

УДК 533.6.011.6

К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВДУВАХ

Э. А. ГЕРШБЕЙН

(Москва)

Рассматриваются плоские и осесимметричные течения многокомпонентного сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое с отрицательным градиентом давления.

Методом внешних и внутренних разложений строится асимптотическое решение уравнений пограничного слоя при больших значениях параметра вдува. При этом течение в пограничном слое разделяется на область, примыкающую к поверхности тела, в которой эффекты, связанные с молекулярным переносом в первом приближении (внешнее разложение) не влияют на характер течения [1-6] (влияние этих эффектов сказывается во втором приближении); и на область молекулярного переноса, в которой происходит переход от течения в пристеночной области к течению идеального газа вне пограничного слоя. Получено аналитическое решение внешней задачи при заданных расходе газа через поверхность $(\rho v)_w(x)$, температуре поверхности $T_w(x)$, концентрациях вдуваемых компонент $C_i^{(1)}(x)$ ($i = 1, \dots, N$). Приводятся постановка и некоторые результаты численного решения внутренней задачи.

Получено численное решение исходных уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на сфере и круглом цилиндре при больших значениях параметра вдува.

Асимптотическое решение сравнивается с численным, и определяются области его применимости.

Следует отметить, что решение уравнений Прандтля существует для течений с отрицательным градиентом давления при сколь угодно больших значениях параметра вдува [7], а для течений с нулевым градиентом давления — только до некоторого конечного значения параметра [7, 8]. В работе [8] на основании решения автомодельных уравнений пограничного слоя на плоской пластинке ($dP/dx = 0$) установлена зависимость предельно возможных значений параметра вдува от параметра $l = (\mu\rho)_w / (\mu\rho)_\infty$.

Аutomодельные решения уравнений пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах рассматривались в работах [1, 2, 5, 6]. В работе [3] приводится неавтомодельное асимптотическое решение уравнений Прандтля для однородной несжимаемой жидкости. В работе [4] получены асимптотические формулы для коэффициента трения, теплового и диффузионных потоков компонент на поверхности тела и приводятся асимптотические уравнения, описывающие течение многокомпонентного сжимаемого газа в пристеночной области пограничного слоя.

1. При больших значениях параметра вдува

$$\Phi(\xi) = f_w(\xi) + 2\xi f_{w\xi}'(\xi) = q(\xi) \sqrt{\text{Re}_\infty} (\rho v)_w / (\rho v)_\infty \quad (1.1)$$

система уравнений, описывающая в первом приближении течение многокомпонентного сжимаемого газа в пристеночной области пограничного слоя при пренебрежении химическими реакциями внутри слоя имеет следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} (\psi\Phi + 2\xi\Phi_\xi')\varphi_{\xi\xi}'' - 2\xi\varphi_{\xi\xi}'' &= \beta(\varphi_\xi'^2 - \rho_e/\rho) \\ (\psi\Phi + 2\xi\Phi_\xi')\theta_\xi' - 2\xi\varphi_\xi'\theta_\xi' - \alpha\beta n\theta\varphi_\xi' & \\ (\psi\Phi + 2\xi\Phi_\xi')C_{i\xi}' - 2\xi\varphi_\xi'C_{i\xi}' &= 0 \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\xi = \int_0^x \mu_e \rho_e u_e r^{2k} dx, \quad \eta = a\xi = \frac{u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy$$

Здесь ξ, η — переменные Дородницына — Лиза; x и y — координаты, направленные вдоль поверхности тела и по нормали к ней; u, v — составляющие скорости в направлении этих координат; $f = a\varphi$ — безразмерная функция тока; $\theta = T/T_e$ — безразмерная температура; ρ, m, T и c_p — плотность, молекулярный вес, температура и теплоемкость газа, состоящего из N химических компонент; C_i — массовая концентрация i -й компоненты, $n = c_{pe}m_e / c_{pe}m - 1$

$$q(\xi) = - \left(\int_0^{x'} \mu_e' \rho_e' u_e' r'^{2k} dx \right)^{1/2} (\mu_e' \rho_e' u_e' r'^k)^{-1}$$

$$Re_\infty = \frac{v_\infty \rho_\infty L}{\mu_\infty}$$

$$\mu_e' = \frac{\mu_e}{\mu_\infty}, \quad \rho_e' = \frac{\rho_e}{\rho_\infty}, \quad u_e' = \frac{u_e}{v_\infty}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad x' = \frac{x}{L}$$

$$a(\xi) = f_w(\xi) = - \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^x (\rho v)_w r^k dx \quad (1.3)$$

$$\beta = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}, \quad \alpha = \frac{u_e^2}{c_{pe}T_e}, \quad \psi = \frac{\Phi(\xi)}{a(\xi)}, \quad \varphi_i' = \frac{u}{u_e}$$

Индексы e, w и ∞ относятся соответственно к параметрам на внешней границе пограничного слоя, на поверхности тела и к параметрам набегающего потока на бесконечности, L — характерный линейный размер. Остальные обозначения приведены в работе [4].

Система уравнений (1.2) решается при следующих условиях на поверхности тела [4]:

$$\varphi = 1, \quad \varphi_i' = 0, \quad \theta = \theta_w(\xi), \quad C_i = C_{iw}(\xi) \quad (i = 1, \dots, N; \xi = 0) \quad (1.4)$$

Введем новые переменные по формулам

$$z = \varphi_i'^2, \quad \varphi = \varphi(\xi, z), \quad \xi = \xi \quad (1.5)$$

Получим

$$\psi \varphi z_\varphi' - 2\xi z_\xi' = 2\beta(z - \rho_e / \rho)$$

$$\psi \varphi \theta_\varphi' - 2\xi \theta_\xi' = \alpha \beta n \theta \quad (1.6)$$

$$\psi \varphi C_{i\varphi}' - 2\xi C_{i\xi}' = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$z = 0, \quad \theta = \theta_w(\xi), \quad C_i = C_{iw}(\xi) \quad \text{при } \varphi = 1 \quad (1.7)$$

Первые интегралы характеристической системы уравнений (1.6) имеют вид

$$\xi a^2(\xi) \varphi^2 = k_1, \quad (z + 2\theta c_p / c_{pe} \alpha) u_e^2(\xi) = k_2$$

$$\theta T_e^{-n} = k_3, \quad C_i = k_{4i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.8)$$

При интегрировании предполагалось для простоты, что теплоемкости отдельных компонент не зависят от температуры.

Используя условия (1.7), определяем $k_1 - k_{4i}$ и окончательно получаем решение уравнений (1.6) в виде

$$z(\xi, s) = \frac{2c_{pw}(s)\theta_w(s)}{c_{pe}\alpha(s)} \left[\frac{u_e^2(s)}{u_e^2(\xi)} - \frac{\alpha(s)}{\alpha(\xi)} \frac{\theta(\xi, s)}{\theta_w(s)} \right] \quad (1.9)$$

$$\frac{\theta(\xi, s)}{\theta_w(s)} = \left[\frac{T_e(\xi)}{T_e(s)} \right]^{n_w(s)}, \quad C_i(\xi, s) = C_{iw}(s) \quad (i = 1 \dots, N)$$

$$\xi a^2(\xi) \varphi^2 = sa^2(s) \quad (1.10)$$

Подставляя φ из (1.10) в (1.5), получаем

$$\zeta(\xi, s) = \int_{\xi}^s \frac{(\sqrt{s} a(s))'_s ds}{a(\xi) \sqrt{\xi} z(\xi, s)} \quad (1.11)$$

Уравнение разделяющей линии тока $\zeta = \zeta^*(\xi)$ получается из (1.11) при подстановке в верхний предел интеграла $s = 0$.

Переходя в выражениях (1.9) и (1.11) к физическим переменным и размерным функциям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{u^2(x, t)}{2} &= \frac{1}{\kappa_w(t) \rho_w(t)} \left\{ 1 - \left[\frac{P(x)}{P(t)} \right]^{\kappa_w(t)} \right\} \\ \frac{T(x, t)}{T_w(t)} &= \left[\frac{P(x)}{P(t)} \right]^{\kappa_w(t)}, \quad \frac{\rho(x, t)}{\rho_w(t)} = \left[\frac{P(x)}{P(t)} \right]^{1/\gamma_w(t)} \\ C_i(x, t) &= C_{iw}(t) \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$y(x, t) = \frac{1}{r^k} \int_t^x \frac{\rho_w(t) v_w(t) r^k(t) dt}{\rho(x, t) u(x, t)} \quad (0 \leq t \leq x)$$

Здесь $P(x)$ — давление газа, $\kappa = (\gamma - 1) / \gamma$, $\gamma = c_p / c_v$, c_p и c_v — теплоемкости смеси газов при постоянных объеме и давлении соответственно.

Уравнение разделяющей линии тока имеет вид

$$y^*(x) = \frac{1}{r^k} \int_0^x \frac{\rho_w(t) v_w(t) r^k(t) dt}{\rho(x, t) u(x, t)} \quad (1.13)$$

Выражения для скорости $u^*(x)$, температуры $T^*(x)$ и концентраций компонент C_i^* ($i = 1, \dots, N$) на разделяющей линии тока получаются из (1.12) при $t = 0$.

На поверхности тела получим при $y = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho v} \frac{dP}{dx}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

Таким образом, градиенты температуры и концентраций компонент, подсчитанные с учетом первого приближения, дают нулевую составляющую в поперечном направлении.

Градиенты $\partial T / \partial y$, $\partial C_i / \partial y$ ($i = 1, \dots, N$), подсчитанные с учетом второго приближения [4], на поверхности тела в общем случае отличны от нуля.

На критической линии ($x = 0$) будем иметь [5, 6]

в случае осесимметричного течения

$$v(0, y) = v_{w0} \left(1 - \frac{b^2 y^2}{v_{w0}^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{b^2 y}{v_{w0}}, \quad y^*(0) = \frac{v_{w0}}{b} \quad (1.14)$$

$$T(0, y) = T_{w0}, \quad C_i(0, y) = C_{iw0} (i = 1, \dots, N), \quad \rho(0, y) = \rho_{w0}$$

в случае плоского течения

$$v(0, y) = v_{w0} \cos \frac{by}{v_{w0}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = b \sin \frac{by}{v_{w0}}$$

$$y^*(0) = \frac{\pi}{2} \frac{v_{w0}}{b}, \quad b = \left[-\frac{1}{\rho_{w0}} \left(\frac{d^2 P}{dx^2} \right)_0 \right]^{1/2} \quad (1.15)$$

$$T(0, y) = T_{w0}, \quad C_i(0, y) = C_{iw0} \quad (i = 1, \dots, N), \quad \rho(0, y) = \rho_{w0}$$

Здесь индекс 0 относится к параметрам, взятым при $x = 0$.

В случае изотермического течения формулы (1.12) принимают следующий вид:

$$\frac{u^2(x, t)}{2} = \frac{P(t)}{\rho_w(t)} \ln \frac{P(x)}{P(t)}, \quad \frac{\rho(x, t)}{\rho_w(t)} = \frac{P(x)}{P(t)} \quad (1.16)$$

В случае течения несжимаемой жидкости получим

$$\frac{u^2(x, t)}{2} = \frac{P(t)}{\rho_w(t)} \left[1 - \frac{P(x)}{P(t)} \right] \quad (1.17)$$

2. Решение (1.9) – (1.14) становится непригодным в окрестности разделяющей линии тока $\xi = \xi^*(\xi)$ ($\varphi = 0$), где в уравнениях пограничного слоя следует сохранить члены с высшими производными.

Переходя в уравнениях (2.5) работы [4] к новым переменным

$$\eta^\circ = [\xi - \xi^*(\xi)] / \varepsilon, \quad f^\circ = \varphi / \varepsilon, \quad \varepsilon = 1/a \quad (2.4)$$

и опуская градусы, получим уравнения (1.5) – (1.8) работы [4]. При этом нужно иметь в виду, что $\eta^\circ = \eta - \eta^*(\xi)$.

Применяя известный принцип асимптотического сращивания внешнего и внутреннего разложений (см., например, [9]), получаем граничные условия на внутренней границе слоя молекулярного переноса в виде

$$\begin{aligned} f_\eta' &\rightarrow \sqrt{z^*(\xi)}, \quad \theta \rightarrow \theta^*(\xi), \\ C_i &\rightarrow C_i^* \quad (i = 1, \dots, N), \\ \eta^\circ &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$z^*(\xi) = \frac{u_e^{*2}(x)}{u_e^2(x)} = \frac{\kappa_e \rho_{e0}}{\kappa_{w0} \rho_{w0}} \left\{ 1 - \left[\frac{P(x)}{P_0} \right]^{\kappa_{w0}} \right\} \left\{ 1 - \left[\frac{P(x)}{P_0} \right]^{\kappa_e} \right\}^{-1} \quad (2.3)$$

$$\theta^*(\xi) = \frac{T^*(x)}{T_e(x)} = \left[\frac{P(x)}{P_0} \right]^{\kappa_{w0} - \kappa_e} \quad (2.4)$$

$$C_i^*(\xi) = C_{i_{w0}} \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$x = x(\xi) \quad (2.5)$$

Заметим, что в случае изотермического течения, в случае течения несжимаемой жидкости или при $\kappa_{w0} = \kappa_e$

$$u_e^{*2}(x) \rho_{w0} = u_e^2(x) \rho_{e0} \quad (2.6)$$

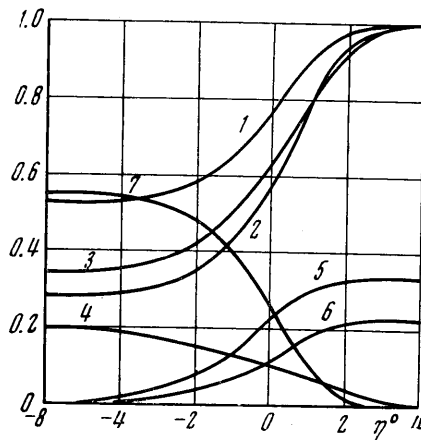
Граничные условия на внешней границе слоя молекулярного переноса совпадают с граничными условиями на внешней границе пограничного слоя

$$f_\eta' \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 1, \quad C_i \rightarrow C_{ie} \quad (i = 1, \dots, N, \quad \eta^\circ \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

Положение слоя молекулярного переноса определяется из условия

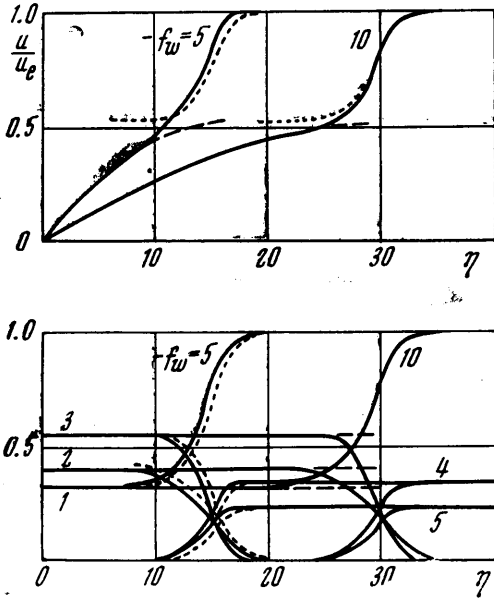
$$f^\circ = 0, \quad \eta^\circ = 0 \quad (2.8)$$

Таким образом, течение в слое молекулярного переноса (в «подвешенном» пограничном слое) описывается системой уравнений (1.5) – (1.8) работы [4] с граничными условиями (2.2), (2.7) и (2.8).



Фиг. 1

Данная система уравнений с граничными условиями (2.2) и (2.7) решалась численным методом на ЭЦВМ с помощью программы, созданной для решения уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя



Фиг. 2

на разрушающейся поверхности [4]. Использовалась неявная четырехточечная двухслойная разностная схема [10] с точностью аппроксимации $O[(\Delta \xi)^2] + O[(\Delta \eta)^4]$. Рассматривалось течение в подвешенном пограничном слое смеси газов, состоящей из химических компонентов O, N, O₂, N₂, CO, CN, HCN, H₂, C₂, C₃. Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1 и 2.

На фиг. 1 изображены профили скорости u / u_e , плотности ρ_e / ρ , температуры T / T_e и концентраций компонентов 10C(H₂), C(N), C(O), C(CO) поперек слоя молекулярного переноса в окрестности критической линии сферы (линии 1–7 соответственно).

На фиг. 2 изображены (точками) аналогичные профили, полученные в окрестности критической линии цилиндра (линии 1–5 соответствуют значениям T / T_e , 20C(H₂), C(CO), C(N), C(O)).

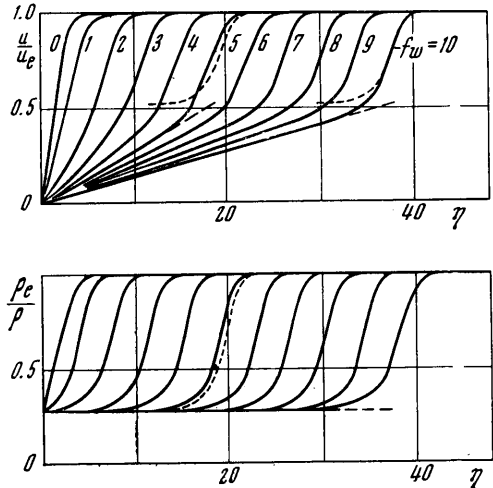
3. Уравнения ламинарного многокомпонентного пограничного слоя решались численным методом на ЭЦВМ аналогично работе [4] (система уравнений (1.5)–(1.8) и граничные условия (1.9), (1.10) или (2.3) приведены в работе [4]).

Рассматривались следующие случаи течения:

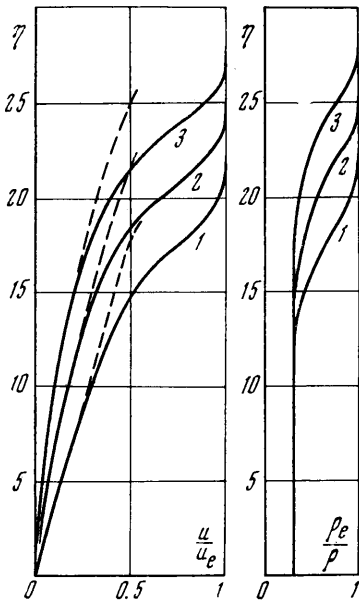
1) течение однородной несжимаемой жидкости в пограничных слоях на сфере и круглом цилиндре ($u_e = (2 - k/2) \cdot v_\infty \sin \theta$);

2) течение смеси газов, состоящей из азота N₂, водорода H₂ и углекислого газа CO₂ в пограничном слое на сфере. Течение предполагалось изотермическим, газ – несжимаемым. Вдуваемая смесь газов также состояла из N₂, H₂ и CO₂ в различных концентрациях;

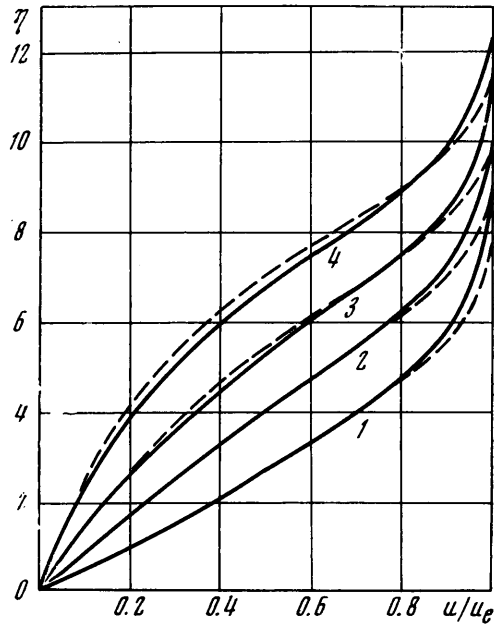
3) обтекание круглого цилиндра ($\beta = (1 - 2\xi) / (1 - \xi)$) потоком азота N₂. С поверхности цилиндра вдувалась смесь N₂ и CO₂, причем концентрация CO₂ во вдуваемой смеси изменялась по формуле $C^{(1)}(CO_2) = 1 - 5\xi$ ($0 \leq \xi \leq 0,2$);



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

4) обтекание сферы и круглого цилиндра диссоциированным воздухом. С поверхности тела вдувался газ, состоящий из химических элементов O, N, C, H. На поверхности тела предполагалось наличие химических компонентов (см. работу [4]) CO, CN, N₂, O₂, H₂, HCN, C₂, C₃.

Во всех случаях параметр вдува f_w предполагался постоянным вдоль поверхности тела и варьировался в пределах $0 \leq -f_w \leq 30$.

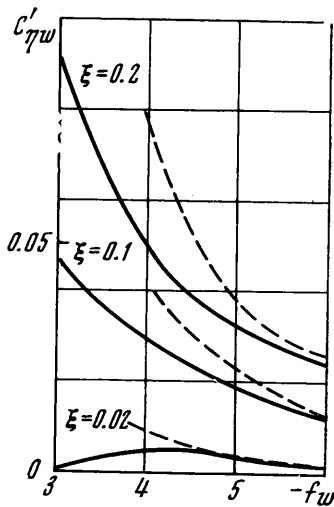
Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2–6.

На фиг. 2 сплошными линиями приведены характерные профили скорости u/u_e , температуры T/T_e , концентраций компонентов C_i ($i = O, N, CO, H_2$) поперек пограничного слоя в окрестности критической точки цилиндра ($\beta = 1$), полученные для двух значений параметра вдува $f_w = -5, -10$.

Пунктирные линии и точки на фиг. 2 и на остальных фигурах — асимптотическое решение (внешнее и внутреннее разложения соответственно).

На фиг. 3 представлены профили скорости u/u_e и плотности ρ_e/ρ поперек пограничного слоя в окрестности критической точки сферы ($\beta = 1/2$) для нескольких значений параметра вдува (случай 4). На фиг. 3 ясно виден процесс образования слоя молекулярного переноса (подвешенного пограничного слоя) по мере увеличения параметра вдува $-f_w$.

На фиг. 4 изображены профили скорости u/u_e и плотности ρ_e/ρ поперек пограничного слоя на сфере (случай 2) в трех сечениях $\vartheta = 0, 0.25,$



Фиг. 6

1.41 радиан (линии 1, 2, 3 соответственно), полученные при вдуве $f_w = -5$.

На фиг. 5 приведены при $f_w = -5$ профили скорости u/u_e поперек пограничного слоя на круглом цилиндре (случай 1) в четырех сечениях $\xi = 0, 0.3, 0.4, 0.45$ (линии 1-4 соответственно). Интересно отметить, что в данном случае внешнее решение (1.17) удовлетворительно описывает течение во всем пограничном слое. Аналогичный результат получается и при обтекании сферы.

Анализ результатов численного и асимптотического решений показывает, что, начиная с вдувов $-f_w \geq 5$, асимптотическое решение удовлетворительно совпадает с численным для всех рассмотренных случаев течения.

На фиг. 6 представлены зависимости градиента концентрации углекислого газа C_n' (CO_2) на поверхности тела (случай 3), полученные из асимптотического решения с учетом второго приближения — формула (2.11) работы [4] (пунктирные линии) — и из численного (сплошные линии). При вдувах $-f_w \geq 5 \div 7$ решения удовлетворительно совпадают друг с другом.

Автор благодарит Г. А. Тирского за обсуждение данной работы.

Поступила 20 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Libby P. A. The homogeneous boundary layer at an axisymmetric stagnation pint with large rates of injection. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, No. 1.
2. Kubota T., Fernandez F. L. Boundary — layer with large injection and heat transfer. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 1.
3. Филимонов В. Н. Асимптотическое решение уравнений несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
4. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
5. Гершбейн Э. А., Тирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
6. Гершбейн Э. А. Об автомодельных численных и асимптотических решениях уравнений пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
7. Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
8. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. М., «Мир», 1967.
10. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964.