

УДК 538.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ИСКРИВЛЕНИИ СЛАБОГО ИОНИЗАЦИОННОГО ФРОНТА D -ТИПА

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, К. В. КРАСНОБАЕВ

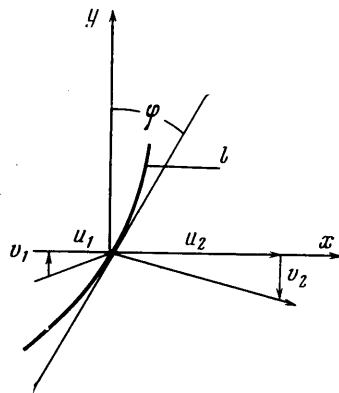
(Москва)

Методом малых возмущений изучается влияние нелинейности на изменение формы поверхности неустойчивого слабого ионизационного фронта D -типа. Предполагается, что перед и за фронтом газ несжимаемый. Учитываются члены разложения до второго порядка включительно. Показано, что в отличие от деформаций фронта пламени и при развитии неустойчивости Рэля — Тейлора участки фронта с большей кривизной выпуклы не в сторону менее плотного газа, а в противоположном направлении.

При наличии внешнего источника ионизирующего излучения, как показал Кан [1], движение газа может сопровождаться появлением ионизационных разрывов, характеризующихся резким переходом от состояния почти полной ионизации газа до нейтрального атомного состояния. Такие разрывы возникают, в частности, когда источник расположен вниз по потоку и вещество, находящееся за разрывом, прозрачно по крайней мере для части спектра ионизирующей радиации, а вещество, находящееся перед разрывом, обладает сильной поглощательной способностью в рассматриваемом спектральном интервале. В космических условиях ионизационные разрывы могут порождаться движением межзвездной среды относительно источников ионизирующего излучения, вспышками звезд.

Интерес к изучению устойчивости ионизационных фронтов обусловлен попытками объяснить неправильную структуру внешних частей зон III (образование «слоновых хоботов», римов) и проанализировать возможность обособления облаков нейтрального газа [2-12]. В последнее время вопрос о масштабе нерегулярностей, порождаемых движением ионизационного фронта, приобретает значение в связи с оценками амплитудных флуктуаций радиоизлучения пульсаров вследствие рассеяния электромагнитных волн на неоднородностях межзвездной среды [13, 14].

Пусть невозмущенный ионизационный фронт находится в плоскости $x = 0$, скорость нейтрального газа u_{01} направлена в положительную сторону оси x и излучение падает нормально к фронту (фиг. 1). За разрывом скорость $u_{02} = \lambda u_{01}$ (для слабых ионизационных фронтов D -типа $\lambda > 1$, что следует из соотношений на скачке). Плотность ρ_{01} перед фронтом в λ раз больше плотности ρ_{02} позади него, так что $\rho_{01} = \lambda \rho_{02}$. Рассматриваются двумерные возмущения плоского фронта. Как и в [6-10], возмущенное течение считается изотермическим с температурой T_1 нейтрального газа и T_2 плазмы за фронтом. Плотность ρ_1 и компоненты скорости u_1, v_1 перед фронтом



Фиг. 1

связаны со значениями этих же функций за фронтом ρ_2 , u_2 , v_2 соотношениями [15]

$$\begin{aligned} -\rho_1 v_1 (u_2 - u_1) &= (2\rho_2 R T_2 - \rho_1 R T_1) \cos \varphi \\ -\rho_1 v_1 (v_2 - v_1) &= -(2\rho_2 R T_2 - \rho_1 R T_1) \sin \varphi \\ \frac{\partial h}{\partial t} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} &= u_1 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi - v_1 \\ \frac{\partial h}{\partial t} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} &= u_2 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi - v_2, \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = \rho_{01} u_{01} \cos \varphi = \\ &= \rho_{02} u_{02} \cos \varphi \end{aligned}$$

Здесь U_1 и U_2 есть проекции скоростей газа относительно фронта на нормаль к нему, $R = h(y, t)$ — уравнение поверхности фронта.

Предполагая, что амплитуда A возмущений, наложенных на основное течение, достаточно мала, можно представить решение задачи в виде обычного разложения по степеням A . Будем учитывать члены до второго порядка включительно. Тогда возмущения скоростей и плотности по обе стороны разрыва целесообразно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_{01}} &= 1 + Au_{11} + A^2 u_{12}, & \frac{v_1}{u_{01}} &= Av_{11} + A^2 v_{12}, & \frac{\rho_1}{\rho_{01}} &= 1 + A\rho_{11} + A^2 \rho_{12} \\ \frac{u_2}{u_{02}} &= 1 + Au_{21} + A^2 u_{22}, & \frac{v_2}{u_{02}} &= Av_{21} + A^2 v_{22}, & \frac{\rho_2}{\rho_{02}} &= 1 + A\rho_{21} + A^2 \rho_{22} \end{aligned}$$

Функции u_{11} , v_{11} , ρ_{11} , u_{21} , v_{21} , ρ_{21} являются решением задачи, удовлетворяющим условиям на разрыве в линейном приближении, и имеют вид [9]

$$\begin{aligned} u_{11} &= \exp(\delta t + hx) \cos hy, & v_{11} &= -\exp(\delta t + hx) \sin hy \\ \rho_{11} &= -m^2(\lambda\eta + 1) \exp(\delta t + hx) \cos hy \\ u_{21} &= [\gamma_1 e^{-hx} + \gamma_2 \exp(-\delta x / u_{02})] e^{\delta t} \cos hy, \\ v_{21} &= [\gamma_1 h / ke^{-hx} + \gamma_2 \eta \exp(-\delta x / u_{02})] e^{\delta t} \sin hy. \\ \rho_{21} &= \gamma_1 M^2 (\delta / ku_{02} - 1) \exp(\delta t - kx) \cos hy \\ m^2 &= u_{01}^2 / RT_1 \ll 1, & M^2 &= u_{02}^2 / 2RT_2 \end{aligned}$$

Величина $\eta(\lambda) = \delta / hu_{02}$ определяется по линейной теории и k связано с η и M^2 соотношением

$$\delta / ku_{02} = M^2 \eta^2 (1 + M^2 \eta^2)^{-1} + \sqrt{M^4 \eta^4 (1 + M^2 \eta^2)^{-2} + (1 - M^2) \eta^2 (1 + M^2 \eta^2)^{-1}}$$

Из условий на фронте следует:

$$\gamma_1 = (\lambda\eta + 1) [\lambda (1 - \delta / ku_{02}) (1 - M^2)]^{-1}, \quad \gamma_2 = \lambda^{-1} - \gamma_1 + \gamma_1 M^2 (1 - \delta / ku_{02})$$

Форму поверхности разрыва зададим в виде

$$h(y, t) = Ah^{-1}h_1 + A^2 h^{-1}h_2 \quad (h_1 = \gamma_3 e^{\delta t} \cos hy, \quad \gamma_3 = (\lambda\eta)^{-1})$$

Подставляя $u_1, \dots, \rho_1, u_2, \dots, \rho_2$ в уравнения движения и неразрывности и считая возмущенное течение несжимаемым как перед фронтом, так и за ним, получим следующие уравнения для определения u_{12}, \dots, ρ_{22} :

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{\partial v_{12}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + u_{01} \frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{RT_1}{u_{01}} \frac{\partial \rho_{12}}{\partial x} &= -u_{01} \left(u_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + v_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial t} + u_{01} \frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{RT_1}{u_{01}} \frac{\partial \rho_{12}}{\partial y} &= -u_{01} \left(u_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + v_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \frac{\partial v_{22}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{22}}{\partial t} + u_{02} \frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \frac{2RT_2}{u_{02}} \frac{\partial \rho_{22}}{\partial x} &= -u_{02} \left(u_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + v_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial t} + u_{02} \frac{\partial v_{22}}{\partial x} + \frac{2RT_2}{u_{02}} \frac{\partial \rho_{22}}{\partial y} &= -u_{02} \left(u_{21} \frac{\partial v_{21}}{\partial x} + v_{21} \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Граничные условия при $x = 0$

$$\begin{aligned} -\rho_{01} u_{01} \left[\frac{u_{02}}{h} \frac{\partial u_{21}}{\partial x} \xi_1 + u_{02} u_{22} - \frac{u_{01}}{h} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} \xi_1 - u_{01} u_{12} \right] &= \\ = 2RT_2 \left[\frac{\rho_{02}}{h} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x} \xi_1 + \rho_{02} \rho_{22} \right] - RT_1 \left[\frac{\rho_{01}}{h} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial x} \xi_1 + \rho_{01} \rho_{12} \right] & \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \left[\frac{u_{02}}{h} \frac{\partial v_{21}}{\partial x} \xi_1 + u_{02} v_{22} - \frac{u_{01}}{h} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \xi_1 - u_{01} v_{12} \right] &= \\ = \left[\left(\frac{u_{02} - u_{01}}{h} \right) \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{u_{02}}{h} u_{21} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} - \frac{u_{01}}{h} u_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right] & \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = u_{01} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} \xi_1 + u_{12} - \frac{v_{11}}{h} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = u_{02} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial u_{21}}{\partial x} \xi_1 + u_{22} - \frac{v_{21}}{h} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right] \quad (4)$$

Решение задачи ищем в форме

$$u_{12} = F_1(t) e^{2hx} \cos 2hy, \quad v_{12} = -F_1(t) e^{2hx} \sin 2hy$$

$$\rho_{12} = -m^2 \left(F_1 + \frac{\lambda}{2hu_{02}} F_1' \right) e^{2hx} \cos hy + \frac{m^2}{2} (a - e^{2hx}) e^{2\delta t}$$

$$u_{22} = \left[F_2(t) e^{-2hx} + F_3 \left(t - \frac{x}{u_{02}} \right) - \right.$$

$$\left. - \Delta \frac{\eta}{2} (1 + \eta^{-1}) \exp \left(2\delta t - hx - \frac{\delta x}{u_{02}} \right) \right] \cos 2hy$$

$$v_{22} = \left[F_2 e^{-2hx} + \frac{F_3'}{2hu_{02}} - \Delta \frac{\eta^2}{4} (1 + \eta^{-1})^2 \exp \left(2\delta t - hx - \frac{\delta x}{u_{02}} \right) \right] \sin 2hy$$

$$\rho_{22} = \left[-M^2 \left(F_2 - \frac{F_2'}{2hu_{02}} \right) e^{-2hx} - M^2 \Delta \frac{\eta}{2} (1 - \eta^{-1}) \exp \left(2\delta t - hx - \frac{\delta x}{u_{02}} \right) \right] \times$$

$$\times \cos 2hy + \frac{M^2}{9}(b - \gamma_1^2) \exp^{-2hx} - 2\gamma_1\gamma_2 \exp\left(-hx - \frac{\delta x}{u_{02}}\right) - \\ - \gamma_2^2 \exp\left(-\frac{2\delta x}{u_{02}}\right) e^{2\delta t}$$

$$\xi_2 = F_4(t) \cos 2hy + d e^{2\delta t}, \quad \Delta = -2\gamma_1\gamma_2(1 - \eta) [4 - (\eta + 1)^2]^{-1} \\ \eta = (-1 + \sqrt{1 + \lambda - \lambda^{-1}}) (1 + \lambda)^{-1}$$

Здесь a , b , d — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Подставляя u_{12}, \dots, h_2 в граничные условия, из (3) и (4) получим $d = 0$. Постоянные a и b тогда найдутся из (1), (2). Для F_1, \dots, F_4 имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\lambda}{2hu_{02}}(F_1' + F_2') + \lambda F_3 = b_1 e^{2\delta t}$$

$$F_1 + \lambda F_2 + \frac{\lambda}{2hu_{02}} F_3' + 2(1 - \lambda)F_4 = b_2 e^{2\delta t}$$

$$-F_1 + \frac{\lambda}{hu_{02}} F_4' = b_3 e^{2\delta t}, \quad -F_2 - F_3 + \frac{1}{hu_{02}} F_4' = b_4 e^{2\delta t}$$

$$b_1 = \lambda\eta\Delta + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}{2}, \quad b_2 = \lambda\Delta \frac{(\eta + 1)^2}{4} + \frac{\lambda\gamma_3[2\gamma_1 + \gamma_2(1 + \eta^2)] - 2\gamma_3}{2}$$

$$b_3 = \gamma_3, \quad b_4 = -\Delta \frac{\eta + 1}{9} - \gamma_1\gamma_3 - \eta\gamma_2\gamma_3$$

Отсюда легко получить уравнение для F_4

$$\frac{(1 + \lambda)\lambda}{2(hu_{02})^2} F_4 + \frac{2\lambda}{hu_{02}} F_4' + 2(1 - \lambda)F_4 = \\ = [b_1 + b_2 + (1 + \lambda\eta)b_3 + \lambda(1 + \eta)b_4] e^{2\delta t}$$

Решением для F_4 , удовлетворяющим начальному условию $F_4(0) = 0$ и не содержащим экспоненциально убывающего решения однородного уравнения (это решение приводит к неограниченному по x решению для F_3), является

$$F_4(t) = D(\lambda) \delta t e^{2\delta t}$$

$$(D(\lambda) = [b_1 + b_2 + (1 + \lambda\eta)b_3 + \lambda(1 + \eta)b_4] [2\lambda(1 + \lambda)\eta^2 + \\ + 2\lambda\eta]^{-1} = 1/2 \{ (1 - \lambda^{-1}) - (1 + \lambda)\lambda^{-1}(\eta + 3)^{-1} [(1 + \lambda)\eta^2 + 5\eta + \\ + 3] \} [2\lambda(1 + \lambda)\eta^2 + 2\lambda\eta]^{-1})$$

Покажем, что при $\lambda > 1$ всегда $D(\lambda) < 0$. Действительно, из выражения для η следует, что $\eta \geq 0$, если $\lambda \geq 1$. Тогда

$$(1 - \lambda^{-1}) - (1 + \lambda)\lambda^{-1}(\eta + 3)^{-1} [(1 + \lambda)\eta^2 + 5\eta + 3] = -2\lambda^{-1} - (1 + \lambda)\lambda^{-1} \times \\ \times (\eta + 3)^{-1} [(1 + \lambda)\eta^2 + 4\eta] < 0$$

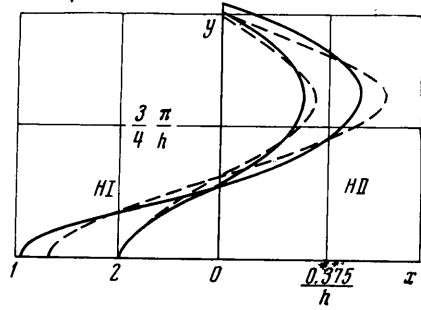
В предельном случае $\lambda \rightarrow 1$ получаем, что $\eta \rightarrow 1/2(\lambda - 1)$ и $D(\lambda) \rightarrow -(\lambda - 1)^{-1}$. Если $\lambda \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \lambda^{-1/2}$ и $D(\lambda) \rightarrow 1/12\lambda$.

Выполняющееся при всех $\lambda > 1$ неравенство $D(\lambda) < 0$ означает несимметричность выпуклых и вогнутых участков поверхности ионизационного фронта: выпуклые в направлении положительных x участки фронта расширяются за счет вогнутых участков кривыми (1 и 2 на фиг. 2 представ-

лена поверхность разрыва в момент $t = 2/\delta$ соответственно при $\lambda = 5$ и 10 и $A = -0.1$, пунктиром отмечено положение фронта в тот же момент времени, рассчитанное по линейной теории). Такое влияние нелинейности на искривление поверхности разрыва представляется весьма интересным.

Как уже отмечалось, распространение слабых ионизационных волн D -типа во многом аналогично распространению пламени. Но известно [16-18] (в отличие от полученного выше результата), что при распространении фронта пламени, рассматриваемого в приближении Ландау - Дарье,

согласно принципу Гюйгенса выпуклые в направлении несгоревшего газа участки фронта пламени расширяются за счет вогнутых участков. Легко видеть, что расхождение определяется специфичностью задания скорости продвижения ионизационного фронта в нейтральный газ по нормали к поверхности. В самом деле, эта скорость постоянна в линейном приближении и зависит от формы поверхности разрыва в случае учета квадратичных по амплитуде возмущения членов. Формально полагая $U_1 = u_{01}$, $U_2 = u_{02}$, получим в уравнении для формы поверхности фронта пламени слагаемое при A^2 вида



Фиг. 2

получим в уравнении для формы поверхности фронта пламени слагаемое при A^2 вида

$$F_4(t) = G(\lambda) \delta t e^{2\delta t}$$

$$(G(\lambda) = D(\lambda) + \lambda/4(1 + \eta)\gamma^2(1 + \gamma^2)[2\lambda(1 + \lambda)\eta^2 + 2\lambda\eta]^{-1})$$

Отсюда

$$G(\lambda) = 1/2\{-2\lambda^{-1} - (1 + \lambda)\lambda^{-1}(\eta + 3)^{-1}[(1 + \lambda)\eta^2 + 4\eta] + \\ + 1/2\gamma^2\lambda(1 + \eta)\}[2\lambda(1 + \lambda)\eta^2 + 2\lambda\eta]^{-1}$$

Покажем, что при $\lambda > 1$ всегда $G(\lambda) > 0$.

Обозначим $\sqrt{1 + \lambda} = z > 1$. Тогда

$$\eta = (-1 + \sqrt{1 + \lambda - \lambda^{-1}})(1 + \lambda)^{-1} < z^{-2}(z - 1) \\ \{-2\lambda^{-1} - (1 + \lambda)\lambda^{-1}(\eta + 3)^{-1}[(1 + \lambda)\eta^2 + 4\eta] + 1/2\gamma^2\lambda(1 + \eta)\} > \\ > \{-2(z^2 - 1)^{-1} - 1/3z^2(z^2 - 1)^{-1}[z^{-2}(z - 1)^2 + 4\eta] + 1/2z^4(z^2 - 1)^{-1}(z - \\ - 1)^{-2}\} = 1/6(z^2 - 1)^{-1}(z - 1)^{-2}[z^4 + 8z - 6] > 0$$

Этот результат находится в полном соответствии с получаемым в теории горения на основе принципа Гюйгенса.

Если имеет место неустойчивость типа Рэлея - Тейлора, то подобно фронту горения, кривизна выпуклых в направлении $x > 0$ участков поверхности разрыва в начальной стадии должна быть больше кривизны вогнутых участков [3, 11, 12].

Таким образом, изменение формы поверхности ионизационного фронта в рассмотренном выше приближении существенно отличается от того, которое происходит при распространении пламени в приближении Ландау - Дарье или при развитии неустойчивости типа Рэлея - Тейлора.

В заключение отметим, что согласно приведенным гипотезам, появление слоновых хоботов - языков нейтрального газа, проникающих в область НИИ и часто окаймленных яркими ободками (римами), - может быть вызвано

неустойчивостью типа Рэлея — Тейлора, первоначальной неоднородностью межзвездной среды, неустойчивостью ионизационных фронтов. Ни одна из этих гипотез не объясняет полностью наблюдаемого многообразия форм и размеров слоновых хоботов и римов.

Не исключено, что все три перечисленных выше фактора создают наблюдаемое распределение газа в областях *III*. Тогда должны проявляться три типа возмущений поверхности, отделяющей межзвездную среду от ионизованного газа в *III*:

1) кривизна более близких к звезде участков границы превышает кривизну более удаленных участков и значения плотности в соседних максимумах примерно одинаковы (доминирует неустойчивость типа Рэлея — Тейлора);

2) плотности в соседних участках, вообще говоря, существенно различны, а размер возмущения соответствует масштабу изменения плотности (проявляется неоднородность межзвездной среды);

3) кривизна более близких к звезде участков границы меньше кривизны более удаленных участков и плотность мало меняется от максимума к максимуму (за возмущения ответственна неустойчивость ионизационного фронта).

Подсчет характеристик возмущений каждого типа, подобный [3, 4], по-видимому, способствовал бы пониманию условий, в которых тот или иной тип превалирует.

Поступила 24 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Kahn F. D. The acceleration of interstellar clouds. *Bull. Astron. Inst. Netherl.*, 1954, vol. 17, No. 457.
2. Рожковский Д. А. Светлые ободки в диффузных туманностях и связь их с центральными звездами. *Астрон. ж.*, 1954, т. 31, вып. 4.
3. Osterbrock D. E. Comet-tail structures in emission nebulae. *Appl. J.*, 1957, vol. 125, No. 3.
4. Потташ С. Яркие ободки в диффузных туманностях. Сб. «Третий симпозиум по космической газодинамике», М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 235.
5. Кан Ф. Об устойчивости ионизационных фронтов. Сб. «Третий симпозиум по космической газодинамике», М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 245.
6. Vandervoort P. O. On the stability of ionization fronts. *Appl. J.*, 1962, vol. 135, No. 1.
7. Vandervoort P. O. The stability of ionization fronts and evolution of H II region. *Appl. J.*, 1963, vol. 138, No. 2.
8. Axford W. I. The stability of ionization fronts. *Appl. J.*, 1964, vol. 140, No. 1.
9. Краснобаев К. В. Неустойчивость слабых ионизационных волн *D*-типа. Докл. АН СССР, 1974, т. 196, № 6.
10. Краснобаев К. В. Об устойчивости слабых ионизационных волн *D*-типа в случае оптически толстого слоя ионизованного газа за фронтом. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1971, № 6.
11. Spitzer L. Behavior of matter in space. *Appl. J.*, 1954, vol. 120, No. 1.
12. Frieman E. A. On «elephant — trunk» structures in the region of O associations. *Appl. J.*, 1954, vol. 120, No. 1.
13. Шоер П. Флуктуации амплитуды пульсирующих радиосточников. Сб. «Пульсары», М., «Мир», 1971, стр. 242.
14. Солпитер Е. Е. Амплитудные флуктуации пульсаров. Сб. «Пульсары», М., «Мир», 1971, стр. 253.
15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
16. Щелкин К. И. Неустойчивость горения и детонации в газах. *Усп. физ. н.*, 1965, т. 87, вып. 2.
17. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Устойчивость пламен. АН СССР, «Итоги науки», Гидромеханика, М., 1966.
18. Нестационарное распространение пламени. М., «Мир», 1968.