Подобные расчеты служат основой для получения характеристик охвата пласта процессом поршневого вытеснения до и после прорыва вытесняющей жидкости в скважину.

Поступила 22 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Об источниках и стоках на поверхности. ПММ, 1950, т. 14, вып. 1.
2. Пилатовский В. П. Определение дебита батареи скважин, дренирующих конический пласт. Докл. АН СССР, 1952, т. 87, № 6.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.

УДК 532.581—3

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. З. АВЕРБУХ

(*Москва*)

В работе рассматривается задача о движении деформируемого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Выведены формулы для количества движения и момента количества движения жидкости. Формулы имеют такой же вид, как и при движении абсолютно твердого тела. Выведены формулы для силы и момента сил, действующих со стороны жидкости на тело.

Пусть в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, движется тело с деформируемой поверхностью. Силы и момент, действующие на него со стороны жидкости, равны соответственно

$$\mathbf{F} = -\int_{\Sigma} p\mathbf{n}\, d\sigma, \qquad \mathbf{M}_S = -\int_{\Sigma} \mathbf{r} \times p\mathbf{n}\, d\sigma \tag{1}$$

где p — давление жидкости, Σ — поверхность тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительно неподвижной точки S, $\mathbf{n}$ — единственный вектор нормали к поверхности Σ, направленный в жидкость.

Предполагая движение жидкости потенциальным, для потенциала φ имеем следующую задачу Неймана:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2}$$

$$(\partial\varphi / \partial n)\,|_{\Sigma} = \mathbf{v}_M \cdot \mathbf{n}, \quad \operatorname{grad} \varphi\,|_{\infty} = 0 \tag{3}$$

где $\mathbf{v}_M$ — скорость точки $\mathbf{M}$ поверхности тела. На бесконечности справедливы следующие оценки:

$$\varphi = O(R^{-1}), \qquad |\mathbf{v}| = O(R^{-2}) \tag{4}$$

$$R = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

Предполагая, что массовые силы отсутствуют и используя оценки (4) аналогично тому, как это делается при движении абсолютно твердого тела [1], получим выражения для силы и момента, действующих на тело со стороны жидкости

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dF} \int_{\Sigma} \rho\varphi\mathbf{n}\, d\sigma, \qquad \mathbf{M}_S = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho\varphi\mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\sigma \tag{5}$$

Формулы (5) такие же, как и при движении абсолютно твердого тела. В качестве количества движения жидкости и момента количества движения жидкости введем

$$\mathbf{Q} = -\int_{\Sigma} \rho\varphi\mathbf{n}\, d\sigma, \qquad \mathbf{K}_S = -\int_{\Sigma} \rho\varphi\mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\sigma$$

Свяжем с точкой O тела декартову систему координат OX_1, X_2, X_3, которая движется поступательно со скоростью $\mathbf{U}_0$ точки O и вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда скорость $\mathbf{v}_M$ любой точки поверхности тела представится в виде

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{U}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_d$$

где $\mathbf{v}_d$ — скорость движения относительно системы OX_1, X_2, X_3. Граничное условие (2) будет иметь вид

$$(\partial\varphi / \partial n)\,|_\Sigma = (\mathbf{U}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_d) \cdot \mathbf{n} \tag{6}$$

На поверхности тела выполняется кинематическое условие

$$\frac{\partial f}{\partial t} + |\operatorname{grad} \varphi| \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d = 0 \tag{7}$$

где $f(\mathbf{r}_0, t) = 0$ — уравнение поверхности Σ: в системе $OX_1X_2X_3$. С учетом (7) условие (6) можно представить в виде

$$(\partial\varphi/\partial n)\,|_\Sigma = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{n}) - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}$$

Представим потенциал φ в виде суммы

$$\varphi = \Phi + \varphi_i U^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$U^1 = u_{01}, \quad U^2 = u_{02}, \quad U^3 = u_{03}, \quad U^4 = \omega_1, \quad U^5 = \omega_2, \quad U^6 = \omega_3 \tag{8}$$

где u_{0k}, ω_k — проекции $\mathbf{u}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси $OX_k (k = 1, 2, 3)$. Потенциалы φ_i, Φ удовлетворяют уравнению (2), условию (3) и следующим граничным условиям:

$$(\partial\varphi_k / \partial n)\,|_\Sigma = n_k, \quad (\partial\varphi_{k+3} / \partial n)\,|_\Sigma = (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{n})_k \tag{9}$$

$$(\partial\Phi/\partial n)\,|_\Sigma = -\frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \tag{10}$$

К шести киргофовским потенциалам φ_i прибавился еще потенциал Φ, связанный с деформацией. В потенциалах φ_i тот факт, что тело деформируется, проявляется в зависимости их от времени.

Рассмотрим кинетическую энергию жидкости

$$2E = \int\limits_V \rho v^2\, d\tau = -\int\limits_\Sigma \rho\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

Учитывая (8) — (10), представим ее в виде

$$2E = \mu_{i;}\; u^i u^j + 2\lambda_i u^i + \nu \quad (i, j = 1, 2, \ldots, 6)$$

$$\mu_{ij} = -\rho \int\limits_\Sigma \varphi_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\, d\sigma = -\rho \int\limits_\Sigma \varphi_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\, d\sigma = \mu_{ji}$$

$$\lambda_i = -\rho \int\limits_\Sigma \varphi_i \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, d\sigma = -\rho \int\limits_\Sigma \Phi \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\, d\sigma$$

$$\nu = -\rho \int\limits_\Sigma \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, d\sigma$$

Используя введенные коэффициенты μ_{ij} и λ_i, количество и момент количества движения жидкости можно представить в виде

$$Q_k = (\mu_{ik} u^i + \lambda_k), \qquad \mathbf{K}_S = \mathbf{r}_{S0} \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}_0$$
$$K_{0k} = (\mu_{ik+3} u^i + \lambda_{k+3}) \tag{11}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{Q} = \operatorname{grad}_{\mathbf{u}0} E, \qquad \mathbf{K}_0 = \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} E$$

Таким образом, чтобы определить силу и момент, действующие со стороны жидкости на тело, необходимо в каждый данный момент времени решать шесть задач Неймана (9). После этого вычисляются коэффициенты μ_{ij} и λ_i, являющиеся функциями времени. Задачу (10) решать не нужно, так как ν в (11) не входит. Тензор μ_{ij} в каждый момент времени равен тензору присоединенных масс абсолютно твердого тела, совпадающего в этот момент времени с деформируемым телом. Среди коэффициентов λ_i возможны упрощения, если поверхность Σ обладает свойствами симметрии.

В плоском случае задача рассмотрена Ю. Л. Якимовым [2].

Автор благодарит Н. А. Слезкина за постановку задачи и консультации.

Поступила 8 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
2. Якимов Ю. Л. Уравнения движения тонкого тела в возмущенном потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.

УДК 532.546

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕРИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТА ПРИ НАГНЕТАНИИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

Н. Л. РАКОВСКИЙ, О. Э. ЦЫНКОВА

(*Москва*)

Рассмотрено нагревание конвективным слоем жидкости прилегающих к нему полупространства и полосы. Задача возникла в связи с изучением закачки теплоносителя в неоднородный нефтяной пласт.

Движение теплоносителя в однородном пласте рассматривается в [1–4]. Наибольшее применение в практике конкретных расчетов нашла работа [1], в которой известное решение Карслоу о нагревании полупространства конвективным слоем жидкости [5] интерпретировано для нефтяного пласта и прилегающей к нему породы.

В [6, 7] даются некоторые обобщения решения [1] на случай неоднородного пласта. В [6] рассмотрено два продуктивных слоя, разделенных непроницаемым пропластком, который вводится как тонкая стенка теплообменника. Теплообмен между слоями принимается пропорциональным разности температур. В [7] в аналогичной постановке исследуется течение горячей жидкости в трещиновато-пористом коллекторе.

Здесь дано обобщение решения [1] без дополнительных предположений о характере теплообмена между высокопроницаемыми и малопроницаемыми слоями. В последних выполняется уравнение теплопроводности. Тем самым не требуется ограничивать мощности малопроницаемых слоев.

1. Предлагается следующая схема неоднородного пласта: симметричный пласт, который состоит из двух высокопроницаемых слоев, разделенных и окаймленных сверху и снизу непроницаемыми слоями. При этом непроницаемые слои здесь не перегородки, а модели слабопроницаемых нефтенасыщенных пропластков, нагревание которых происходит в основном за счет теплообмена с соседними слоями.

Теплофизические свойства непроницаемых слоев принимаются независимыми от температуры и совпадающими с теми же свойствами горных пород, прилегающих к пласту.

Далее, как и в [1], предполагается, что теплопроводность в горизонтальном направлении пренебрежимо мала и в пласте и в породе. Предполагается также, что температура по сечению конвективного слоя постоянна.

В силу симметрии задачи рассматривается верхняя полуплоскость. Имеем

$$\partial T_{1,2}/\partial t = \varkappa \partial^2 T_{1,2}/\partial z_{1,2}^2$$

где индекс 1 относится к пространству над проницаемым слоем, индекс 2 — к полосе под ним.

Остальные обозначения очевидны.