

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ И V-ОБРАЗНЫХ КРЫЛЬЕВ

М. И. ФОЛЛЭ

(Москва)

Решение задачи о сверхзвуковом и гиперзвуковом обтекании треугольных и V-образных крыльев на стороне сжатия при произвольном угле атаки получено аналогично работе [1] в предположении сверхзвукового течения за присоединенным скачком и малости углов V-образности и стреловидности.

Метод, развитый в данной работе, годится для любых кромок и любых цилиндрических (с образующими по линиям тока невозмущенного течения за косым скачком) поверхностей крыльев, если только эти поверхности близки к поверхности клина.

В подобной постановке задача обтекания треугольных крыльев рассматривалась в работах [2] и [3]. В этих работах получил дальнейшее развитие метод Лайтхилла [4, 5]. В работе [2] исследовалось гиперзвуковое обтекание, в работе [3] — сверхзвуковое обтекание со скольжением.

1. Постановка задачи. Направим ось X по невозмущенной линии тока за скачком, ось Y — по кромке клина, ось Z — перпендикулярно поверхности клина. Линеаризацию течения за косым скачком проведем аналогично двумерному случаю [6]

$$\begin{aligned} v_{x2} &= V_0(1 + \epsilon v_x), & v_{y2} &= V_0(\epsilon v_y), & v_{z2} &= V_0(\epsilon v_z) \\ p_2 &= p_0(1 + \epsilon p), & \rho_2 &= \rho_0(1 + \epsilon \rho) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь V_0, p_0, ρ_0 — скорость, давление и плотность невозмущенного течения за скачком; v_x, v_y, v_z, p, ρ — соответствующие возмущения; индекс 2 соответствует течению за скачком; ϵ — малый параметр, характеризующий порядок возмущений. Если в уравнениях поверхности крыла и его кромки

$$Z = \epsilon' Z_w(Y), \quad X = \epsilon'' X_b(Y) \tag{1.2}$$

ϵ' и ϵ'' имеют разный порядок, то под ϵ понимается больший из них. Далее считаем $\epsilon' = \epsilon'' = \epsilon$.

Линеаризованная система уравнений при $0 \leq Z \leq kX$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{M_0^2}} \frac{\partial p}{\partial X} &= 0, & \frac{\partial v_y}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{M_0^2}} \frac{\partial p}{\partial Y} &= 0, & \frac{\partial v_z}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{M_0^2}} \frac{\partial p}{\partial Z} &= 0 \\ (1 - M_0^2) \frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{\partial v_x}{\partial Y} + \frac{\partial v_z}{\partial Z} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial X} - \gamma \frac{\partial p}{\partial X} &= 0, & k &= \text{tg } \chi \end{aligned} \tag{1.3}$$

где χ — угол между поверхностями клина и скачка, M_0 — число Маха, γ — показатель адиабаты.

Используя граничное условие обтекания крыла, первое уравнение (1.2) и третье уравнение системы (1.3) получим

$$v_z = 0, \quad \partial p / \partial Z = 0 \quad (Z = 0) \tag{1.4}$$

Граничные условия на ударной волне

$$Z = kX + \epsilon \xi(X, Y) \tag{1.5}$$

можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial X} (Q - 1) &= v_x k [1 + (\gamma - 1) M_0^2] - v_z + kp, & \frac{\partial \xi}{\partial X} R(Q - 1) + v_x &= -\frac{p}{\gamma M_0^2} \\ v_y &= R \frac{\partial \xi}{\partial Y}, & kv_z - RQ \frac{\partial \xi}{\partial X} &= \frac{p}{\sqrt{M_0^2}}, & v_x + \frac{p - \rho}{(\gamma - 1) M_0^2} &= 0 \quad (Z = kX) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$Q = \frac{1}{1 + k^2} \left(k^2 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right), \quad R = \frac{k}{1 + k^2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right), \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2(1 + k^2)}{(\gamma + 1) M_0^2 k^2}$$

Сформулируем граничное условие на кромке. Будем полагать, что поверхность присоединенной ударной волны отходит от кромки крыла. Подставив уравнения (1.2) в уравнение (1.5), получим в линейном приближении

$$\xi(0, Y) = Z_w(Y) - kX_b(Y) \equiv f(Y)$$

На кромке одновременно выполняются условия (1.4) и (1.6), следовательно

$$v_z = p = 0, \quad v_y = Rf'(Y) \quad (1.7)$$

Исключая из уравнений функции v_x , ρ , ξ , получим следующую систему:

$$\frac{\partial v_y}{\partial X} + \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial X} + \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\gamma M_0^2}{M_0^2 - 1} \left(\frac{\partial v_y}{\partial Y} + \frac{\partial v_z}{\partial Z} \right) = 0 \quad (1.8)$$

с условиями на ударной волне

$$v_z = \frac{p}{\gamma M_0^2} \frac{kk_0^2 RQ + S}{Sk + RQ}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial Z} = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{R(1 - k^2 k_0^2)}{Sk + RQ} \right] \frac{\partial p}{\partial Y \gamma M_0^2} \quad (Z = kX)$$

$$S = (Q - 1)\{1 + Rk[1 + (\gamma - 1)M_0^2]\}, \quad k_0^2 = M_0^2 - 1$$

и условиями (1.4) и (1.7) на крыле и кромке.

Разложим теперь возмущение $f(Y)$ на компоненты Фурье и рассмотрим одну компоненту

$$v_y(0, Y, 0) = Rd[\Delta \exp(imY)] / dY = Ri\Delta m \exp(imY)$$

Считая, что зависимость всех величин от координаты Y определяется множителем $\exp(imY)$, и производя замену следующих переменных

$$p(M_0^2 - 1)^{1/2} / \gamma M_0^2 = w, \quad v_z = u, \quad v_y = -iv, \quad mZ = x, \quad mX / k_0 = y$$

получим задачу, рассмотренную Зайделем [1].

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - w = 0 \quad (1.9)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x = 0), \quad u = aw, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Bw \quad (x = \beta y)$$

$$u = w = 0, \quad v = v_0 \quad (x = y = 0)$$

$$a = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad B = -\frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{R(1 - \beta^2)}{Sk + RQ} \right], \quad \beta = kk_0 < 1, \quad v_0 = -R\Delta m$$

Здесь λ — коэффициент отражения [6].

2. Решение при обтекании со сверхзвуковой скоростью. Используя преобразование Лапласа, находим решение задачи (1.9) через функции Бесселя

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\text{ch}(2n+1)\theta}{\text{ch}(2n+1)\theta_0} J_{2n+1}(r)$$

$$B_0 = -2v_0 \text{sh } \theta_0 / (a + \text{th } \theta_0), \quad B_1 = B_0 [(a - 2b) + \text{th } \theta_0] / (a + \text{th } 3\theta_0)$$

$$B_{n-1} [a - \text{th}(2n-1)\theta_0] + 2bB_n + B_{n+1} [a + \text{th}(2n+1)\theta_0] = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

$$r = \frac{mX}{k_0} \sqrt{1 - \tau^2}, \quad \text{ch}(2n+1)\theta = 0.5[(1 + \tau)^{2n+1} + (1 - \tau)^{2n+1}] (1 - \tau^2)^{-(n-0.5)},$$

$$\tau = \frac{Z}{X} k_0, \quad b = \sin 2\alpha / \sin 2\chi - a,$$

$$\theta = \theta_0 \text{ при } \tau = \beta, \quad \theta = 0 \text{ при } \tau = 0,$$

где α — угол Маха.

Предположим, что $f(Y)$ — четная функция, тогда она разлагается в ряд Фурье по косинусам mY ($m = 1, 2, \dots$), и при переходе от $w(r, \theta)$ к $p(X, Y, Z)$ нужно взять действительную часть соответствующей суммы по m различным функциям $w(r, \theta)$, отвечающих каждому m . Для нечетной $f(Y)$ берется коэффициент при мнимой части. Произвольную $f(Y)$ всегда можно рассматривать как сумму четной и нечетной компоненты. Практически наиболее важно знать давление на поверхности крыла, тогда

$$p(X, Y, Z)|_{z=0} = -\frac{\gamma M_0^2 R}{k_0} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{2n+1} \left(\frac{mX}{k_0} \right) \frac{\cos mY}{\text{ch}(2n+1)\theta_0} \quad (2.2)$$

для четных функций и такое же выражение для нечетных с заменой $\cos mY$ на $-\sin mY$. Здесь $D_m = m\Delta(m)$ — коэффициенты Фурье функции $f'(Y)$, $b_n = -B_n/v_0$.

Так как функции $Z_w(Y)$ и $X_b(Y)$ входят в задачу только в виде комбинации $Z_w(Y) - kX_b(Y) \equiv f(Y)$, то ясна определенная эквивалентность в искривлении кромки и поверхности крыла: можно, например, для любой наперед заданной кромки так подобрать поверхность, чтобы суммарный эффект был равен нулю. Отсюда же следует эквивалентность треугольных и V-образных крыльев при обтекании без скольжения.

Так, для V-образного крыла со стреловидностью (фиг. 1) уравнения (1.2) примут вид

$$Z = \varepsilon\beta_0|Y|, \quad X = \varepsilon\sigma_0|Y| \quad (2.3)$$

Здесь $\varepsilon\beta_0$ — угол V-образности, $\varepsilon\sigma_0$ — угол стреловидности. Тогда

$$f'(Y) = (\beta_0 - k\sigma_0) \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mY}{(2m-1)}, \quad D_m = \frac{4(\beta_0 - k\sigma_0)}{(2m-1)\pi} \quad (2.4)$$

На фиг. 2 ($M_1 = 2$) и 3 ($M_1 = 5$) показано распределение безразмерного избыточного давления $p_* = p / (\beta_0 - k\sigma_0)$ на крыле при различных углах атаки и $\gamma = 1.4$. Естественно, что по формуле (2.2) получается давление не только на участке внутри конуса Маха, идущего из вершины, но и на участке вне конуса, где избыточное давление равно нулю. Поскольку график давления здесь совпадает с соответствующим отрезком оси Y , он на фигурах 2—3 не показан. Кривые получены при $X = 1$ и с интервалом в 6° по углу $\omega = \delta + \chi$, где δ — угол клина. На фиг. 2 кривая 1 — $\delta = 1^\circ 14'$ ($k = 0.572$), 2 — $\delta = 7^\circ 47'$ ($k = 0.559$), 3 — $\delta = 13^\circ 11'$ ($k = 0.573$), 4 — $\delta = 17^\circ 31'$ ($k = 0.612$), 5 — $\delta = 20^\circ 44'$ ($k = 0.681$). На фиг. 3 1 — $\delta = 2^\circ 13'$ ($k = 0.191$), 2 — $\delta = 9^\circ 35'$ ($k = 0.166$), 3 — $\delta = 15^\circ 39'$ ($k = 0.165$), 4 — $\delta = 21^\circ 2'$ ($k = 0.176$), 5 — $\delta = 25^\circ 58'$ ($k = 0.195$), 6 — $\delta = 30^\circ 28'$ ($k = 0.222$), 7 — $\delta = 34^\circ 29'$ ($k = 0.259$), 8 — $\delta = 37^\circ 50'$ ($k = 0.309$).

3. Обтекание с гиперзвуковой скоростью. Для линеаризации вместо формул (1.1) используем формулы работы [2]

$$v_{x2} = V_1(1 + O(\delta^2)), \quad v_{y2} = V_1\varepsilon\delta v_y,$$

$$v_{z2} = V_1\varepsilon\delta v_z$$

$$(p_2 - p_1) / \rho_1 V_1^2 =$$

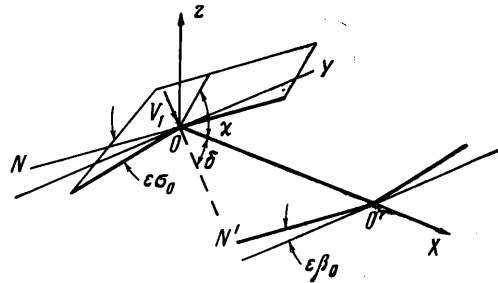
$$= [(\gamma + 1) / 2] \delta^2 (1 + \varepsilon\rho),$$

$$\rho_2 = \rho_1 [(\gamma + 1) / (\gamma - 1)] (1 + \varepsilon\rho)$$

Здесь индекс 1 относится к течению перед скачком.

Линеаризованная система уравнений после перехода от X, Y, Z к координатам $X_1 = X, Y_1 = Y/\delta, Z_1 = Z/\delta$ примет вид

$$\frac{\partial v_y}{\partial X_1} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial p}{\partial Y_1} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial X_1} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial p}{\partial Z_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial X_1} + \gamma \left(\frac{\partial v_y}{\partial Y_1} + \frac{\partial v_z}{\partial Z_1} \right) = 0 \quad (3.1)$$



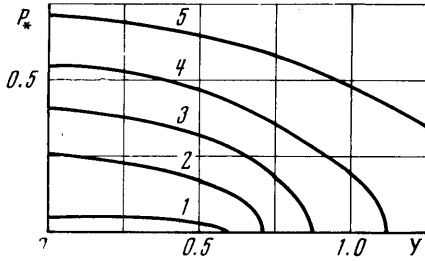
Фиг. 1

Эта система — аналог системы (1.8). Система уравнений на ударной волне

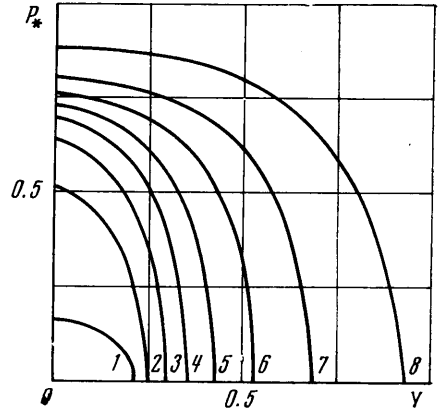
$$Z_1 = [(\gamma - 1) / 2] X_1 + \varepsilon \xi(X_1, Y_1)$$

$$v_z = \frac{p}{2}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial Z_1} = -\frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)} \frac{\partial p}{\partial X_1}$$

$$\left(Z_1 = \frac{\gamma - 1}{2} X_1 \right) \quad (3.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Условие на крыле $Z_1 = \varepsilon Z_w(Y_1)$ и кромке $X_1 = \varepsilon X_b(Y_1)$

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z_1} = 0 \quad (z_1 = 0) \quad (3.3)$$

$$v_z = p = 0, \quad v_y = -[Z_w'(Y_1) - 0.5(\gamma - 1)X_b'(Y_1)] \equiv -f_1'(Y_1) \quad (X_1 = Z_1 = 0) \quad (3.4)$$

Задача (3.1) — (3.4) после разложения $f_1(Y_1)$ на компоненты Фурье и рассмотрения одной компоненты $\Delta \exp(imY_1)$ сводится к задаче (1.9) заменой

$$p[(\gamma - 1) / 2\gamma]^{1/2} = w, \quad v_z = u, \quad v_y = -iv$$

$$mZ_1 = x, \quad mX_1[\gamma(\gamma - 1) / 2]^{1/2} = y$$

При этом

$$a = [\gamma / 2(\gamma - 1)]^{1/2}, \quad B = a(3 - \gamma) / (\gamma - 1), \quad \beta = [(\gamma - 1) / 2\gamma]^{1/2}, \quad v_0 = \Delta m$$

Отметим, что $\beta = kk_0$ и $a = (1 - \lambda) / (1 + \lambda)$ при стремлении параметра гиперзвукового подобия $M_1 \delta$ к бесконечности стремятся к соответствующим гиперзвуковым значениям $[(\gamma - 1) / 2\gamma]^{1/2}$ и $[\gamma / 2(\gamma - 1)]^{1/2}$.

Как и в задаче о поршне [1], в предельном случае сильной ударной волны получаем особый случай $a = b = [\gamma / 2(\gamma - 1)]^{1/2}$.

Коэффициенты B_n соответственно упрощаются

$$B_0 = -2v_0 \operatorname{sh} \theta_0 / (a + \operatorname{th} \theta_0),$$

$$[a - \operatorname{th} (2n - 1)\theta_0] B_{n-1} +$$

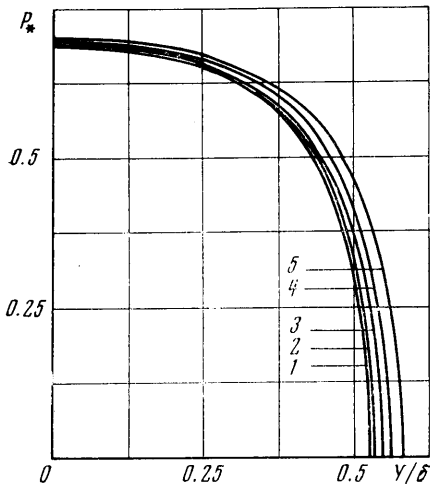
$$+ [a + \operatorname{th} (2n + 1)\theta_0] B_n = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

В решении (2.1) теперь

$$r = mX_1[(1 - \tau^2)\gamma(\gamma - 1) / 2]^{1/2},$$

$$\tau = Z_1[2 / \gamma(\gamma - 1)]^{1/2} / X_1$$



Фиг. 4

Аналогично формуле (2.2) получаем для давления на крыле

$$p(X_1, Y_1, 0) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n I_{2n-1} \left(m X_1 \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \right) \frac{\cos m Y_1}{\operatorname{ch}(2n+1)\theta_0} \quad (3.5)$$

для четной $f_1(Y_1)$ и такое же выражение с заменой $\cos m Y_1$ на $-\sin m Y_1$ для нечетной.

Переходя к V -образному крылу со стреловидностью, заменим в формулах (2.3)–(2.4) X, Y, Z на X_1, Y_1, Z_1 и вновь получим

$$D_m = 4[\beta_0 - (\gamma-1)\sigma_0/2] / (2m-1)\pi$$

В отличие от сверхзвукового случая здесь для фиксированного γ существует только одна кривая I на фиг. 4, $p_* = p / (\beta_0 - k\sigma_0/\delta)$. Впервые она получена в работе [2] при $Z_w(Y_1) \equiv 0$, $X_b(Y_1) = \sigma_0|Y_1|$, т. е. для треугольного крыла. На фиг. 4 также показаны кривые для конечных углов атаки, полученные по формуле (2.2), кривая 1 $\delta = 4^\circ 10'$ ($k/\delta = 0.200$), 2 $\delta = 8^\circ 19'$ ($k/\delta = 0.202$), 3 $\delta = 12^\circ 27'$ ($k/\delta = 0.206$), 4 $\delta = 16^\circ 32'$ ($k/\delta = 0.210$), 5 $\delta = 20^\circ 34'$ ($k/\delta = 0.217$). Ясна сходимость этих кривых к предельной, рассчитанной по формуле (3.5), уже кривая при $\delta = 4^\circ 10'$ практически совпадает с предельной. Теперь становится понятным и явное сгущение кривых давления при $M_1 = 5$ (фиг. 3), при $Y = 0$ и $p / (\beta_0 - k\sigma_0) \simeq 0.7$ — это гиперзвуковой эффект. По мере роста числа Маха центр сгущения несколько смещается вниз, а сгущение резко усиливается. Сходимость сверхзвуковых кривых к предельной по мере усиления интенсивности скачка и уменьшения угла атаки не одинакова при различных Y . На оси симметрии она на порядок лучше (и чувствуется уже при небольших числах Маха и не обязательно при малых углах атаки), чем в периферийной области конуса Маха, исходящего из вершины. Худшая сходимость в периферийной области объясняется тем, что стремление $M_0\delta \rightarrow [2/\gamma(\gamma-1)]^{1/2}$ при $M_1\omega \rightarrow \infty$ выполняется лишь при очень большой интенсивности скачка [6].

Автор благодарит Г. Г. Черного за внимание к работе. НИИ Механики МГУ.

Поступила 5 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. З а й д е л ь Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
2. M a l m u t h N. D. Hypersonic flow over a delta wing of moderate aspect ratio. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 3.
3. Т е р - М и н а с я н ц С. М. Задача о сверхзвуковом обтекании нижней поверхности треугольного крыла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
4. L i g h t h i l l M. J. The diffraction of blast 1. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1949, vol. 198, No. 1055.
5. L i g h t h i l l M. J. The diffraction of blast 2. Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1950, vol. 200, p. 554–565.
6. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.