив переход кривой ABC в отрезок $(-1, 1)$ оси u. Значение нормальной производной к кривой ABC может быть вычислено согласно выражению

$$\frac{\partial\varphi_k(\zeta)}{dv}=-\frac{\partial\varphi_k}{dn}\Big|_{z=z(\zeta)}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \tag{2.6}$$

Формула Келдыша — Седова [3] позволяет последовательно вычислить функции $\partial\Phi_k/\partial\zeta$ ($\operatorname{Re}\Phi_k=\varphi_k$) при $k=0, 1, 2, \ldots$ в классе функций, имеющих интегрируемую особенность при $|u|=1$. Поскольку $\partial\varphi_k/\partial u$ — нечетная функция, а $\partial\varphi_k/\partial v$ — четная, эта формула преобразуется к виду

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial\zeta}=\frac{2\zeta}{\pi\sqrt{\zeta^2-1}}\left\{i\int_1^\infty\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\tau^2-\zeta^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial u}d\tau+\int_0^1\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\tau^2-\zeta^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial v}d\tau\right\} \tag{2.7}$$

$$\varphi_k=\operatorname{Re}\int_0^\zeta\frac{\partial\Phi_k}{\partial\zeta}d\tau \tag{2.8}$$

Давление на тело $p(x, t)$ определяется согласно интегралу Коши — Лагранжа. Коэффициенты разложения (ρ — массовая плотность)

$$p=\rho\sum_{h=0}^\infty t^h p_h(x) \tag{2.9}$$

можно аналогично получить, используя (2.2), (2.3). Первые из коэффициентов имеют вид

$$-p_0=\varphi_1+gy_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2,\quad -p_1=2\varphi_2 \tag{2.10}$$

$$-p_2=3\varphi_3-\frac{1}{2}\frac{dv(0)}{dt}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{g}{2}\frac{dv(0)}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2$$

Формулы для p_1 и p_2 вычислены при $v(0)=0$. В случае удара тела при $t_+=0$ помимо ρp_0 будет действовать давление с импульсом [1] $p_t=-\rho\varphi_0$.

3. Полученные результаты использованы при рассмотрении случая, когда ABC — дуга эллипса с горизонтальной осью AC и вертикальной полуосью, равной βl при $\beta\in(0, \infty)$. Соответствующие зависимости имеют вид

$$z=l(\zeta+\beta\sqrt{\zeta^2-1}),\qquad \Phi_0=il(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})v(0)$$

$$\Phi_2=\frac{il}{2}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\frac{d^2v(0)}{dt^2} \tag{3.1}$$

Поскольку

$$\frac{d\Phi_0}{dz}=-v(0)\frac{i[(1+\beta)\zeta^2-1]-(1+\beta)\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-c^2\zeta^2}$$

то краевые условия (2.4) согласно (2.6) и (3.1) приводятся к виду

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}=v^2(0)A(u)-l\omega,\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=\frac{\omega^2}{2}A(u)-\frac{l}{6}\frac{d^3v(0)}{dt^3}\qquad (|u|\leqslant 1)$$

$$\varphi_1=-\frac{v^2(0)}{2}B^2(u),\quad \varphi_3=-\frac{\omega^2}{6}B(u)\,(2B(u)+g)\qquad (|u|>1)$$

$$A(u)=(1+\beta)\frac{1-2u^2+c^2u^2}{(1-c^2u^2)^2\sqrt{1-u^2}},\qquad \omega=\frac{dv(0)}{dt} \tag{3.2}$$

$$B(u)=\frac{(1+\beta)u^2-(1+\beta)u\sqrt{u^2-1}-1}{1-c^2u^2},\qquad c^2=1-\beta^2$$

После подстановки полученных краевых условий в (2.7) и вычисления интегралов имеем

$$\frac{d\Phi_1}{d\zeta}=\frac{(1+\beta)v^2(0)}{\pi}\frac{\zeta}{(1-c^2\zeta^2)^3\sqrt{1-\zeta^2}}\Big\{[(4-\beta)c^4\zeta^4-$$
$$-2(4-4\beta-4\beta^2+\beta^3)c^2\zeta^2+(4-7\beta-8\beta^2+10\beta^3)]\frac{1}{2c(1-\beta)}\ln\frac{1+c}{1-c}-$$
$$-[(1+\beta)(2+\beta+2\beta^2-\beta^3)\zeta^4-(4+3\beta+3\beta^2)\zeta^2+2]\frac{1}{\zeta}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}+$$
$$+\frac{1-c^2\zeta^2}{\beta(1-\beta)}[(1+4\beta-2\beta^2)c^2\zeta^2-(1+4\beta-6\beta^2)]+$$
$$+\frac{\pi i}{\zeta}[-(1-\beta^4)\zeta^4+2\zeta^2-1]-\pi\sqrt{1-\zeta^2}\,[(1+\beta)^3\zeta^2-(1+3\beta)]\Big\}+$$
$$+\omega l\left(i+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\tag{3.3}$$

$$\frac{d\Phi_3}{d\zeta}=\frac{1+\beta}{3\pi}\omega^2\frac{\zeta}{(1-c^2\zeta^2)^3\sqrt{1-\zeta^2}}\Big\{\frac{1}{2\zeta}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}[(3\beta^4-4\beta^3-12\beta^2-12\beta-$$
$$-7-a(1-\beta^4))\zeta^4+2(7+a+6\beta+6\beta^2)\zeta^2-(7+a)]+\frac{1}{2c(1-\beta)}\times$$
$$\times\ln\frac{1+c}{1-c}[(7-\beta+a(1-\beta))c^4\zeta^4-2(7+ac^2(1-\beta)-7\beta-7\beta^2+\beta^3)c^2\zeta^2+$$
$$+(7+a(1-\beta)(1-2\beta^2)-13\beta-14\beta^2+18\beta^3)]+\frac{1-c^2\zeta^2}{\beta}\Big[(2+9\beta+4\beta^2-$$
$$-3\beta^3+\beta ac^2)\zeta^2+\left(\frac{11\beta^2-7\beta-2}{1-\beta}-\beta a\right)\Big]-\pi\sqrt{1-\zeta^2}\,[(2(1+\beta)^3+\beta ac^2)\zeta^2-$$
$$-(2+6\beta+\beta a)]+\frac{3}{2}\pi i[-(1+\beta^2)c^2\zeta^4+2\zeta^2-1]\Big\}+$$
$$+\frac{l}{6}(i\zeta-\sqrt{1-\zeta^2})\frac{d^3v(0)}{dt^3}\tag{3.4}$$

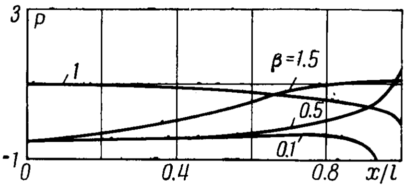
Заметим, что в (3.3), (3.4) при $\beta>1$

$$\frac{1}{c}\ln\frac{1+c}{1-c}=\frac{2}{|c|}\operatorname{arc\,tg}|c|$$

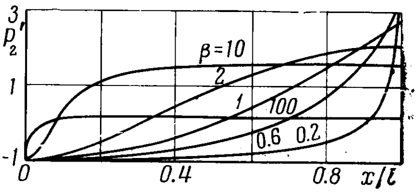
Формулы (2.6) позволяют вычислить коэффициенты (2.10)

$$-p_0(x)=\varphi_1(u)+\frac{v^2(0)}{2(1-c^2u^2)}-g\beta l\sqrt{1-u^2}$$
$$-p_1(x)=-2l\frac{d^2v(0)}{dt^2}\sqrt{1-u^2}\tag{3.5}$$
$$-p_2(x)=3\varphi_3(u)+\frac{\omega^2}{2(1-c^2u^2)}[2-(1+\beta)u^2]\qquad(u=x/l)$$

На фиг. 1 приведены графики $p_t / \rho l v(0) = \sqrt{1 - u^2}$ кривых и $p_0 / v^2(0)$ при различных значениях β; значение p_0 вычислено по (3.3), (3.5) без учета гидростатической составляющей давления. Вычисления показывают, что при $\beta \to \infty$ функция $p_0(x) \to 0$ при $x \in (0, l)$, а в случае $\beta \to 0$ $p_0(l) \to \infty$. При ударе дальнейшее погружение приводит к уменьшению импульсивных давлений в районе диаметральной плоскости.



Фиг. 1



Фиг. 2

Аналогично изменяются давления при равноускоренном погружении тела без начальной скорости. Согласно (2.9), (2.10), (3.1), (3.4), (3.5), имеем

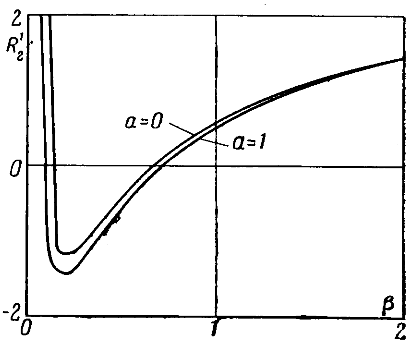
$$p / \rho = p_0 + t^2 p_2 + O(t^2), \quad p_0 = \omega \sqrt{l^2 - x^2}$$

Графики функции $p_2' = p_2 / \omega^2$, вычисленные по (2.8), (3.4), (3.5), построены на фиг. 2; сплошные линии соответствуют случаю бесконечных ускорений $d = 0$, штрих-пунктирные — $\omega = g$. Функция p_2 монотонно возрастает от $p_2(0) = -\omega^2$ до $p_2(l) > 0$. Величина $p_2(l) \in (0, \infty)$ является убывающей функцией относительно параметра $\beta \in (0, \infty)$. Значение $p_2(l) / \omega^2$ несколько уменьшается с ростом ускорения ω.

В рассматриваемом случае $\omega = \text{const}$ из (2.1), (2.5), (3.1) получим уравнение свободной поверхности

$$\eta = t^2 r_2 + O(t^2),$$

$$r_2 = \frac{\omega}{2(1-\beta)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2 l^2}} - 1 \right)$$



Фиг. 3

Представляет интерес сила сопротивления жидкости равноускоренному погружению тела

$$R(t) = \rho [R_0 + t^2 R_2 + O(t^2)], \qquad R_h = 2l \int_0^1 p_h(u)\, du$$

Согласно (3.1), (3.5), $R_0 = (\pi l^2 \omega) / 4$. Графики зависимости $R_2 / \omega^2 l = R_2'$ как функции параметра β, вычисленные по (2.8), (3.4), (3.5), представлены на фиг. 3.

Поступила 24 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
3. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых задач для гармонических функций. Докл. АН СССР, 1937, т. 16, № 1.