

УДК 532.5

## ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ РЕШЕТКИ ПЛАСТИН В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. Н. ГОРЕЛОВ

(Новосибирск)

Присоединенные массы плоской решетки пластин в несжимаемой жидкости определяли М. И. Гуревич (в случае синфазных поступательных колебаний [1]) и Г. С. Самойлович (для синфазных и противофазных поступательных и крутильных колебаний пластин [2]). Однако в ряде приложений возникает необходимость вычисления присоединенных масс как для более сложных форм колебаний, так и для разных значений сдвига фазы между колебаниями соседних пластин.

В данной работе приведен алгоритм расчета присоединенных масс решетки пластин, колеблющихся по произвольному закону с постоянным сдвигом фазы между колебаниями соседних пластин. Формы колебаний аппроксимируются тригонометрическими полиномами, что позволяет представить присоединенные массы в виде рядов по некоторым стандартным коэффициентам. Приведены результаты расчета этих коэффициентов в широком диапазоне изменения густоты, угла выноса и сдвига фазы.

1. Рассмотрим некоторое тело с поверхностью  $S$ , колеблющееся в жидкости. Обозначим через  $w$  перемещение поверхности  $S$  по направлению внешней нормали. Предположим, что  $w$  может быть представлено в виде

$$w(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n f_k(x, y, z) q_k(t) \quad (1.1)$$

где  $x, y, z$  — неподвижная система координат,  $t$  — время,  $q_k(t)$  — обобщенные координаты, имеющие размерность длины, а безразмерные функции координат  $f_k(x, y, z)$  — формы колебаний.

Взаимодействие колеблющегося тела с жидкостью характеризуется обобщенными гидродинамическими силами  $Q_k$ , соответствующими обобщенным координатам  $q_k$ . По определению

$$Q_k(t) = - \iint_S p(x, y, z, t) f_k(x, y, z) ds \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

где  $p$  — гидродинамическое давление.

В предположении потенциальности и малости скоростей движения жидкости гидродинамическое давление определяется интегралом Коши — Лагранжа вида

$$p - p_0 = - \rho \delta \varphi / \partial t \quad (1.3)$$

Здесь  $p_0$  — давление в покоящейся жидкости,  $\varphi$  — потенциал скорости бесциркуляционного обтекания тела, который является линейной функцией от обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). В соответствии с этим  $p$  можно представить в виде

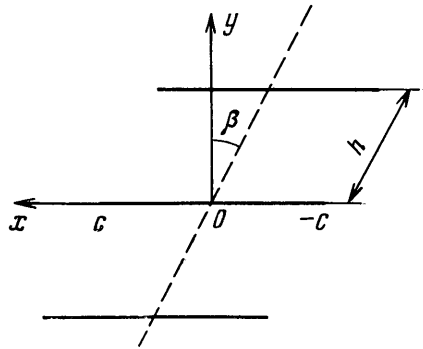
$$p - p_0 = \sum_{j=1}^n P_j(x, y, z) \ddot{q}_j(t) \quad (1.4)$$

где  $P_j(x, y, z)$  — амплитудная функция давления, определяемого при колебаниях тела по закону  $w = f_j(x, y, z)q_j(t)$ . Подставляя (1.4) в (1.2), для обобщенной силы  $Q_k$  получаем выражение

$$Q_k(t) = \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{q}_j(t), \quad m_{kj} = - \iint_S P_j(x, y, z) f_k(x, y, z) ds \quad (1.5)$$

Коэффициенты  $m_{kj}$ , имеющие размерность массы, называют присоединенными массами. Отметим, что иногда вводят коэффициенты  $m_{kj}$  с разной размерностью, что обусловлено отличием размерности выбираемых обобщенных координат от линейной.

Предположим теперь, что в жидкости находится система колеблющихся тел. В этом случае присоединенные массы какого-либо рассматриваемого тела будут зависеть не только от обобщенных координат, описывающих движение этого тела, но и от закона колебаний других тел, их формы и взаимного расположения в жидкости. В практических приложениях часто встречается случай идентичных тел, расположенных симметрично относительно некоторой оси (например, лопасти рабочего колеса гидротурбины). Если дополнительно предположить, что все тела колеблются по одному закону с постоянным сдвигом фазы  $\mu$  между колебаниями соседних тел ( $0 \leq \mu \leq 2\pi$ ), то обобщенные гидродинамические силы для каждого тела будут определяться формулами (1.5), в которых коэффициенты  $m_{kj}$



Фиг. 1

оказываются зависящими от  $\mu$  и геометрических параметров системы тел.

2. Рассмотрим более подробно плоскую решетку тонких профилей (пластин), колеблющихся в идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечном удалении от решетки. Присвоим каждому профилю последовательно номера  $\nu = 0, \pm 1, \dots$ , выбирая в качестве исходного ( $\nu = 0$ ) один из профилей. С исходным профилем свяжем систему координат  $x, y$ . Геометрические параметры решетки указаны на фиг. 1. Предположим, что формы колебаний профилей (в плоскости  $z = \text{const}$ ) можно представить тригонометрическим полиномом вида

$$f_k(x, y) = \sum_{m=0}^N b_{km} \cos m\eta \quad (x/c = \cos \eta, k = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

где  $b_{km}$  — заданные константы.

Тогда перемещение  $\nu$ -го профиля в направлении оси  $y$  можно представить в виде

$$w_\nu(x, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^N b_{km} \cos m\eta \operatorname{Re}\{e^{i\nu\mu_k} q_k(t)\} \quad (\nu = 0, \pm 1, \dots) \quad (2.2)$$

где  $\mu_k$  — сдвиг по фазе между колебаниями соседних профилей, колеблющихся с формой  $f_k, i = \sqrt{-1}$ .

Для расчета гидродинамических реакций на профили решетки достаточно рассмотреть закон колебаний  $v$ -го профиля вида

$$y(x, t) = \operatorname{Re} \{ e^{i\nu k} q_k(t) \} \cos m\eta \quad (v = 0, \pm 1, \dots, m = 0, \dots, N, \\ k = 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

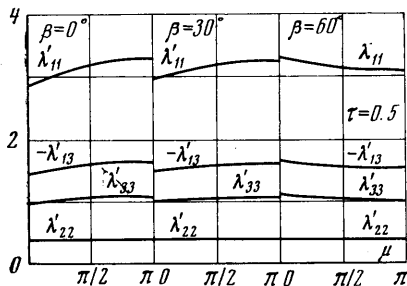
В этом случае потенциал бесциркуляционного обтекания решетки в точках исходного профиля можно представить в виде

$$\varphi(x, +0, t) = -cq_k \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} a_{\sigma}^{(m)}(\mu) \sin \sigma\eta \quad (2.4)$$

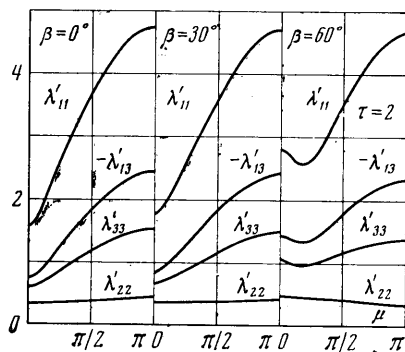
где

$$a_{\sigma}^{(m)}(\mu) = 1/2 [\delta_{0m} + \delta_{\sigma-1, m} - \delta_{\sigma+1, m} + \theta_{\sigma-1}^{(m)}(\mu) - \theta_{\sigma+1}^{(m)}(\mu)]$$

Здесь  $\delta_{nm}$  — символы Кронекера,  $\mu = \mu_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), а коэффициенты  $\theta_n^{(m)}$  учитывают влияние соседних профилей в решетке. Алгоритм



Фиг. 2



Фиг. 3

расчета  $\theta_n^{(m)}$  указан в работе [3]. Из (1.3), (2.4) следует, что перепад гидродинамического давления в точках исходного профиля решетки, профили которой колеблются по закону (2.3)

$$\Delta p(x, t) = p(x, -0, t) - p(x, +0, t) = -2rcq_k \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} a_{\sigma}^{(m)}(\mu) \sin \sigma\eta \quad (2.5)$$

Обозначим через  $\Delta Q_k$ ,  $\Delta m_{kj}$  погонные обобщенные гидродинамические силы и присоединенные массы для исходной пластины решетки. Величины  $\Delta Q_k$  и  $\Delta m_{kj}$  в рассматриваемом случае снова связаны соотношением вида (1.5). С учетом выражений (2.1) — (2.5) погонные присоединенные массы

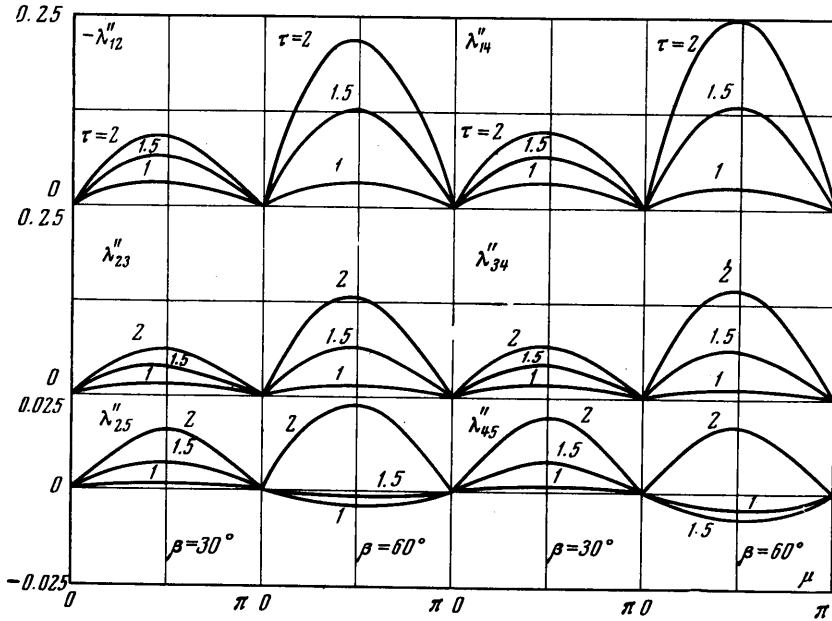
$$\Delta m_{kj} = \sum_{r=0}^N \sum_{m=0}^N b_{jr} b_{km} \lambda_{r+1, m+1} \quad (2.6)$$

где

$$\lambda_{r+1, m+1} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} [\delta_{\sigma-1, m} - \delta_{\sigma+1, m} + \delta_{0m} + \theta_{\sigma-1}^{(m)} - \theta_{\sigma+1}^{(m)}] \int_0^{\pi} \sin \eta \sin \sigma\eta \cos r\eta d\eta \quad (2.7)$$

3. Был проведен расчет коэффициентов  $\lambda_{rm}$  ( $r, m = 1, \dots, 5$ ) для решеток пластин с густотой  $\tau = 2c/h = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  и углом выноса  $\beta = 0, 30, 60^\circ$ . Сдвиг фазы  $\mu$  между колебаниями соседних пластин менялся в пределах от 0 до  $\pi$  с шагом  $\pi/5$ .

Прежде всего отметим, что коэффициенты присоединенных масс  $\lambda_{rm}$  оказываются комплексными. При этом вещественные  $\lambda_{rm}'$  и мнимые  $\lambda_{rm}''$



Фиг. 4

части коэффициентов  $\lambda_{rm}$  удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_{rm}' = \lambda_{mr}', \quad \lambda_{rm}''(\mu) = \lambda_{rm}'(2\pi - \mu), \quad \lambda_{rm}'(\beta) = \lambda_{rm}'(-\beta) \tag{3.1}$$

$$\lambda_{rm}'' = -\lambda_{mr}'', \quad \lambda_{rm}''(\mu) = -\lambda_{rm}''(2\pi - \mu), \quad \lambda_{rm}''(\beta) = -\lambda_{rm}''(-\beta)$$

Из (3.1) следует, что  $\lambda_{rm}'' = 0$  при  $\mu = 0, 2\pi$ , а также при  $\beta = 0$  или  $r = m$ . Кроме того, для рассматриваемых законов колебаний (2.3) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{rm}' &= 0, & \text{если } r + m &= 2k + 1 \\ \lambda_{rm}'' &= 0, & \text{если } r + m &= 2k \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{3.2}$$

Можно показать, что решение задач, связанных с расчетом собственных частот колебаний пластин в несжимаемой жидкости, не зависит от величины мнимых частей коэффициентов  $\lambda_{rm}$ . Поэтому практический интерес имеют лишь вещественные значения  $\lambda_{rm}$ . Результаты расчета показывают, что влияние сдвига фаз между колебаниями соседних пластин  $\mu$  и параметра густоты решетки  $\tau$  оказывается существенным для коэффициентов  $\lambda_{11}'$ ,  $\lambda_{13}'$  и  $\lambda_{33}'$  (фиг. 2, 3). При этом зависимость увеличивается с ростом густоты решетки  $\tau$  и с увеличением угла выноса  $\beta$ . Наиболее сильная зависимость имеет место для  $\lambda_{11}'$ . Для остальных же вещественных значений

коэффициентов влиянием густоты решетки и сдвига фазы  $\mu$  в рассматриваемом диапазоне изменения  $\tau$  можно пренебречь. Эти коэффициенты мало отличаются от соответствующих коэффициентов для одиночной пластины, которые вычисляются по формуле (2.7) при  $\theta_{\sigma-1}^{(m)} = \theta_{\sigma+1}^{(m)} = 0$ . Результаты расчета мнимых частей коэффициентов  $\lambda_{r,m}$  представлены на фиг. 4. Контроль за точностью вычислений осуществлялся с помощью соотношений (3.1), (3.2). Максимальная ошибка наблюдалась в четвертом знаке после запятой.

Поступила 5 I 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М., «Наука», 1969.
3. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. М., «Наука», 1974.