№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

УДК 532.5

# СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ СО СТОРОНЫ ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА ТОНКОЕ ИЗОГНУТОЕ ТЕЛО КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Л. А. БОНДАРЕНКО, Ю. Л. ЯКИМОВ

(*Москва*)

В классической гидродинамике рассмотрен случай движения тела в жидкости при условии, что жидкость на бесконечности покоится или движется поступательно [1, 2].

В работе [3] решена задача об обтекании цилиндра произвольным внешним потоком жидкости, причем в этой работе учтено наличие не только скоростей потока, но и их переменность по координатам. В данной статье полученные ранее результаты обобщаются на случай движения тонкого изогнутого тела кругового поперечного сечения в произвольном пространственном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Рассмотрим длинное слабо изогнутое тело, имеющее круговое поперечное сечение. Обозначим через $\varphi$ потенциал, связанный с движением других тел или наличием особенностей вне этого тела. Решение задачи будем искать в виде особенностей, расположенных на изогнутой оси тела. Учитывая тонкость тела, будем предполагать, что функции, характеризующие распределение особенностей вдоль тела, слабо зависят от переменной, изменяющейся вдоль оси тела.

Рассмотрим сечение тела $S_0$ с центром в точке $O$ и выделим участок тела длиной $l$ с центром в $S_0$, который близок к цилиндру с осями $x$ и $y$ в сечении и продольной осью $z$. Вследствие сделанных предположений систему особенностей, расположенных на участке длины $l$, заменим особенностями, имеющими интенсивность, соответствующую точке $S_0$. Потенциал от особенностей на участке $l$ обозначим через $\varphi_1$.

Тогда потенциал течения $\varphi$ можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \tag{1}$$

где $\varphi_2$ — потенциал течения от особенностей на оси тела за исключением участка $l$, $\varphi_3$ — потенциал внешнего течения.

Тогда

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\,(\varphi_2 + \varphi_3) \tag{2}$$

т. е. $\mathbf{u}$ — это скорость, которая была бы в точке $O$ при отсутствии особенностей на участке длины $l$. В дальнейшем для простоты будем считать $\mathbf{u}$ скоростью внешнего потока в центре сечения $S_0$.

Разлагая скорость внешнего потока $\mathbf{u}$ в достаточно малой окрестности точки $(0, 0, z)$ на участке $l$ в ряд Тейлора и сохраняя члены первого порядка малости относительно $x$ и $y$, для $\mathbf{u}$ имеем

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(0, 0, z, t) + \frac{\partial \mathbf{u}(0, 0, z, t)}{\partial x} x + \frac{\partial \mathbf{u}(0, 0, z, t)}{\partial y} y =$$

$$= \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} x + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} y$$

Учитывая, что радиус круга $R \ll l$ в сечении $S_0$, вблизи оси тела для значения потенциала $\varphi_1$ получаем следующее асимптотическое выражение:

$$\varphi_1 = \frac{\mu_1(z,t)}{4\pi}\ln r + \frac{2\mu_2(z,t)}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r} + \frac{2\mu_3(z,t)}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r} +$$
$$+\frac{2[\mu_5(z,t)-\mu_4(z,t)]}{4\pi}\frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{2\mu_6(z,t)}{4\pi}\frac{\sin 2\theta}{r^2} \tag{3}$$

Здесь $\mu_1, \ldots, \mu_6$ — интенсивности пространственных особенностей в центре сечения $S_0$; $z$ — координата сечения $S_0$; $r$, $\theta$ — полярные координаты точки $(x, y, z)$ в плоскости сечения $S_0$.

Нетрудно видеть, что если положить

$$\frac{\mu_1(z,t)}{4\pi} = C = -\frac{R^2}{2}\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{0y}}{\partial y}\right) + R\frac{dR}{dt}$$
$$2\mu_2(z,t) = 4\pi R^2(u_{0x} - V_x)$$
$$2\mu_3(z,t) = 4\pi R^2(u_{0y} - V_y)$$
$$2\mu_6(z,t) = \pi R^4\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{0y}}{\partial x}\right)$$
$$2(\mu_4 - \mu_5) = \pi R^4\left(\frac{\partial u_{0y}}{\partial y} - \frac{\partial u_{0x}}{\partial x}\right) \tag{4}$$

где $V_x$, $V_y$, $V_z$ — скорости сечения тела $S_0$, то будут выполнены граничные условия на поверхности тела в сечении $S_0$, а потенциал $\varphi_1$ примет вид

$$\varphi_1 = C\ln r + \frac{R^2}{r}(u_{0x} - V_x)\cos\theta + \frac{R^2}{r}(u_{0y} - V_y)\sin\theta -$$
$$-\frac{R^4}{4r^2}\left(\frac{\partial u_{0y}}{\partial y} - \frac{\partial u_{0x}}{\partial x}\right)\cos 2\theta + \frac{R^4}{4r^2}\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{0y}}{\partial x}\right)\sin 2\theta \tag{5}$$

Силы, действующие на тело, удобно находить, определив давление на поверхности тела из уравнений движения жидкости в подвижной системе координат, связанной с телом [1]

$$\frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right) - (\mathbf{v} - \mathbf{V})\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{6}$$
$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi = \mathbf{u} + \operatorname{grad}\varphi_1 \tag{7}$$

где штрих у производной по $t$ означает, что дифференцирование производится в подвижной системе координат.

Интегрируя уравнение (6) по углу $\theta$ и используя [4] формулы

$$X = -R\int_0^{2\pi} p\cos\theta\, d\theta, \qquad Y = -R\int_0^{2\pi} p\sin\theta\, d\theta$$

получим

$$X = -\rho\frac{dS(V_x - u_{0x})}{dt} + \rho S\frac{du_{0x}}{dt} + \rho S(u_{0x} - V_x)\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial x} - \frac{\partial u_{0y}}{\partial y}\right) +$$
$$+2\rho S(u_{0y} - V_y)\frac{\partial u_{0y}}{\partial x} + \rho S(u_{0z} - V_z)\left(\frac{\partial u_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial u_{0x}}{\partial z}\right) +$$

$$+\rho\frac{\partial S}{\partial z}(u_{0z}-V_z)(u_{0x}-V_x)-\rho S(u_{0z}-V_z)\frac{dV_x}{dz} \tag{8}$$

$$Y=\frac{-\rho dS(V_y-u_{0y})}{dt}+\rho S\frac{du_{0y}}{dt}-\rho S(u_{0y}-V_y)\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial x}-\frac{\partial u_{0y}}{\partial y}\right)+$$

$$+2\rho S(u_{0x}-V_x)\frac{\partial u_{0x}}{\partial y}+\rho S(u_{0z}-V_z)\left(\frac{\partial u_{0z}}{\partial y}+\frac{\partial u_{0y}}{\partial z}\right)+$$

$$+\rho\frac{dS}{dz}(u_{0z}-V_z)(u_{0y}-V_y)-\rho S(u_{0z}-V_z)\frac{\partial V_y}{\partial z} \tag{9}$$

Вводя по определению

$$\frac{d\mathbf{u}_0{}^*}{dt}=\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t}+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_0 \tag{10}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_0 \tag{11}$$

получим

$$X=-\rho\frac{dS(V_x-u_{0x})}{dt}+2\rho S\frac{du_{0x}{}^*}{dt}-\rho S\frac{du_{0x}}{dt}-$$
$$-\rho S(u_{0x}-V_x)\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial u_{0y}}{\partial y}\right)+\rho\frac{\partial S}{\partial z}(u_{0z}-V_z)\times \tag{12}$$
$$\times(u_{0x}-V_x)-\rho S(u_{0z}-V_z)\frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$Y=-\rho\frac{dS(V_y-u_{0y})}{dt}+2\rho S\frac{du_{0y}{}^*}{dt}-\rho S\frac{du_{0y}}{dt}-\rho S(u_{0y}-V_y)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial u_{0y}}{\partial y}\right)+\rho\frac{\partial S}{\partial z}(u_{0z}-V_z)(u_{0y}-V_y)-\rho S(u_{0z}-V_z)\frac{\partial V_y}{\partial z} \tag{13}$$

или в векторном виде

$$\mathbf{F}=-\rho\frac{dS(\mathbf{V}-\mathbf{u}_0)}{dt}+2\rho S\frac{d\mathbf{u}_0{}^*}{\partial t}-\rho S\frac{d\mathbf{u}_0}{dt}-\rho S(\mathbf{V}-u_0)\times$$
$$\times\frac{\partial u_{0z}}{\partial z}+\rho\frac{\partial S}{\partial z}(V_z-u_{0z})(\mathbf{V}-\mathbf{u}_0)+\rho S(V_z-u_{0z})\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\rho\frac{d\mathbf{u}^*}{dt}=-\operatorname{grad}p \tag{15}$$

и вводя формально обозначения для количества движения жидкости в плоском слое

$$\mathbf{I}=\rho S(\mathbf{V}-\mathbf{u})\ \text{или}\ I_x=\rho S(V_x-u_x),\quad I_y=\rho S(V_y-u_y) \tag{16}$$

последнее выражение для силы (14) можно переписать с помощью (15),

(16) в виде

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{I}}{\partial t} - S\,\mathrm{grad}\,p - (\mathbf{I}\cdot\nabla)\dot{\mathbf{u}}_0 - \left[\rho S(\mathbf{V}-\mathbf{u}_0)\frac{\partial u_{0z}}{\partial z} + \rho S(V_z - u_z)\nabla u_z - \right.$$

$$\left. - \rho\frac{\partial S}{\partial z}(V_z - u_{0z})(\mathbf{V}-\mathbf{u}_0) - \rho S(V_z - u_{0z})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right] \qquad (17)$$

Первые три члена (17) представляют собой выражение для силы, действующей на произвольный контур малых размеров в плоском потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости [1] [5].

В приведенном выражении кроме членов, связанных с силой, которая действует на тело малых размеров, имеется дополнительный член в скобках, связанный с пространственным характером поля скоростей $u_0$, переменностью сечений тела и различием их скоростей движения. Наличие этого члена связано с тем, что рассматриваемое тело не является телом малых размеров вдоль продольной оси, и формула (17) выражает собой силу, действующую на сечение тела, а не на все тело.

Поступила 19 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1. М., Физматгиз, 1963.
2. Хаскинд М. Д. Неустановившееся движение твердого тела в ускоренном потоке безграничной жидкости. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
3. Якимов Ю. Л. Движение цилиндра в произвольном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидромеханики и аэродинамики, Изд. 2-е, М., «Наука», 1966.
5. Бармина Л. А. Силы, действующие на деформируемый контур, движущийся в произвольном потоке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.

[1] Это выражение (первые три члена (17)) было предложено одним из авторов для общего случая движения тела малых размеров в пространственном потенциальном потоке (см. статью Л. А. Барминой в этом же номере).