

кернах, трещины в которых создавались искусственным путем. Для сопоставления было выбрано два образца. В первом ( $\xi_0 = 68.5$ ) имелась одна вертикальная трещина, второй ( $\xi_0 = 83.2$ ) имел одну вертикальную и 8 наклонных (под  $45^\circ$ ) трещин. На фиг. 4 представлены экспериментальные и расчетные кривые изменения нефтеотдачи и концентрации растворителя ( $1 - C_1$ ) на выходе во времени. Пунктирные линии соответствуют экспериментальным данным.

Для обоих образцов расчетные кривые  $\eta(t)$  неизменно согласуются с экспериментальными, в то же время для концентрации  $1 - C_1(t)$  получено существенное расхождение, причем оно больше для образца с одной вертикальной трещиной. Это объясняется, по-видимому, неполной адекватностью используемой модели сплошной среды керну с небольшим числом трещин. Так, в условиях экспериментов на кернах наблюдался заметный конвективный поток в блоках, которым пренебрегается (см. (2.1)) в расчетной модели.

Авторы благодарны Б. М. Ентову за обсуждение работы.

Поступило 28 XI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

- Баренблatt Г. И., Желтова Ю. П., Коцина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
- Баренблatt Г. И., Желтова Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
- Сейдж Б. Х. Термодинамика многокомпонентных систем. М., «Недра», 1969.
- Thompson J. L., Mungan N. A laboratory study of gravity drainage in fractured systems under miscible Conditions society of petr. Eng. Journal, 1969, vol. 9, No. 2.

УДК 532.546.013.3

#### О СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КУПОЛООБРАЗНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Ю. С. АБРАМОВ, В. А. КИСЕЛЬ

(Киев)

Решена задача о пространственной фильтрации однородной несжимаемой жидкости в мощном искривленном пласте. Рассмотрены различные варианты изменения проницаемости и пористости среды в вертикальном разрезе. В известных работах [1, 2] изучены фильтрационные потоки в однородных «тонких» (т. е. с изчезающей малой мощностью) искривленных пластах.

1. Рассматривается фильтрация в куполообразном пласте, непроницаемая кровля и подошва которого образованы поверхностями концентрических полусфер радиусов  $b$  и  $a$  соответственно (фиг. 1). Пласт дренирован точечным стоком обильности  $q$  в точке со сферическими координатами  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  на периферии купола. Кольцевой вырез  $A - A$  ( $b \leq r \leq a, \theta = \pi/2$ ) является поверхностью питания, на которой сохраняется постоянное давление  $u_0$ . Пористая среда анизотропна. Проницаемость  $k_{\theta\theta}$  вдоль координатных поверхностей  $r = \text{const}$ , проницаемость  $k_r$  вдоль координатных поверхностей  $\theta = \text{const}$  и пористость  $m$  являются функциями координаты  $r$ .

Можно показать, что распределение давления  $u(r, \theta, \varphi)$  в пласте описывается уравнением

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \left[ 2 + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln \frac{k_r}{m} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \\ + \kappa^2 \left( \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = \\ = \frac{q \mu m \delta (r - r_0)}{2 \pi k_r} [\delta(1 - \cos \psi_1) - \delta(1 - \cos \psi_2)] \quad (\kappa^2 = k_{\theta\theta}/k_r) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\delta(r - r_0)$  и  $\delta(1 - \cos \psi_i)$  — дельта-функции;  $\mu$  — вязкость фильтрующейся жидкости;  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — углы, образованные радиусом, конец которого имеет координаты  $(r, \theta, \phi)$ , с радиусами, координаты концов которых есть соответственно  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$  и  $(r_0, \pi - \theta_0, \phi_0)$ . Следовательно

$$\cos \psi_i = (-1)^{i+1} \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\phi - \phi_0)$$

Предполагается, что  $k_{\theta\phi}$ ,  $k_r$  и  $m$  — монотонные функции  $r$

$$m = a_0(r/b)^{\beta_0}, \quad k_{\theta\phi} = a_1(r/b)^{\beta_1}, \quad k_r = a_2(r/b)^{\beta_2} \quad (1.2)$$

Здесь  $a_0, a_1, a_2$  — постоянные, имеющие размерности проницаемости,  $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$  и  $\beta_2$  — безразмерные параметры.

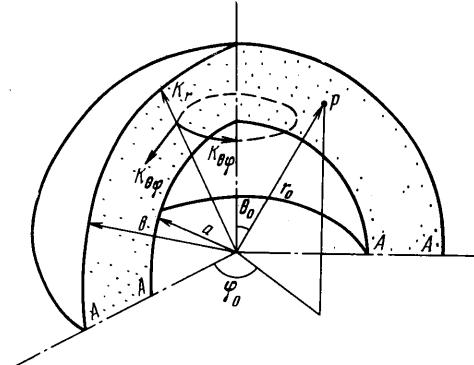
Выбор функций  $m$ ,  $k_{\theta\phi}$  и  $k_r$  в виде (1.2) отражает существенную особенность многих нефтяных коллекторов, характеризующихся закономерным уменьшением (увеличением) проницаемости по разрезу в направлении от кровли к подошве и анизотропией, вызванной условиями осадконакопления.

Имея в виду представление

$$\begin{aligned} &\delta(1 - \cos \psi_1) - \delta(1 - \cos \psi_2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [P_n(\cos \psi_1) - \\ &- P_n(\cos \psi_2)] = \Phi_n(\cos \psi_i) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $P_n(\cos \psi_i)$  — полином Лежандра степени  $n$ , решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$u = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \Phi_n(\cos \psi_i) \quad (1.4)$$



Фиг. 1

где  $R_n$  подлежит определению.

Подстановка (1.2), (1.3) и (1.4) в (1.1) разделяет в нем переменные и приводит к уравнению относительно  $R_n$

$$\begin{aligned} &r^2 R_n'' + r(2 + \beta_2 - \beta_0) R_n' - n(n+1) a_1 a_2^{-1} b^{\beta_2 - \beta_0} r^{\beta_1 - \beta_2} R_n = \\ &= f(r) \delta(r - r_0) \quad (1.5) \\ &f(r) = q \mu a_0 (2n+1) (4 \pi a_2 b^{\beta_0 - \beta_2})^{-1} r^{\beta_0 - \beta_2} \end{aligned}$$

Вариация произвольных постоянных в решении соответствующего однородного уравнения [3] дает

$$R_n = r^\xi [C_1 I_v(sr^n) + C_2 K_v(sr^n)] + \varepsilon f(r_0) r_0^{-(\xi+1)} \eta^{-1} [I_v(sr^n) K_v(sr_0^n) - K_v(sr^n) I_v(sr_0^n)] \quad (1.6)$$

$$\xi = -\frac{1}{2}(1 + \beta_2 - \beta_0), \quad \eta = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2), \quad v = \text{mod } (\xi \eta^{-1})$$

$$s = \eta^{-1} b^{-\eta} [n(n+1) a_1 a_2^{-1}]^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} [1 + \text{sign } (r - r_0)]$$

Здесь  $I_v$  и  $K_v$  — модифицированные функции Бесселя. Условия непроницаемости кровли и подошвы пласта

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (r = a, r = b) \quad (1.7)$$

определяют коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$

$$C_1 = -\gamma_2(a) \gamma_3 d^{-1}, \quad C_2 = \gamma_1(a) \gamma_3 d^{-1} \quad (1.8)$$

$$\gamma_1(z) = (\xi + v\eta) I_v(sz^n) + s\eta z^n I_{v-1}(sz^n)$$

$$\gamma_2(z) = (\xi + v\eta) K_v(sz^n) - s\eta z^n I_{v+1}(sz^n)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= f(r_0) r_0^{-(1+\xi)} b^{-\xi} \{ [v K_v(s b^n) - s b^n K_{v+1}(s b^n)] I_v(sr_0^n) - \\ &- [v I_v(s b^n) + s b^n I_{v+1}(s b^n)] K_v(sr_0^n) \} \end{aligned}$$

$$d = \gamma_1(a) \gamma_2(b) - \gamma_1(b) \gamma_2(a)$$

Формулы (1.4), (1.6) и (1.8) — решение задачи.

Для пласта с постоянным показателем анизотропии ( $\kappa^2 = \text{const}$ ) решение извлекается из (1.4), (1.6) и (1.8) при  $\beta_1 = \beta_2$ . В результате выражение для  $R_n$  упрощается

$$R_n = -f(r_0)r_0^{\frac{\beta_2-\beta_0}{2}}N^{-1}(r_0^{\mu_1}r^{\mu_2} + A_nr^{\lambda_2} + B_nr^{\lambda_1}) \quad (1.9)$$

$$N = 2[\xi^2 + \kappa^2 n(n+1)], \quad \mu_k = \xi - 2^{-1}(-1)^k N \operatorname{sign}(r-r_0), \quad \lambda_k = \xi - 2^{-1}(-1)^k N$$

$$A_n = a^{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_2 r_0^N - \lambda_1 b^N)[\lambda_2 r_0^{\lambda_2}(b^N - a^N)]^{-1},$$

$$B_n = (\lambda_1 a^N - \lambda_2 r_0^N)[\lambda_1 r_0^{\lambda_2}(b^N - a^N)]^{-1}$$

Если пласт дренируется системой (линией) точечных стоков, то решение обобщается с помощью суперпозиции.

2. Представляет интерес случай, когда проницаемости или пористость достигают экстремума или терпят разрыв на поверхностях, заключенных между кровлей и подошвой пласта.

Пусть куполообразный пласт с непроницаемой кровлей ( $r = b$ ) и подошвой ( $r = a$ ) делится поверхностью сферы  $r = c$  ( $a < c < b$ ) на два сообщающихся слоя. В каждом из слоев проницаемости  $k_{\theta\varphi}$  и  $k_r$  и пористость изменяются монотонно по закону (1.2), если  $a_i$  и  $\beta_i$  заменить обозначениями  $a_i^*$  и  $\beta_i^*$  или  $a_i^{**}$  и  $\beta_i^{**}$ . (Одна звездочка обозначает принадлежность слову  $c \leqslant r \leqslant b$ , а две звездочки — слову  $a \leqslant r \leqslant c$ . Соответственно ниже одна или две звездочки в обозначениях требуют замены величин  $a_i$  и  $\beta_i$  величинами  $a_i^*$  и  $\beta_i^*$  или  $a_i^{**}$  и  $\beta_i^{**}$ .) Такие условия позволяют моделировать один экстремум или разрыв каждой проницаемости и пористости на поверхности  $r = c$ . Если нижние индексы одинаковы, то условие  $\beta_i^* < 0$  и  $\beta_i^{**} < 0$  сообщает максимум, а условие  $\beta_i^* > 0$  и  $\beta_i^{**} < 0$  — минимум, соответствующей проницаемости или пористости (при определенном выборе  $a_i^*$  и  $a_i^{**}$ ). Все остальные варианты неравенства параметров описывают разрывы.

Распределение давления  $u^*$  и  $u^{**}$  в каждом из слоев выражается формулами вида (1.4) и (1.6). При этом постоянные  $c_1^*$ ,  $c_2^*$ ,  $c_1^{**}$  и  $c_2^{**}$  в  $R_n^*$  и  $R_n^{**}$  выбираются так, чтобы удовлетворить условия непроницаемости кровли и подошвы и условия сопряжения на поверхности, разделяющей слои

$$\partial u^*/\partial r = 0 \quad (r = b), \quad \partial u^{**}/\partial r = 0 \quad (r = a) \quad (2.1)$$

$$k_r^* \partial u^*/\partial r = k_r^{**} \partial u^{**}/\partial r, \quad u^* = u^{**} \quad (r = c) \quad (2.2)$$

В результате получается

$$c_1^* = \delta_1 \delta^{-1}, \quad c_2^* = \delta_2 \delta^{-1}, \quad c_1^{**} = \delta_3 \delta^{-1}, \quad c_2^{**} = \delta_4 \delta^{-1} \quad (2.3)$$

$$\delta = \det \|D_{ij}\|$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= \gamma_1^*(b), \quad d_{12} = \gamma_2^*(b), \quad d_{13} = d_{14} = d_{21} = d_{22} = 0 \\ d_{23} &= \gamma_1^{**}(a), \quad d_{24} = \gamma_2^{**}(a) \\ d_{31} &= [c^{\xi} I_v(s c^n)]^*, \quad d_{32} = [c^{\xi} K_v(s c^n)]^*, \quad d_{33} = [-c^{\xi} I_v(s c^n)]^{**} \\ d_{34} &= [-c^{\xi} K_v(s c^n)]^{**} \\ d_{41} &= L \gamma_1^*(c), \quad d_{42} = L \gamma_2^*(c), \quad d_{43} = -\gamma_1^{**}(c) \\ d_{44} &= -\gamma_2^{**}(c), \quad L = k_r^*(c) / k_r^{**}(c) \end{aligned}$$

Определители  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  и  $\delta_4$  получаются из определителя  $\delta$  заменой в нем соответствующего столбца столбцом с элементами  $\gamma_3^*$ ,  $0$ ,  $0$ ,  $0$ .

Если показатели анизотропии в слоях постоянны, то  $R_n^*$  и  $R_n^{**}$  выражаются в элементарных функциях. Когда сток располагается в верхнем слое, можно получить

$$R_n^* = [-f(r_0)r_0^{\frac{\beta_2-\beta_0}{2}}N^{-1}]^*(r_0^{\mu_1}r^{\mu_2} + A_nr^{\lambda_2} + B_nr^{\lambda_1})^*$$

$$R_n^{**} = [-f(r_0)r_0^{\frac{\beta_2-\beta_0}{2}}N^{-1}]^{**}(A_nr^{\lambda_2} + B_nr^{\lambda_1})^{**} \quad (2.4)$$

$$A_n^* = \Delta_1 \Delta^{-1}, \quad B_n^* = -A_n^* [\lambda_2 \lambda_1^{-1} (b/c)^{\lambda_2}]^* - (\lambda_2 \lambda_1^{-1} r_0^{\lambda_1} b^{\lambda_2})^*$$

$$A_n^{**} = \Delta_2 \Delta^{-1}, \quad B_n^{**} = -A_n^{**} [\lambda_2 \lambda_1^{-1} (c/a)^{\lambda_1}]^{**}$$

$$\Delta = \det \|D_{ij}\|$$

$$D_{11} = M[1 - \lambda_2 \lambda_1^{-1} (c/b)^N]^*, \quad D_{12} = [\lambda_2 \lambda_1^{-1} (c/a)^{\lambda_1} - (c/a)^{\lambda_2}]^{**}$$

$$D_{21} = ML[\lambda_2 \lambda_1^{-1} (c/b)^N - \lambda_2 \lambda_1]^*, \quad D_{22} = [(c/a)^{\lambda_2} - (c/a)^{\lambda_1}]^{**} \lambda_2^{**} / \lambda_1^{**}$$

$$M = (b^{\beta_2-\beta_0} a_1^{-1} N^{-1})^* (b^{\beta_0-\beta_2} a_1 N)^{**}$$

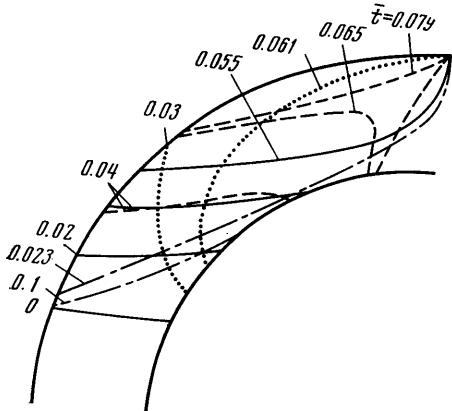
Определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  получаются из  $\Delta$  заменой в нем соответствующего столбца столбцов с элементами  $M$ ,  $-MLz$ , где

$$z = [c^{\lambda_1}(\lambda_2 \lambda_1^{-1} b^{-N} r_0^{\lambda_1} - r_0^{\lambda_2})]^*$$

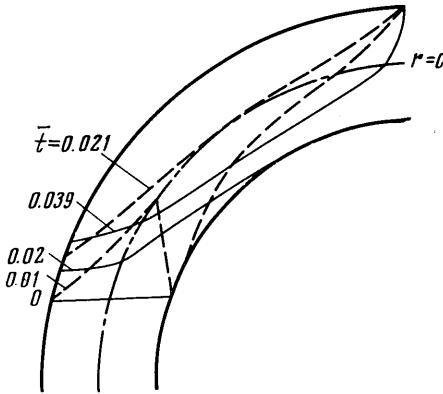
Если сток поместить в нижнем слое, то слагаемое  $r_0^{\mu_1} r^{\mu_2}$  из круглых скобок выражения для  $R_n^*$  переходит в круглые скобки выражения для  $R_n^{**}$ .

Развитый метод справедлив для любого числа слоев (т. е. экстремумов или разрывов характеристик пористой среды).

3. Найденные решения позволяют обычным путем получить информацию о притоке к скважинам и о движении границы раздела «разноцветных» жидкостей. По-



Фиг. 2



Фиг. 3

следнее непременно требует применения ЭВМ для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения отмеченной частицы жидкости

$$\frac{dr}{dt} = -k_r \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{k_{\theta\phi}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{k_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.1)$$

Здесь  $t$  — физическое время.

Система (3.1) интегрировалась методом Рунге — Кутта, при вычислении специальных функций и их первых производных использованы их стандартные разложения в ряды.

На фиг. 2 в разрезе показаны последовательные положения границы раздела при ее продвижении к точечной скважине, вскрывшей центр кровли ( $\theta_0 = 0$ ,  $r_0 = b$ ) пласта, радиусы кровли и подошвы которого связаны соотношением  $a/b = 0.7$ . Начальное положение границы совпадает с кольцевым вырезом плоскости  $r = 0.25 b \cos \theta$ . Сплошные линии соответствуют однородному пласту ( $\chi^2 = 1$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ ); штриховые линии — однородно-анизотропному пласту ( $\chi^2 = 4$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ ); пунктирные и штрихпунктирные линии — изотропному неоднородному пласту, проницаемость которого  $k_r = k_{\theta\phi}$  возрастает в десять раз в направлении от подошвы к кровле (пунктир —  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\chi^2 = 1$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 6.41$ ) и от кровли к подошве (штрихпунктир —  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\chi^2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = -6.41$ );  $t = tq (4\pi mb^3)^{-1}$  — безразмерное время.

На фиг. 3 приведены результаты аналогичного расчета для двухслойного пласта, в котором  $a/b = 0.7$ ,  $c/b = 0.85$ . Начальное положение границы то же, что и на фиг. 2. Сплошные линии соответствуют кусочно-однородному изотропному пласту, когда проницаемость нижнего слоя в два раза превышает проницаемость верхнего

$$\chi^* = \chi^{**} = 1, \quad \beta_0^* = \beta_1^* = \beta_2^* = \beta_0^{**} = \beta_1^{**} = \beta_2^{**} = 0, \quad \alpha_0^* = \alpha_0^{**}, \quad \alpha_1^* = \alpha_2^*, \\ \alpha_1^{**} = \alpha_2^{**}, \quad \alpha_1^*/\alpha_1^{**} = 2.$$

Штриховая линия соответствует неоднородному изотропному пласту, проницаемость которого на поверхности  $r = c$  достигает максимума, будучи в десять раз выше, чем у кровли и подошвы пласта

$$\chi^* = \chi^{**} = 1, \quad \alpha_0^* = \alpha_0^{**}, \quad \alpha_1^* = \alpha_2^*, \quad \alpha_1^{**} = \alpha_2^{**}, \quad \alpha_1^*/\alpha_1^{**} = 68.89, \\ \beta_1^{**} = \beta_2^{**} = 11.85, \quad \beta_1^* = \beta_2^* = -14.17$$

Подобные расчеты служат основой для получения характеристик охвата пласта процессом поршневого вытеснения до и после прорыва вытесняющей жидкости в скважину.

Поступила 22 XI 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Об источниках и стоках на поверхности. ПММ, 1950, т. 14, вып. 1.
2. Пилатовский В. П. Определение дебита батареи скважин, дренирующих конический пласт. Докл. АН СССР, 1952, т. 87, № 6.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.

УДК 532.581—3

## О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. З. АВЕРБУХ

(Москва)

В работе рассматривается задача о движении деформируемого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Выведены формулы для количества движения и момента количества движения жидкости. Формулы имеют такой же вид, как и при движении абсолютно твердого тела. Выведены формулы для силы и момента сил, действующих со стороны жидкости на тело.

Пусть в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, движется тело с деформируемой поверхностью. Силы и момент, действующие на него со стороны жидкости, равны соответственно

$$\mathbf{F} = - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} d\sigma, \quad \mathbf{M}_S = - \int_{\Sigma} \mathbf{r} \times p \mathbf{n} d\sigma \quad (1)$$

где  $p$  — давление жидкости,  $\Sigma$  — поверхность тела,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор относительно неподвижной точки  $S$ ,  $\mathbf{n}$  — единственный вектор нормали к поверхности  $\Sigma$ , направленный в жидкость.

Предполагая движение жидкости потенциальным, для потенциала  $\varphi$  имеем следующую задачу Неймана:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

$$(\partial \varphi / \partial n) |_{\Sigma} = \mathbf{v}_M \cdot \mathbf{n}, \quad \text{grad } \varphi |_{\infty} = 0 \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}_M$  — скорость точки  $M$  поверхности тела. На бесконечности справедливы следующие оценки:

$$\varphi = O(R^{-1}), \quad |\mathbf{v}| = O(R^{-2}) \quad (4)$$

$$R = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{v} = \text{grad } \varphi$$

Предполагая, что массовые силы отсутствуют и используя оценки (4) аналогично тому, как это делается при движении абсолютно твердого тела [1], получим выражения для силы и момента, действующих на тело со стороны жидкости

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dF} \int_{\Sigma} \rho \varphi \mathbf{n} d\sigma, \quad \mathbf{M}_S = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho \varphi \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\sigma \quad (5)$$

Формулы (5) такие же, как и при движении абсолютно твердого тела. В качестве количества движения жидкости и момента количества движения жидкости введем

$$\mathbf{Q} = - \int_{\Sigma} \rho \varphi \mathbf{n} d\sigma, \quad \mathbf{K}_S = - \int_{\Sigma} \rho \varphi \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\sigma$$