

УДК 533.6.011.31

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ДОЗВУКОВОЙ ЧАСТИ СОПЛА ЛАВАЛЯ

А. Н. КРАЙКО, А. А. ОСИПОВ

(Москва)

Рассматривается задача об отражении продольных возмущений от дозвуковой и трансзвуковой частей сопла Лавала. Предполагается, что сопло примыкает к цилиндрической трубе, а приходящее возмущение есть гармоническая плоская волна Римана. Для решения используется численное интегрирование точных уравнений осесимметричного нестационарного течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Это позволяет оценить влияние как нелинейных эффектов, так и эффектов двумерности течения. Полученные результаты сравниваются с результатами расчетов, выполненных в соответствии с известной теорией Цянь Сюэ-сяня, Крокко и Чжен Синь-и [1, 2], в основе которой лежит линеаризация уравнений одномерного течения.

Решение рассматриваемой задачи представляет интерес для многочисленных приложений и, прежде всего, для исследования динамических процессов в камерах сгорания [2-11]. В силу сложности явлений, возникающих при этом, естественно стремление к раздельному изучению камеры сгорания и сопла с заменой последнего (в нестационарной задаче) некоторым граничным условием на выходе из камеры. Указанное граничное условие, связывающее, например, приращения давления и скорости в соответствующем сечении, должно быть получено или экспериментально или из решения задачи отражения возмущений от сопла.

В основе известных решений этой задачи лежит уже упоминавшийся приближенный подход, предложенный Цянь Сюэ-сянем [1] и в дальнейшем развитый Крокко и Чжен Синь-и [2]. При таком подходе течение в сопле считается одномерным, а отклонения параметров от соответствующих стационарных значений предполагаются малыми, что позволяет провести линеаризацию уравнений одномерного нестационарного течения. В результате для определения возмущений параметров потока получается однородная система линейных уравнений в частных производных, коэффициенты которой выражаются через параметры стационарного течения, т. е. не зависят от времени  $t$ . Это в свою очередь указывает на существование решения, имеющего вид произведения экспоненциальной функции времени  $\exp i\omega t$ , где  $\omega$  — частота колебания, на вектор-столбец, каждая компонента которого есть функция только пространственной переменной  $x$ . Для определения указанных компонент как функций  $x$  получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью в критическом сечении сопла. В общем случае полученная система может быть проинтегрирована численно, причем для выделения ограниченного решения требуется использование специального условия регуляризации в критическом сечении сопла. Указанное условие, впервые сформулированное в [1], есть требование ограниченности возмущений в сечении  $M = 1$ , где  $M$  — число Маха, посчитанное по стационарным параметрам. В действительности возникновение указанной особенности не отражает природы явления и связано, как показано ниже, с линеаризацией, применение которой вблизи сечения  $M = 1$ , вообще говоря, незаконно (см. также [12]). В силу сказанного, данная задача является задачей особых возмущений в смысле [13]. Поэтому ее решение путем численного интегрирования точных уравнений и сравнение с аналогичным «линейным» решением может позволить (наряду с количественной оценкой эффектов нелинейности и двумерности) выяснить границы применимости способа регуляризации, предложенного в [1]. Это тем более важно в связи с тем, что методы малых возмущений, которые включают методы регуляризации, аналогичные предложенному в [1], начали применяться и при решении задачи об отражении от сопла возмущений более сложного вида с учетом двумерности и рассмотрением следующих (нелинейных) членов соответствующих разложений [14, 15]. Использование численных методов в случае возмущений такого типа (поперечных и радиально-тангенциальных) в настоящее время представляется затруднительным. Отметим также, что постановка соответствующих экспериментов (даже для плоских волн в широком диапазоне частот) сопряжена с рядом методических трудностей (см., например, [16]).

1. Рассмотрим течение идеального газа в осесимметричном сопле Лавалля, которое плавно притыкает к полубесконечной цилиндрической трубе, как показано на фиг. 1.

Пусть  $x$  и  $y$  — оси прямоугольной системы координат в меридиональной плоскости, ось  $x$  совпадает с осью симметрии, а начало координат лежит в плоскости минимального (критического) сечения сопла. Пусть далее  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $e$  — удельная внутренняя энергия,  $i = e + p/\rho$  — удельная энтальпия,  $a$  — скорость звука,  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости  $w$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно и  $w = |w|$ . В случае совершенного газа с постоянным показателем адиабаты  $\kappa$ , который только и будет рассматриваться в дальнейшем, имеем

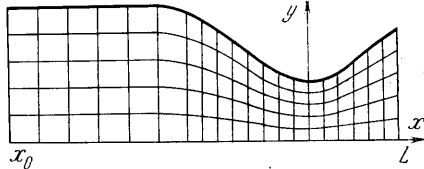
$$e = \frac{p}{(\kappa - 1)\rho}, \quad i = \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho}, \quad a^2 = \frac{\kappa p}{\rho}. \quad (1.1)$$

В принятых обозначениях рассматриваемое нестационарное течение описывается следующей системой интегральных законов сохранения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S \rho y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \rho y (u \, dy - v \, dx) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_S \rho u y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} y [(p + \rho u^2) \, dy - \rho u v \, dx] &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_S \rho v y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} y [\rho u v \, dy - (p + \rho v^2) \, dx] &= \iint_S p \, dx \, dy \\ \frac{d}{dt} \iint_S \rho (2e + w^2) y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \rho y (2i + w^2) (u \, dy - v \, dx) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $S$  — произвольная, не зависящая от времени  $t$  площадка в плоскости  $xy$ , а  $\Gamma$  — ее граница, обход которой осуществляется против часовой стрелки. Система (1.1) эквивалентна дифференциальным уравнениям течения и соотношениям на сильных разрывах.

В (1.1), (1.2) и далее все параметры удобно считать безразмерными. Если размерным величинам приписать верхний индекс градус, то приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных координат к характерной длине  $l^\circ$ , скоростей — к характерной скорости  $u_*^\circ$ , времени — к  $l^\circ / u_*^\circ$ , плотности — к характерной плотности  $\rho_*^\circ$ , давления — к  $\rho_*^\circ (u_*^\circ)^2$  и удельных внутренней энергии и энтальпии — к  $(u_*^\circ)^2$ . В качестве  $u_*^\circ$  и  $\rho_*^\circ$  ниже брались критические скорость и плотность стационарного (невозмущенного) потока, а в качестве  $l^\circ$  — радиус сопла в минимальном сечении.



Фиг. 1

Ограничимся случаем, когда нестационарные возмущения, приходящие к соплу слева есть продольные волны, а в качестве сечения «входа в сопло» выберем плоскость  $x = x_0 < 0$ , расположенную на достаточном удалении от начала сужающегося участка так, чтобы в этом сечении можно было пренебречь вертикальной компонентой скорости. Параметрам потока в сечении входа будем приписывать нижний индекс нуль. В силу выбора входного сечения и вида приходящих к соплу возмущений последние полностью определяются заданием при  $x = x_0$  правого инварианта Римана  $r_0 = r_0(t)$ , где  $r = u + 2a / (\kappa - 1)$  и энтропии или отношения  $(p / p^*)_0 = s_0(t)$ .

Параметрам невозмущенного (стационарного) потока при  $x = x_0$  припишем нижний индекс  $\infty$ . В дальнейшем энтропийные волны рассматриваться не будут. Поэтому в соответствии с принятым способом обезразмеривания

$$(p / \rho^*)_0 = (p / \rho^*)_{\infty} = s_{\infty} = 1 / \kappa$$

Наряду с  $r$  рассмотрим левый инвариант Римана

$$l = u - 2a / (\kappa - 1)$$

который характеризует волну, бегущую влево, т. е. возмущение, отраженное от сопла. Таким образом, задача отражения состоит в том, чтобы определить, как приходящее слева возмущение правого инварианта Римана отражается от докритической части сопла в виде возмущения левого инварианта.

Известно [17], что до момента возникновения в потоке скачков уплотнения в цилиндрической трубе в случае  $s_0 = s_{\infty}$ , т. е. при отсутствии приходящих энтропийных волн, правый (левый) инвариант сохраняет постоянное значение вдоль каждой характеристики первого (второго) семейства.

Заметим, что при заданных  $s_0$  и  $r_0$ , а также при использовании дополнительного условия:  $v_0 = 0$  знание левого инварианта ( $l_0$ ) во входном сечении позволяет определить все прочие параметры с нижним индексом нуль.

Метод численного интегрирования, использованный в настоящей работе, основан на разностной схеме С. К. Годунова [18, 19]. Так как применительно к внутренним течениям сама схема и порядок расчета подробно описаны в работах [20, 21], то остановимся лишь на деталях, связанных с особенностями рассматриваемой задачи.

Вся область потока, заключенная между осью симметрии, стенкой сопла, сечением входа  $x = x_0$  и сечением выхода  $x = L$ , разбивается на  $N \times K$  элементарных ячеек, как это показано на фиг. 1, причем  $N$  — число ячеек по горизонтали, а  $K$  — по вертикали. При этом сечение выхода  $x = L$  выбирается так, чтобы во все рассматриваемые моменты времени здесь имело место неравенство  $u > a$ , т. е.  $x$ -компонента скорости была сверхзвуковой.

Расчетная схема, при помощи которой по величинам в момент времени  $t$  и по параметрам на границах находятся величины в момент  $t + \tau$ , где  $\tau$  — шаг по времени, получается интегрированием (1.2) по времени от  $t$  до  $t + \tau$  с последующим применением теоремы о среднем. При этом в качестве  $S$  и  $\Gamma$  в (1.2) берутся описанные выше четырехугольные ячейки и их границы. Расчет параметров во всех элементарных ячейках, кроме ячеек «первого» слоя, примыкающего к сечению  $x = x_0$ , осуществляется по формулам, приведенным в [19, 20]. Отличия в вычислении параметров в ячейках первого слоя связаны с определением величин на границе  $x = x_0$  и состоят в следующем. В силу постановки задачи в сечении входа  $v = v_0 \equiv 0$  и известны правый инвариант Римана  $r_0$  и  $s_0 \equiv 1 / \kappa$ . При расчете величин в сечении входа  $r_0$  берется в момент времени  $t + \tau / 2$ , который отвечает полшагу по времени, а значения левого инварианта в том же сечении принимаются равными  $l$  в соответствующих ячейках первого слоя в момент времени  $t$ . Последнее согласуется с общим порядком определения величин на границах ячеек в используемой разностной схеме и позволяет вычислить все параметры в сечении входа. Расчету нестационарного течения предшествует получение стационарных распределений параметров, которые находятся по той же разностной схеме с использованием процесса установления. При этом  $r = r_{\infty} \equiv \text{const}$  бралось из одномерного расчета с поправкой на коэффициент расхода, рассчитанный также путем установления в соответствии с [20].

Существенным моментом при численном исследовании нестационарных течений является выбор протяженности расчетных ячеек ( $\Delta x$ ) в направлении оси  $x$ . Расчеты, выполненные для случая синусоидального колебания правого инварианта Римана

$$r_0(t) = r_{\infty} + \Delta r_0 \sin \omega t$$

показали, что если  $\Delta x$  недостаточно мало по сравнению с длиной волны  $\lambda_{\infty} \approx 2\pi a_{\infty} / \omega$ , то наблюдается затухание возмущения даже при его распространении по цилиндрическому участку. Это затухание вызвано погрешностями вычислений, и, как показали специально проведенные расчеты, для его устранения в рассмотренных

ниже примерах шаг по  $x$  необходимо выбирать таким, чтобы

$$\Delta x \leq (0.02 \div 0.025) \lambda_{\infty} \quad (1.3)$$

Шаг интегрирования по времени ( $\tau$ ), который получается при этом в соответствии с условием устойчивости, оказывается достаточным для обеспечения необходимой точности результатов.

Заметим, что нарушение условия (1.3) для двух наиболее высоких частот, рассмотренных в работе [21], является (наряду с образованием в волне скачков уплотнения) причиной наблюдавшегося в указанной работе затухания возмущений.

2. Для возможности сопоставления результатов численного интегрирования точных уравнений и результатов линейного анализа, а также для установления связи с терминологией и характеристиками, принятыми в акустике (см., например, [22]), приведем необходимые соотношения и формулы линейной теории. Отметим, что часть из них вместе с соответствующими выводами имеются в [1, 2]. В то же время ряд моментов в указанных работах не рассматривался. Так, например, отход от критического сечения в [1, 2] был описан лишь для частных случаев линейного или квадратичного распределения скорости стационарного течения в функции  $x$ .

Произвольный параметр течения  $\zeta(x, t)$  представим в виде

$$\zeta(x, t) = \zeta^{(0)}(x) + \Delta\zeta = \zeta^{(0)}(x) [1 + \zeta^1(x) \exp i\omega t] \quad (2.1)$$

где  $\zeta^{(0)}(x)$  — значение, рассчитанное для рассматриваемого сопла по одномерным стационарным уравнениям,  $\zeta^1(x)$  мало по сравнению с единицей, а  $\Delta\zeta$  — отклонение текущего значения любого параметра от своего стационарного значения.

В рассматриваемом случае  $s(x, t) = 1/\kappa$ , и поэтому в соответствии с определением  $s$  и предположением о малости  $p^1$  и  $\rho^1$  имеем

$$p^1(x) - \kappa \rho^1(x) = 0 \quad (2.2)$$

что позволяет исключить  $p^1(x)$  из уравнений течения.

Уравнения для  $u^1(x)$  и  $\rho^1(x)$  получаются путем подстановки представлений типа (2.1) в дифференциальные уравнения неразрывности и движения, записанные в одномерном приближении, линеаризации, исключения  $p^1(x)$  при помощи (2.2) и сокращения на  $\exp i\omega t$ . Результирующая система имеет вид<sup>1</sup>

$$u^{(0)} \frac{du^1}{dx} + u^{(0)} \frac{d\rho^1}{dx} + i\omega \rho^1 = 0 \quad (2.3)$$

$$u^0 \frac{du^1}{dx} + \frac{a^{(0)}}{M^0} \frac{d\rho^1}{dx} + \left(2 \frac{du^{(0)}}{dx} + i\omega\right) u^1 - (\kappa - 1) \frac{du^{(0)}}{dx} \rho^1 = 0 \quad (M = u/a)$$

Уравнения (2.3) можно переписать в виде нормальной системы, каждое из двух уравнений которой содержит производную только от  $u^1$  или  $\rho^1$ . Знаменатели правых частей такой системы содержат  $(1 - M^{(0)})$ , что свидетельствует об особенности в критическом сечении. Требование ограниченности производных при  $M^0 = 1$  приводит в соответствии с этим к условию

$$\left(2 \frac{du^{(0)}}{dx} + i\omega\right) u^1 - \left[(\kappa - 1) \frac{du^{(0)}}{dx} + i\omega\right] \rho^1 = 0 \quad (2.4)$$

в критическом сечении сопла, с которым, как и при численном анализе, будем совмещать начало отсчета  $x$ .

<sup>1</sup> Уравнения (2.3) с точностью до обозначений совпадают с системой (Б.6) работы [2]. В последней, однако, имеется опечатка: во втором уравнении вместо  $i\omega$  стоит  $-i\omega$ .

Производные  $du^1/dx$  и  $d\rho^1/dx$  для указанного класса решений ограничены [23] при  $x = 0$  и определяются формулами

$$\frac{d\rho^1}{dx} = \frac{(3 - \kappa) i \omega d^2 u^{(0)}/dx^2 - i \omega / u^0 (2 du^{(0)}/dx + i \omega)^2}{2 [(\kappa + 1) du^{(0)}/dx + i \omega] (2 du^{(0)}/dx + i \omega)} \rho^1 \quad (2.5)$$

$$\frac{du^1}{dx} = - \frac{d\rho^1}{dx} - \frac{i \omega}{u^0} \rho^1$$

В соответствии с записью (2.1) функции  $u^1(x)$ ,  $\rho^1(x)$ , ... являются комплексными, что связано с наличием сдвига фаз в колебаниях различных параметров. Подставив  $u^1(x)$  и  $\rho^1(x)$  в виде

$$u^1 = u_r^1 + i u_i^1, \quad \rho^1 = \rho_r^1 + i \rho_i^1$$

в систему (2.3), приходим к системе четырех уравнений с действительными коэффициентами

$$u^{(0)} [(M^{(0)})^{-2} - 1] \frac{d\rho_r^1}{dx} + [2u_r^1 - (\kappa - 1)\rho_r^1] \frac{du^{(0)}}{dx} + \omega(\rho_i^1 - u_i^1) = 0$$

$$u^{(0)} [(M^{(0)})^{-2} - 1] \frac{d\rho_i^1}{dx} + [2u_i^1 - (\kappa - 1)\rho_i^1] \frac{du^{(0)}}{dx} - \omega(\rho_r^1 - u_r^1) = 0 \quad (2.6)$$

$$u^{(0)} \frac{du_r^1}{dx} = - u^{(0)} \frac{d\rho_r^1}{dx} + \omega \rho_i^1$$

$$u^{(0)} \frac{du_i^1}{dx} = - u^{(0)} \frac{d\rho_i^1}{dx} - \omega \rho_r^1$$

Эта система эквивалентна системе (2.3) и в общем случае может быть решена численно. Условие (2.4) при этом также дает два условия, связывающие  $u_r^1$ ,  $u_i^1$ ,  $\rho_r^1$  и  $\rho_i^1$  при  $x = 0$ , а формулы (2.5) дают четыре соотношения, которые выражают все производные в критическом сечении через  $\omega$ ,  $\rho_r^1$ ,  $\rho_i^1$  и параметры стационарного потока в том же сечении. В соответствии с (2.6) и уравнениями одномерного стационарного потока значения производных  $du_r^1/dx$ , ... при  $x = 0$  выражаются через  $d^2 F/dx^2$  и  $d^3 F/dx^3$  в критическом сечении сопла ( $F$  — площадь поперечного сечения).

Если  $\rho_r^1$  и  $\rho_i^1$  при  $x = 0$  выбраны, то для любого  $\omega$  условие (2.4) однозначно определяет  $u_r^1$  и  $u_i^1$ , а формулы (2.5) — все первые производные по  $x$  в том же сечении, что позволяет провести отход от особой точки  $x = 0$  до некоторого  $x = -\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — достаточно малая положительная величина. Интегрируя затем систему (2.6) от  $x = -\varepsilon$  до сечения входа в сопло  $x = x_0 < 0$ , можно найти отношение  $(u^1/\rho^1)_0$  или акустическую проводимость сопла  $\eta = \rho_\infty a_\infty (\Delta u / \Delta p)_0$ , которая в силу (2.1) и (2.2) равна  $\eta = M_\infty (u^1/\rho^1)_0$ .

Акустическая проводимость  $\eta$ , как и  $u^1$ ,  $\rho^1$ , ... , есть величина комплексная, что отражает сдвиг фаз колебаний скорости относительно колебаний давления. Знание  $\eta$  в виде функции  $\omega$  в соответствии с определением акустической проводимости позволяет (для фиксированного сопла) формулировать граничное условие, которое при исследовании течения в камере сгорания заменяет рассмотрение колебаний в сопле.

Так как акустическая проводимость пропорциональна отношению  $(u^1/\rho^1)_0$ , то ввиду линейности уравнений (2.3) или (2.6) начальные значения  $\rho_r^1$  и  $\rho_i^1$  при  $x = 0$  для вычисления  $\eta$  можно брать произвольными, например положить  $\rho_r^1 = 1$ ,  $\rho_i^1 = 0$  при  $x = 0$ .

Наряду с акустической проводимостью часто используется коэффициент отражения

$$q = \left( \frac{\Delta p_-}{\Delta p_+} \right)_0 = - \left( \frac{\Delta l}{\Delta r} \right)_0 \quad (2.7)$$

где  $\Delta r_+$  и  $\Delta r_-$  — превращения давления в приходящей и отраженной волнах соответственно. При переходе от  $\Delta r_+$  и  $\Delta r_-$  к возмущениям инвариантов Римана в (2.7) использовалась линеаризация выражений для  $r$  и  $l$  с учетом (2.2) и формула для скорости звука:  $a = \sqrt{\kappa p / \rho}$ . Если  $\Delta l$  и  $\Delta r$  представить в форме (2.1), то

$$q = - \left( \frac{l_\infty}{r_\infty} \right) \left( \frac{l^1}{r^1} \right)_0$$

Так как  $l^1$  и  $r^1$  — комплексные величины, то  $q$  — также комплексная функция  $\omega$ , модуль которой обозначим через  $Q$ , а аргумент — через  $\varphi$ . В соответствии с этим  $(\varphi - \pi)$  есть сдвиг фаз в колебаниях левого и правого инвариантов Римана в сечении входа в сопло ( $x = x_0$ ). Можно показать, что в линейном приближении между коэффициентом отражения и акустической проводимости имеет место связь

$$\eta = (1 - q)(1 + q) \quad (2.8)$$

эквивалентная двум соотношениям между действительными величинами

$$Q = [(1 - \eta_r^2 - \eta_i^2)^2 + 4\eta_i^2]^{1/2} / (1 + 2\eta_r + \eta_r^2 + \eta_i^2)$$

$$\sin \varphi = -2\eta_i / [(1 - \eta_r^2 - \eta_i^2)^2 + 4\eta_i^2]^{1/2}$$

3. Основные расчеты проводились для сопла, контур которого задавался следующим образом. Сужающуюся и расширяющуюся части контура составляли прямые, плавно сопрягающиеся между собой и с начальным цилиндрическим участком дугами окружностей одинакового радиуса  $R = 1$ , т. е. радиуса, равного ординате стенки в критическом сечении (при  $x = 0$ ). Ордината стенки начального цилиндрического участка ( $Y$ ) равнялась двум, что соответствует четырехкратному сужению по площади. Прямолинейные участки сужающейся и расширяющейся частей сопла наклонены к оси  $x$  под углами  $\alpha = -30^\circ$  и  $\beta = 15^\circ$  соответственно. Входное сечение располагалось при  $x = x_0 = -4$ , а выходное — при  $x = L = 1$ .

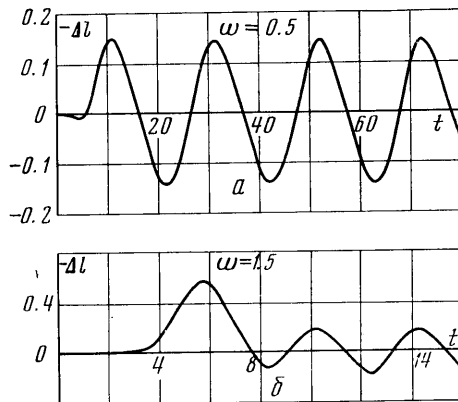
Число разбиений по  $x$ , т. е.  $N$ , бралось в согласии с (1.3) и в зависимости от частоты  $\omega$  менялось от 19 до 46. С целью выбора количества «продольных» слоев ( $K$ ) для двух частот ( $\omega = 0.3$  и  $0.8$ ) было проведено сравнение результатов, полученных при  $K = 2$  и  $K = 4$ . Поскольку различие в  $Q$  и  $\varphi$  в этих случаях не превышало 2–3%, то дальнейшие расчеты выполнялись при  $K = 2$ .

Рассматривался совершенный газ с  $\kappa = 1.4$ . Колебания правого инварианта Римана в приходящей волне задавались в виде

$$r(t, x_0) = \begin{cases} r_\infty & (t \leq 0) \\ r_\infty + \Delta r_0 \sin \omega t & (t > 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

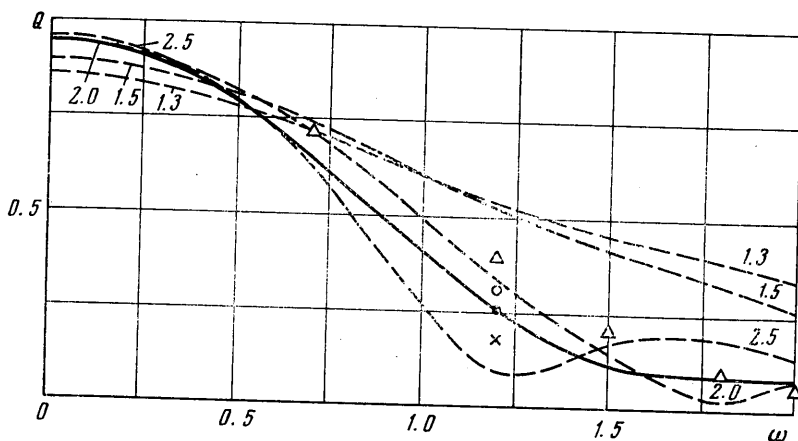
При этом относительная амплитуда  $\Delta r_0 / r_\infty = 0.03$ , безразмерная частота  $\omega$  изменялась от 0 до 2, а  $r_\infty = 5.629$ . Взятой амплитуде колебания  $r$  соответствуют колебания скорости (в сечении  $x = x_0$ ), достигающие 70% стационарного значения  $u_\infty \approx 0.16$ , и колебания давления, достигающие (в зависимости от частоты) 10 ÷ 20%.

На фиг. 2 для сопла описанной выше конфигурации и двух частот (напомним, что частота отнесена к  $u_*^0 / y_*^0$ , где  $u_*^0$  и  $y_*^0$  — размерные критическая скорость стационарного потока и ордината стенки в критическом сечении сопла) приведены осциллограммы колебания левого инварианта Римана в сечении  $x = x_0$ , т. е. зависимости  $\Delta l = l(t, x_0) - l_\infty$  от времени. На фигурах даны значения, осредненные (в сечении входа) по площади.



Фиг. 2

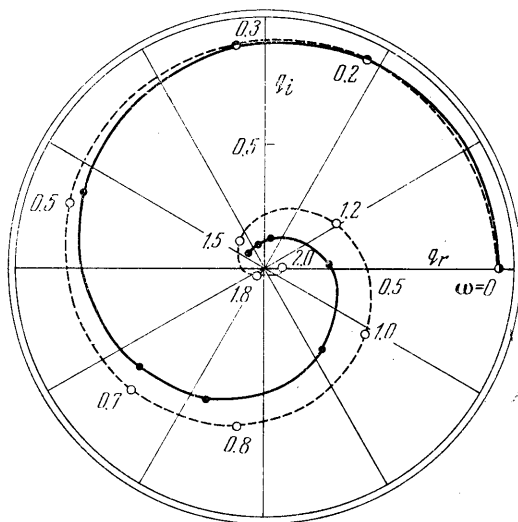
Подобный способ осреднения представляется естественным, если учесть, что анализ динамики течения в камерах, как правило (во всяком случае при исследовании продольных колебаний), основывается на одномерном приближении, уравнения которого также получаются осреднением по площади. Осредненные тем же способом величины  $\Delta l$  использовались и при вычислении  $Q$ ,  $\varphi$ ,  $\eta_r$  и  $\eta_i$ .



Фиг. 3

Как видно из фигур, выход на «установившийся» колебательный режим происходит после некоторого переходного процесса, продолжительность которого (отношенная к периоду колебания:  $T = 2\pi / \omega$ ) растет с увеличением частоты. В случае сравнительно низкой частоты ( $\omega < 0.6$ ) уже первое отраженное колебание близко к «установившемуся». С ростом  $\omega$  отличие формы первой отраженной волны от формы, характерной для «установившегося» режима, усиливается, причем первое отраженное возмущение оказывается значительно более интенсивным. При рассмотрении фиг. 2 следует иметь в виду, что при счете подробно выводились на печать

только левые участки, примыкающие к точкам максимума и минимума соответствующих кривых. Данное обстоятельство не позволяет с достоверностью судить о степени отличия получающихся из расчета отраженных волн от гармонического колебания, имеющего частоту падающей волны.



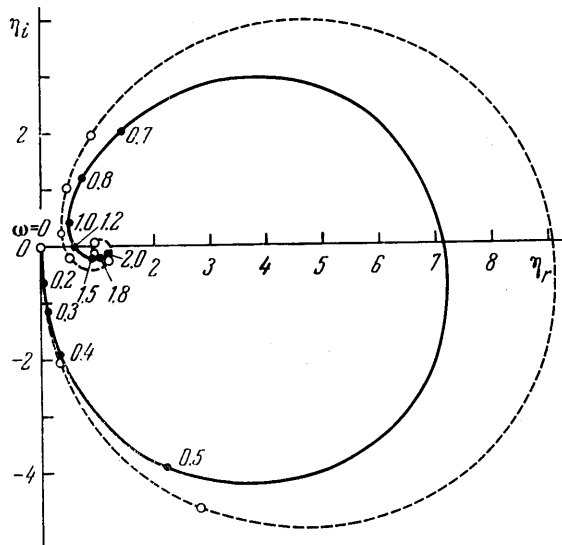
Фиг. 4

фиг. 3—5, где сплошными линиями и темными кружочками изображены данные (которые в дальнейшем будем называть «точными»), полученные численным интегрированием уравнений нестационарного осесимметрич-

Осциллограммы, представленные на фиг. 2, а также аналогичные осциллограммы, построенные для других частот (расчеты проводились для  $\omega = 0, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 1.8$  и  $2.0$ ), позволяли найти  $Q$ ,  $\varphi$ ,  $\eta_r$  и  $\eta_i$ , т. е. величины, которые используются обычно при постановке условия отражения. Соответствующие результаты для  $Y = 2.0$  показаны на

ного течения, а штриховыми линиями и светлыми кружочками — аналогичные «приближенные» результаты, полученные для тех же условий по линейной одномерной теории, описанной в предыдущем пункте (цифры около штриховых кривых на фиг. 3 — значения  $Y$ ). При этом точные значения  $q$  находились, как уже отмечалось, через отношения  $\Delta l$  и  $\Delta r$ , т. е. по второй паре равенств из (2.7), а переход к  $\eta$  осуществлялся в соответствии с формулой (2.8), полученной в линейном приближении.

На фиг. 3 построены кривые зависимости модуля коэффициента отражения от частоты. На фиг. 4 коэффициент отражения дан в комплексной плоскости (напомним, что  $q_r$  и  $q_i$  — действительная и мнимая части  $q$ ). Расстояние от начала координат на этой фигуре дает  $Q$ , а угол с осью абсцисс — сдвиг фаз  $\phi$ . Цифры на фигуре около светлых кружочков — значения  $\omega$ . Темные кружочки на сплошной кривой соответствуют тем же частотам, причем темные и светлые кружочки для частот  $\omega = 0$  и  $0.2$  в масштабе фигуры практически совпадают. Видно, что отличие точных и приближенных результатов по сдвигу фаз монотонно растет с увеличением частоты. На фиг. 5 аналогичное сравнение проведено в комплексной плоскости акустической проводимости.



Фиг. 5

Анализ фиг. 3–5 показывает, что для исследованного сопла с некоторой частоты результаты линейной теории начинают отличаться от результатов точного расчета не только количественно, но и качественно. Так, если сплошная кривая на фиг. 3 монотонно приближается к оси абсцисс, то для штриховой кривой это имеет место лишь для  $\omega < 1.8$ . Еще более наглядно отмеченная немонотонность видна из рассмотрения штриховых кривых фиг. 3, полученных по линейной теории для сопел с различными степенями поджата (прочие геометрические характеристики, т. е.  $x_0$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  при этом сохранялись неизменными). Видно, что, чем больше  $Y$ , тем раньше (при меньших  $\omega$ ) обнаруживается немонотонность соответствующей кривой.

Чтобы выяснить причины такого отличия, для ряда частот по разностной схеме, которая использовалась при получении точных результатов, при  $K = 1$ , т. е. с одной ячейкой в направлении оси  $y$ , было выполнено численное интегрирование системы (1.2) без второго уравнения движения (третьего уравнения данной системы), причем вертикальная составляющая скорости при расчете предполагалась равной нулю. В этом случае, как и при интегрировании полной системы, не возникает необходимости в формулировании какого-либо условия регуляризации при  $x = 0$ , и можно показать, что подобный расчет практически эквивалентен интегрированию нелинейных уравнений одномерного нестационарного течения.

Результаты выполненных расчетов для  $Y = 2$  изображены на фиг. 3 треугольниками и дают монотонное изменение  $Q$  по  $\omega$ . Таким образом не-



монотонность штриховых кривых на фиг. 3 вряд ли вызвана использованием одномерного приближения. Более вероятно, что эта немонотонность есть следствие пренебрежения нелинейными эффектами, которые особенно важными могут быть вблизи критического сечения сопла. Последнее связано, например, с тем, что при линеаризации разность  $(u_0 - a_0)$  считается величиной порядка единицы, в то время как при  $x = 0$  она обращается в нуль. Поэтому условие регуляризации (2.4) есть способ исключения особенности, появляющейся только в линейном приближении, причем, в принципе, устранение подобной особенности, вообще говоря, необязательно.

Отметим, кстати, что во многих задачах гидродинамики и газовой динамики (например, в задаче дозвукового обтекания тонкого профиля) особенности подобного типа вообще не удается устранить в рамках линейной теории регулярных возмущений, что, однако, как правило, не мешает использовать результаты линейного приближения вне малых окрестностей соответствующих точек [13]. Наконец, возмущения, распространяющиеся против течения, отражаются не только от сечения  $x = 0$ , но и от области, расположенной справа от него, и в моменты, когда при  $x > 0$  разность  $u - a$  отрицательна, могут переноситься в сужающуюся часть сопла. Это также не учитывается линейной теорией, согласно которой форма стенок расширяющегося участка вообще не влияет на процесс отражения. Последний эффект, как и влияние нелинейности вне непосредственной окрестности критического сечения, играет, по-видимому, второстепенную роль. Об этом свидетельствует, в частности, малое (в пределах 1%) отличие точных результатов по коэффициенту отражения, полученных для  $\omega = 1.2$  при  $\Delta r_0 = 0.03$  и  $0.01$ , т. е. при трехкратном уменьшении амплитуды входящей волны.

Из сказанного ясно, что основной эффект нелинейности связан с использованием условия регуляризации (2.4), необходимость в котором вызвана пренебрежением изменением разности  $u - a$  при  $x = 0$ . Так как для малых  $\omega$  линейная теория обеспечивает достаточно хорошее количественное совпадение с точными результатами и дает правильное качественное описание явления, то можно полагать, что используемый способ регуляризации здесь не приводит к существенным погрешностям. Указанные погрешности возрастают по мере уменьшения длины волны входящего слева возмущения и, по-видимому, становятся существенными, когда последняя в каком-то смысле становится соизмеримой с протяженностью области критического сечения.

Заканчивая изложение, остановимся на результатах, дающих некоторое представление о влиянии на отражение возмущений формы сопла (заметим, кстати, что определенную информацию такого рода дают также кривые фиг. 3, полученные на основе линейного приближения). С этой целью ряд точных расчетов был выполнен для сопл, отличных от сопла, описанного выше.

Прежде всего исследовалось влияние степени поджатия, т. е.  $Y$ , для чего при  $\omega = 1.2$  наряду со случаем  $Y = 2$  были рассмотрены сопла с  $Y = 1.5$  и  $3.0$ , что соответствует поджатиям по площади в 2.25 раза и в 9 раз. Остальные параметры, характеризующие форму контура сохранялись без изменений. Относительная амплитуда входящего возмущения также фиксировалась ( $\Delta r_0 / r_\infty = 0.03$ ), в то время как значения  $r_\infty$  в этих случаях равнялись 5.734 и 5.553 соответственно.

Полученные результаты вместе со значением, соответствующим  $Y = 2.0$ , даны на фиг. 3 светлым кружком, темным кружком и крестиком (в порядке возрастания  $Y$ ). Видно, что для рассмотренной частоты линейная теория дает правильное описание влияния степени поджатия на модуль коэффициента отражения. Аналогичный вывод справедлив и для изменения фазы  $\phi$  как функции  $Y$ . Кроме того, для  $\omega = 0.3$  было проведено исследование влияния угла сужения конического участка. Здесь наряду со значением  $\alpha = -30^\circ$  были рассмотрены сопла с  $\alpha = -40^\circ$  и  $-50^\circ$ . Как показали расчеты, различие  $Q$  и  $\phi$  в указанных случаях не превышало нескольких процентов.

В заключение приведем формулу перехода от безразмерной частоты  $\omega$ , использованной выше, к размерной частоте  $f^\circ$

$$f^\circ = \omega u_*^\circ / (2\pi u_*^\circ)$$

Если критическая скорость  $u_*^\circ$  взята в м/сек, а радиус критического сечения  $y_*^\circ$  — в м, то  $f^\circ$  получается в гц.

Авторы признательны Г. Г. Черному, В. Л. Эпштейну и А. Н. Руденко за полезные обсуждения, а М. Я. Иванову, А. М. Конкиной, Л. П. Фроловой и В. М. Шувариковой за помощь в работе.

Поступила 5 XII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tsien H. S. Transfer functions of rocket nozzles. *ARS Journal (Jet Propulsion)*, 1952, vol. 22, No. 13, pp. 139—143, 162.
2. Крокко Л., Чжен Синь-и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М., Физматгиз, 1961.
4. Mitchell C. E., Crocco L., Sirignano W. A., Nonlinear longitudinal instability in rockets motors with concentrated combustion. *Combust. Sci. and Techn.*, 1969, vol. 1, No. 1, pp. 35—64.
5. Gould R. D. Combustion instability studies with plastic propellant. *AIAA paper*, 1969, No 69—478.
6. Brown R. S., Muzzy R. J. Linear and nonlinear pressure coupled combustion instability of solid propellants. *AIAA paper*, 1969, No. 69—479.
7. Roberts A. K., Brownlee W. G. Nonlinear longitudinal combustion instability: the influence of propellant composition. *AIAA paper*, 1969, No. 69—480.
8. Mitchell C. E. Stability limits for a liquid rocket engine using a droplet vaporization model. *AIAA paper*, 1969, No. 69—483.
9. Culick F. E. C. Stability of longitudinal oscillations with pressure and velocity coupling in a solid propellant rocket. *Combust. Sci. and Techn.*, 1970, vol. 2, No. 4, pp. 179—201.
10. Beckstead M. W., Culick F. E. C. A comparison of analysis and experiment for solid-propellant combustion instability. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, No. 1, pp. 147—154.
11. Roberts A. K., Brownlee W. G. Nonlinear longitudinal combustion instability: influence of propellant composition. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, No. 1, pp. 140—146.
12. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точки перехода через скорость звука. *ПММ*, 1967, т. 31, вып. 4, стр. 593—602.
13. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
14. Zinn B. T., Crocco L. Periodic finite-amplitude in slowly converging nozzles. *Astronaut. Acta*, 1968, vol. 13, No. 5/6, pp. 481—488.
15. Zinn B. T., Crocco L. The nozzle boundary condition in the nonlinear rocket instability problem. *Astronaut. Acta*, 1968, vol. 13, No. 5/6, pp. 489—496.
16. Crocco L., Monti R., Grey J. Verification of nozzle admittance theory by direct measurement of the admittance parameter. *ARS Journal*, 1961, vol. 31, No. 6, pp. 771—775.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
18. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Матем. сб.* 1959, т. 47 (89), № 3, стр. 271—306.
19. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, 1961, т. 1, № 6, стр. 1020—1050.
20. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 5, стр. 77—83.
21. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Исследование динамики течения торможения идеального газа с замыкающим скачком уплотнения. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 4, стр. 23—32.
22. Морз Ф. Колебания и звук. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
23. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.