

УДК 533.6.011.8

ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

В работе приведены результаты численного решения плоской задачи о продольном обтекании пластины бесконечного размаха и конечной длины сверхзвуковым потоком разреженного газа. Задача решалась для приближенного кинетического уравнения [1], аппроксимирующего уравнение Больцмана [2, 3]. Был использован точный численный метод (метод характеристик), разработанный автором и применявшийся им ранее к задаче о поперечном обтекании пластины [4]. Результаты расчетов сопоставляются с имеющимися экспериментальными и теоретическими исследованиями других авторов. Согласие с данными опытов удовлетворительное.

Первая попытка теоретического решения проблемы в кинетической постановке была предпринята в работе [5]. Авторы решили задачу о полубесконечной пластине для уравнения Крукса приближенным численным методом, используя формальную аналогию с одномерными нестационарными задачами. Задача формулировалась и решалась как параболическая задача с начальными данными в некотором сечении перед передней кромкой. Приведены результаты расчетов для числа Маха $M = 1.5$. Позднее тот же численный метод был применен к эллипсоидальной модели [6], для $M = 1.5$, и 5.5. Однако при $M = 5.5$ результаты вычислений даны только для коэффициента давления. В работе [7] опубликованы предварительные (как отмечает автор) результаты численного решения задачи о продольном течении около пластины конечной длины для уравнения Крукса. В отличие от [5, 6] задача формулировалась уже как краевая задача по обоим переменным. Использовалась новая разностная схема. Однако детали численного алгоритма не вполне ясны из описания, приведенного в работе [7]. Дан пример расчета поля течения для числа $M = 1.5$ и числа Кнудсена $K = 0.5$. Полное изложение результатов, насколько известно автору, до сих пор не опубликовано.

Для больших чисел Маха задача о продольном обтекании пластины конечной длины решалась методом Монте-Карло [8, 9]. Авторы [8] отмечают приближенность метода работ [5, 6] и отличие их результатов от расчетов, выполненных в [10] методом [5] для гиперзвукового режима течения. В [8] дано сравнение расчетных и экспериментальных профилей плотности и отмечается их удовлетворительное согласие. Результаты по определению зависимостей коэффициентов трения и теплопередачи от чисел Маха, Кнудсена и отношения температур не приводятся. Следует отметить, что статистический разброс результатов по методу Монте-Карло довольно велик. Так, для давления на поверхности пластины при $M = 24$ разброс данных относительно среднего значения $\sim 15\%$ [9].

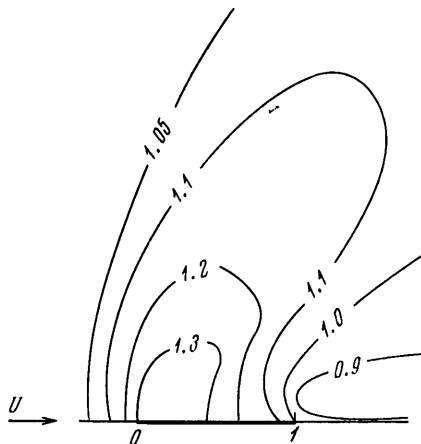
В данной работе основная серия расчетов проведена для скоростного отношения $U = 4.6$, что соответствует $M = 5.5$ в двухатомном и $M \cong 5$ в одноатомном газе. При этих числах M уже проявляются все эффекты гиперзвукового потока. Коэффициент вязкости принимался зависящим от температуры по степенному закону с показателем 0.816, число Прандтля $\sigma = 2/3$. Результаты расчетов качественно согласуются с данными [8] и с результатами измерений по профилям плотности, но имеется также и различие в результатах, особенно для холодных пластин. Расчетные зависимости коэффициента трения согласуются с экспериментальными данными.

Для сравнения были выполнены расчеты для $M = 1.5$ в одноатомном газе. Характер течения при $M = 1.5$ существенно отличается от случая $M = 5$. Расчеты поля течения дают результаты, отличающиеся как от [5, 6], так и от [7], однако зависимость коэффициента трения близка к зависимости, полученной в [5]. Коэффициент теплопередачи с приведенным в [5] не согласуется.

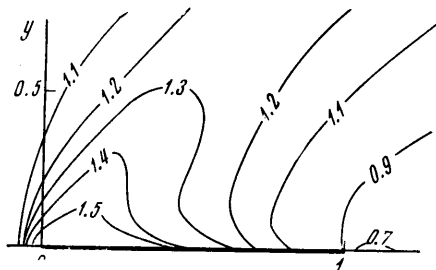
1. Рассмотрим плоское, установившееся обтекание пластины равномерным потоком разреженного газа (U_∞ , n_∞ , T_∞ — скорость, плотность и температура газа на бесконечности). Пластина длиной L расположена вдоль по потоку. Введем систему координат: начало пусть совпадает с передней

кромкой пластины, ось x направлена вдоль пластины по потоку, ось y — по нормали к ней, ось z — по размаху.

Пусть $f(x, y; \xi)$ — функция распределения, определяющая состояние газа. Будем интересоваться полями макроскопических величин: плотности n , средней скорости потока u_i , тензора потока импульса M_{ij} , P_{ij} и потока энергии E_i , а также характеристиками воздействия потока на пластину, т. е. $P_{xy}(x, 0)$, $P_{yy}(x, 0)$, $E_y(x, 0)$ и интегралами от них. Индексы 1, 2 относятся соответственно к направлениям x, y .



Фиг. 1



Фиг. 2

Функцию распределения будем определять как решение приближенного кинетического уравнения [1], аппроксимирующего уравнение Больцмана [2, 3]. На поверхности пластины примем диффузное отражение молекул с полной тепловой и импульсной аккомодацией. Температуру пластины для простоты будем считать заданной.

В [4] более подробно описана постановка задачи для функции распределения и приведена принципиальная схема численного метода.

2. Характер рассматриваемого течения около пластины зависит от трех безразмерных параметров: числа Кнудсена $K = \lambda_\infty / L$, скоростного отношения $U = U_\infty / (2RT_\infty)^{1/2}$ или однозначно связанного с ним числа Маха $M = \sqrt{2}U / \gamma$ набегающего потока (γ — отношение теплоемкостей) и отношения температур T_w / T_∞ . При $K \rightarrow \infty$, т. е. в свободномолекулярном пределе, возмущения от пластины распространяются на значительные расстояния (порядка $10L$) приблизительно с одинаковой интенсивностью во все стороны от пластины, в том числе и вверх по потоку. Затухание возмущений происходит лишь из-за геометрии, т. е. из-за расходимости молекулярных пучков от пластины. Учет столкновений сокращает размер зоны возмущений, причем этот размер тем меньше, чем меньше число Кнудсена и чем больше число M . При $K \rightarrow 0$ вблизи поверхности пластины формируется лишь тонкий пограничный слой толщиной $\delta \sim (K/M)^{1/2}$. Влияние числа K (а также M) на характер течения и на размер зоны возмущений можно видеть из приводимых ниже фигур.

Все величины, используемые ниже, — безразмерные; плотность, температура отнесены к соответствующим значениям n_∞, T_∞ в невозмущенном потоке, компоненты скоростей u_x, u_y, ξ_x, ξ_y — к тепловой скорости $\sqrt{2RT_\infty}$, составляющие тензора напряжений — к $\rho_\infty 2RT_\infty$, вектор потока энергии — к $\rho_\infty (2RT_\infty)^{3/2}$, в качестве масштаба длины взята длина пластины L .

Рассмотрим сначала сверхзвуковое обтекание холодной пластины: $U = 1.37$ ($M = 1.5$ для одноатомного газа), $T_w = 1$. На фиг. 1, 2 изображены поля плотности; числа Кнудсена K и Прандтля σ соответственно равны:

$K = 0.5$, $\sigma = 1$ и $K = 0.04$ $\sigma = 2/3$. Зависимость поля течения от числа Прандтля слабая, так что фиг. 1, 2 иллюстрируют влияние числа Кнудсена. Сравнение показывает, что уменьшение K более чем в 10 раз сравнительно слабо изменяет общую картину поля плотности.

Если в свободномолекулярном режиме при $T_w = 1$ плотность на пластине равна единице независимо от M , то для любого конечного K всюду, за исключением, быть может, окрестности задней кромки, плотность на поверхности пластины и вблизи нее становится больше единицы. Из фиг. 1 видно, что затухание возмущений происходит медленно на расстояниях, существенно превышающих размер пластины.

Профили плотности для $K = 0.5$, $\sigma = 1$ (фиг. 1), соответствующие кромкам пластины, существенно отличаются от данных в [7]. Согласно полученному решению скорость формирования волны уплотнения вблизи поверхности пластины с ростом x увеличивается значительно быстрее, а интенсивность возмущений больше, чем это следует из расчетов [5, 6].

Распределение сдвигового напряжения P_{xy}' по поверхности пластины для $K = 0.5$, $\sigma = 1$ дано на фиг. 3 (штрихпунктир). Штрих над величиной P_{xy} означает, что она отнесена к своему свободномолекулярному значению $U / 2\sqrt{\pi}$.

На фиг. 4 изображена зависимость от параметра разреженности V_L интегрального коэффициента трения $C_f(V_L)$ по результатам данной работы (кривая 1)

$$C_f(V_L) = 2U^{-2} \int_0^1 P_{xy} dx, \quad C_f' = \sqrt{M} C_f$$

$$V_L = M / \sqrt{\text{Re}_L}, \quad \text{Re}_L = \mu_\infty^{-1} U_\infty L$$

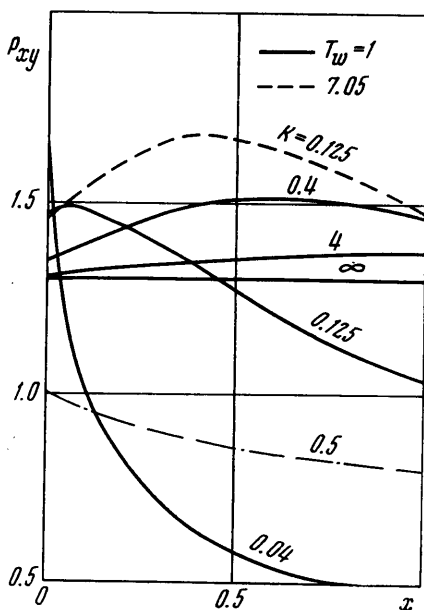
Там же нанесена зависимость локального коэффициента $C_f(V_x)$ в каждом сечении x полубесконечной пластины согласно расчетам [5] для $M = 1.5$, $\sigma = 1$ (кривая 2)

$$C_f(V_x) = 2U^{-2} P_{xy}, \quad V_x = M / \sqrt{\text{Re}_x}, \quad \text{Re}_x = \mu_\infty^{-1} U_\infty x$$

Интегрирование зависимости, представленной кривой 2, по x дает зависимость, близкую к кривой 1. Таким образом, несмотря на значительное различие в поведении макроскопических величин, в частности плотности вблизи поверхности пластины, зависимости от числа Кнудсена коэффициента трения, осредненного по длине, по результатам данной работы и статьи [5] оказываются близкими.

В результате расчетов для $T_w = 1$, выяснилось, что коэффициент теплопередачи связан с коэффициентом трения C_f простым соотношением

$$C_H \approx 1/2 C_f, \quad C_H = 2(\gamma - 1) \int_0^1 E_v dx / [\gamma U (T_0 - T_w)] \quad (2.1)$$



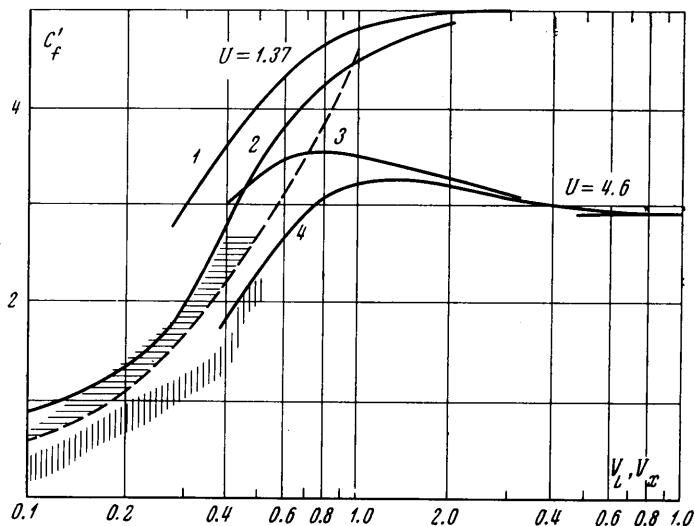
Фиг. 3

Здесь T_0 — температура торможения.

Это соотношение выполняется строго в свободномолекулярном режиме течения. Действительно, при $K \rightarrow \infty$ независимо от температуры поверхности имеем

$$P_{xy} = U / 2\sqrt{\pi}, \quad C_f = (\sqrt{\pi}U)^{-1} \quad (K \rightarrow \infty) \quad (2.2)$$

Независимость от температуры следует из того факта, что функция распределения отраженных молекул симметрична относительно ξ_x и, следовательно, не дает вклада в сдвиговое напряжение P_{xy} . Формула (2.2) совпа-



Фиг. 4

дает, как легко видеть, с соответствующим выражением в течении Куэтта (см., например, [11]).

Поток энергии к пластине при $K \rightarrow \infty$ равен

$$E_y = [U^2 + 2(1 - T_w)] / (2\sqrt{\pi}) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в выражение для C_H и учитывая определение температуры торможения и (2.2), получим при $T_w = 1$ соотношение (2.1).

Соотношение (2.1) для произвольных K было получено в результате обработки экспериментальных данных в случае гиперзвукового потока [12]. Результаты [5] по теплопередаче не дают (2.1) и, таким образом, существенно отличаются от полученных в данной работе.

3. Для аэродинамики основной интерес представляют гиперзвуковые течения разреженного газа.

В этом отношении решения для числа Маха $M = 1.5$ не показательны. Методом, примененным в данной работе, может быть получено решение при любых значениях параметров, в том числе и M . Однако увеличение M требует более широких пределов в пространстве ξ и, в конечном счете, значительных затрат машинного времени. В связи с этим было решено ограничиться случаем $U = 4.6$, что соответствует $M = 5.5$ для двухатомного газа. При этом течение обладает всеми характерными чертами гиперзвукового потока. Кроме того, имеются экспериментальные данные, с которыми можно сопоставить теоретические результаты.

Результаты расчетов, относящиеся к случаю $U = 4.6$, представлены на фиг. 3—11. Число Прандтля равно $2/3$.

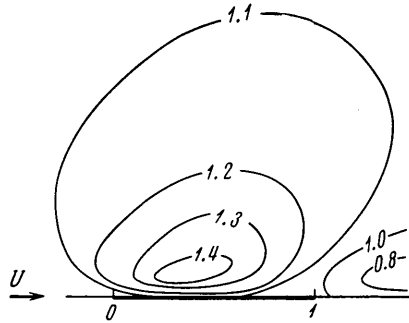
На фиг. 5, 6 изображены поля плотности при обтекании холодной пластины ($T_w = 1$) для чисел Кнудсена $K = 9$ и 0.04 . При $K = 9$ течение почти свободномолекулярное, в то время как при $K = 0.04$ межмолекулярные столкновения играют очень важную роль. На фиг. 6 видна пристеночная область повышенной плотности и волна сжатия постоянной интенсивности над пластиной. Линия максимальной плотности — прямая с углом наклона $\approx 22^\circ$ к оси абсцисс. Однако это еще не ударная волна. Течение сильно зависит от граничных условий на пластине. Так, картина обтекания горячей пластины ($T_w = 7.05$), представленная на фиг. 7 для числа Кнудсена $K = 0.0625$, существенно отличается от только что рассмотренной. Так же как и в предыдущем случае, в поле плотности можно выделить линию максимумов профилей плотности, прямую, наклоненную к оси абсцисс уже под углом $\sim 31^\circ$, но вдоль этой линии плотность газа возрастает.

Сопоставление полей плотности, изображенных на фиг. 2 и на фиг. 6, показывает также, насколько существенно характер обтекания зависит от числа Маха.

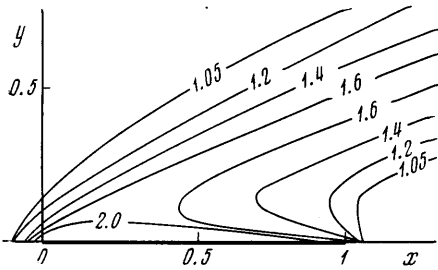
На фиг. 8 изображены профили температуры газа над горячей пластиной. Для сравнения там же пунктиром нанесен профиль температуры, соответствующий обтеканию холодной пластины при $K = 0.04$. Как видно из рассмотрения фиг. 8, температура вблизи нагретой пластины изменяется по y монотонно.

Профили поперечной скорости в поле потока над холодной пластиной представлены на фиг. 9.

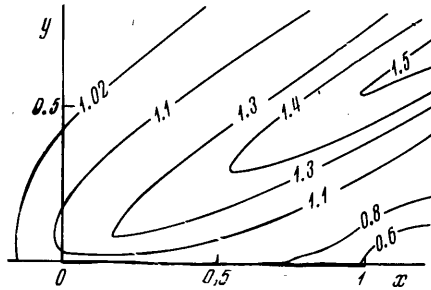
Рассмотренные течения являются характерными для не очень малых чисел Кнудсена: в них четко проявляется тенденция к образованию ударной волны и к отделению ее от пристеночного пограничного слоя. В чистом



Фиг. 5



Фиг. 6



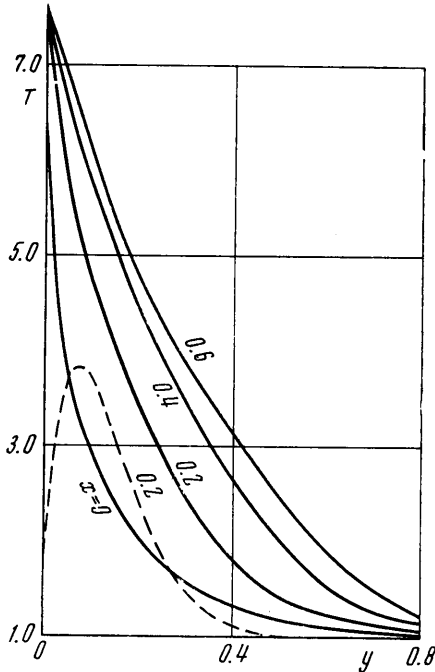
Фиг. 7

виде ни ударной волны ни пограничного слоя при этих условиях еще не существует. Однако теория слабого вязкого взаимодействия уже дает удовлетворительные результаты по крайней мере для таких характеристик, как коэффициент трения.

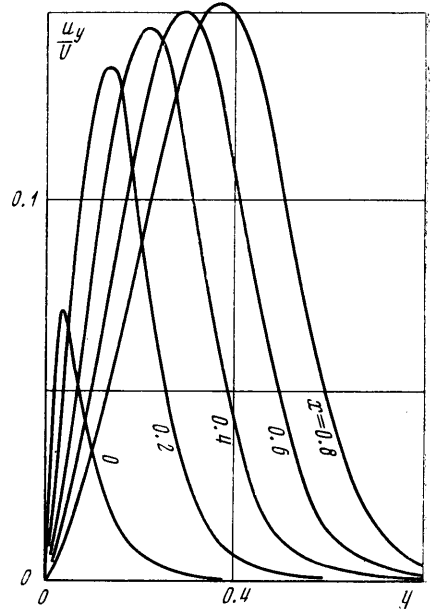
На фиг. 4 горизонтальными штрихами заштрихована область экспериментальных данных $^{[13]}$ для $M = 5.5$, $T_w = T_0$, $\gamma = 1.4$ (то и другое заимствовано из работы $^{[5]}$), штриховая линия отражает результат теории слабого вязкого взаимодействия для локального коэффициента трения. Сплошными линиями нанесены результаты расчетов данной работы для горячей (кривая 3) и холодной пластин (кривая 4) для средних по длине пластины коэффициентов трения.

Видно, что расчеты данной работы дают результаты, согласующиеся как с экспериментальными результатами, так и с теорией вязкого взаимо-

действия при малых числах K (или $M / \sqrt{\text{Re}_L}$). В отличие от феноменологической теории вязкого взаимодействия, которая предсказывает монотонное возрастание коэффициента трения с ростом параметра $M / \sqrt{\text{Re}_L}$, расчет по кинетическому уравнению дает переход к свободномолекулярному значению. Особенность гиперзвукового течения состоит в том, что этот переход оказывается не монотонным: кривая зависимости C_f сначала достигает максимума, превышающего свободномолекулярный предел, а затем



Фиг. 8



Фиг. 9

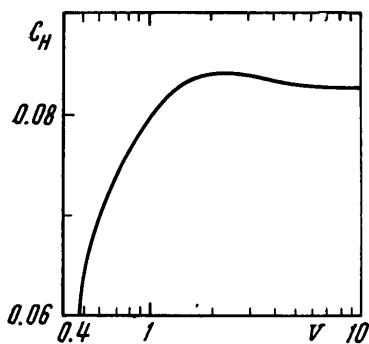
уменьшается до постоянного значения при $K \rightarrow \infty$. Величина максимума тем больше, чем выше температура пластины и чем больше число M . Как видно из фиг. 4, на которой вертикальными штрихами нанесены экспериментальные данные [14] для $M = 21$ (заимствовано из [5]), результаты измерений дают величины, существенно превышающие свободномолекулярное значение, определяемое формулой (2.2).

Наличие максимума в законе трения было предсказано теорией одного столкновения [15]. Аналогичный эффект максимума был обнаружен и в течи Куэтта [11].

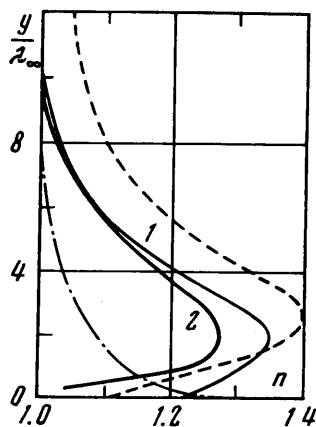
На фиг. 3 изображены распределения напряжения трения P_{xy} для некоторых чисел Кнудсена. Если при $M = 1.5$ эта величина всюду меньше своего свободномолекулярного значения и убывает с ростом x по длине пластины (штрихпунктир), то при $M = 5.5$ для любого числа K существует окрестность передней кромки, где P_{xy} превышает свободномолекулярное значение P_{xy}^∞ . С ростом K и M область, где $P_{xy} > P_{xy}^\infty$, увеличивается и, начиная с некоторого K , простирается на всю длину пластины. При дальнейшем увеличении K максимум напряжения постепенно опускается, и P_{xy} стремится (всюду сверху) к постоянному значению P_{xy}^∞ .

Подобным же образом ведет себя поток энергии $E_y(x, 0)$.

Коэффициент теплопередачи C_H для холодной пластины вновь оказался связанным с коэффициентом C_f соотношением (2.1). Таким образом, C_H ведет себя при изменении K так же немонотонно, как и C_f . Однако в случае пластины, нагретой до температуры порядка температуры торможения, соотношение (2.1) не имеет места даже в свободномолекулярном пределе, но зависимость C_H от K остается немонотонной. Результат расчета коэффициента теплопередачи C_H к пластине, поддерживаемой при температуре $T_w =$



Фиг. 10



Фиг. 11

$= 7.05$ (температура торможения для одноатомного газа $T_0 = 9.46$), представлен на фиг. 10.

4. Из сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными по коэффициенту трения (см. фиг. 4) видно, что данные измерений покрывают область относительно малых чисел Кнудсена (до $K \approx 0.1$ при $M = 5.5$), причем в этой области имеется хорошее согласие с теорией слабого вязкого взаимодействия. Кинетическая же область (диапазон $MK \geq 1$) экспериментальными средствами изучена довольно слабо (по крайней мере для $M \approx 5$).

Большинство экспериментальных результатов получено на длинных пластинах, таких что число Кнудсена, определенное по длине пластины, $K \leq 0.01$. Для измерения свойств разреженности потока используется окрестность передней кромки. Строго говоря, течение вблизи пластины при этих условиях не обладает свойством параболичности. Параметры потока в каком-либо сечении зависят от полного числа Кнудсена $K = \lambda_\infty / L$: при одних и тех же λ_∞ для пластин различной длины на одном и том же удалении x от передней кромки параметры потока различны. Это отличие тем значительнее, чем больше K . Кроме того, на свойства течения большое влияние оказывает затупление пластины. Эти обстоятельства необходимо принимать во внимание при сравнении теоретических и экспериментальных результатов.

На фиг. 11, взятой из [8], дано сравнение профилей плотности, полученных различными методами в сечении, отстоящем на $5\lambda_\infty$ от передней кромки. Пунктирная кривая — результат измерений профиля плотности при $M = 6.08$, $T_w = 0.43 T_0$ в азоте [15]. Кривая 1 — результат данной работы; расчет выполнен для тех же условий при $K = 0.0625$. Кривая 2 — результат вычислений методом Монте-Карло [9] для $M = 5.5$, $T_w = 0.43 T_0$. Штрихпунктирной кривой нанесен профиль, полученный в [10] методом [5] для холодной пластины: $M = 5.0$, $T_w = 0.15 T_0$. В работе [8] молекулы рассматривались как твердые шары. Принимая во внимание, что расчеты и изме-

рения соответствуют не строго одним и тем же условиям (в частности, различным длинам пластин), следует признать удовлетворительным согласие кривой 1 и кривой 2 с экспериментальным профилем.

Следует отметить, что для холодной стенки ($T_w = 1$) результаты [8] не совпадают с [10], как это отмечается в [8]. Вычисления данной работы дают профили, сильно отличающиеся от полученных в [8] и в [10]. Это отличие наиболее заметно вблизи стенки, где плотность согласно расчетам данной работы, значительно превышает плотность набегающего потока (см. фиг. 6).

Основной вывод данной работы и работы [4] состоит в том, что применение точных численных методов к кинетическому уравнению [1] для проблемы обтекания тел гиперзвуковым потоком разреженного газа дает результаты, согласующиеся с экспериментальными данными. Если при исследованиях в лабораторных условиях трудности возрастают по мере повышения степени разреженности потока, то для теоретического анализа область больших K оказывается наиболее благоприятной. Поэтому во многих случаях недостаток надежных экспериментальных данных может быть компенсирован численным решением проблем.

Поступила 21 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахов Е. М. Об обобщении кинетического релаксационного уравнения Крукса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5, стр. 142—145.
2. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1, стр. 156—161.
3. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В сб. «Численные методы в теории разреженных газов», Тр. ВЦ АН СССР, 1969, стр. 84—118.
4. Шахов Е. М. Поперечное обтекание пластины разреженным газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
5. Huang A. B., Hartley D. L. Kinetic theory of the sharp leading edge problem in supersonic flow. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 1, pp. 96—108.
6. Huang A. B., Hwang P. F. Supersonic leading edge problem according to the ellipsoidal model. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 2, pp. 309—317.
7. Huang A. B. Kinetic theory of the rarefied supersonic flow over a finite plate. In: Rarefield gas dynamics, vol. 1, N. Y., Acad. Press., 1969, pp. 529—544.
8. Vogenitz F. W., Broadwell J. E., Bird G. A. Leading edge flow by Monte Carlo direct simulation technique. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 3, pp. 504—510.
9. Vogenitz F. W., Takata G. V. Rarefied hypersonic flow about cones and flat plates by Monte Carlo simulation. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 1, pp. 94—100.
10. Huang A. B., Hwang P. F. Kinetic theory of the sharp leading edge problem II. Hypersonic flow. Paper RE63, Oct. 1968, Internat. Astronaut. Federation, N. Y.
11. Шахов Е. М. Задача Куэтта для течения разреженного газа. Эффект максимума напряжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, вып. 5, стр. 16—24.
12. Wallace J. E., Burke A. F. An experimental study of surface in hypersonic low density flow over a flat plate. In: Rarefield gas dynamics, vol. 1, N. Y., Acad. Press., 1965, vol. 1, pp. 487—507.
13. Moulis E. S. Univ. California, Berkley. Rept NSF, Grant-2520, 1966, Ser, 7, No. 3.
14. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
15. Metcalf S. C., Lillicrap D. C., Berry C. J. A study of the effect of surface condition of the shock layer development over sharp edged shapes in low Reynolds number high speed flow. In: Rarefied gas dynamics, vol. 1, N. Y., Acad. Press, 1969, pp. 619—634.