№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

УДК 532.546

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЛАНОВОЙ ЗАДАЧИ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ К СКВАЖИНАМ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

В. Д. АЛФЕРОВ, В. И. РЯШЕНЦЕВ

(*Томск*)

В работе рассматривается одна из модификаций метода С. Бергмана [1] применительно к задачам напорной фильтрации жидкости в горизонтальных пластах с проницаемостью, непрерывно зависящей от координат точек плана течения. Построено комплексное представление напора артезианских вод в виде интегрального оператора, содержащего одну произвольную аналитическую функцию. Рассмотрены примеры определения падения напора в круговом пласте с точечными скважинами при линейном изменении проницаемости. Проведено сопоставление полученных результатов с ранее известными [2, 3].

1. Установившаяся напорная фильтрация несжимаемой жидкости в горизонтальных пластах с переменной проницаемостью при линейном законе Дарси описывается уравнением [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \tag{1.1}$$

где $H(x, y)=P+\gamma\zeta$, P — давление, γ — удельный вес жидкости, ζ — вертикальная координата, $k(x, y)$ — проницаемость, x, y — координаты точек плана течения.

Предполагая проницаемость всюду отличной от нуля и вводя новую функцию

$$U(x, y)=k^{1/2}(x, y)H(x, y) \tag{1.2}$$

приведем уравнение (1.1) к виду

$$\Delta U+g(x, y)U=0 \tag{1.3}$$

Здесь $g(x, y)$ — известная функция, определяемая из соотношения

$$\Delta\sqrt{k}+g(x, y)\sqrt{k}=0 \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.3) будем искать в виде

$$U(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x,y)\varphi_n(x,y)-\beta_n(x,y)\psi_n(x,y) \tag{1.5}$$

где $\alpha_n(x, y)$, $\beta_n(x, y)$ — пока неизвестные переменные коэффициенты, а функции $\varphi_n(x, y)$ и $\psi_n(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}=\frac{\partial\psi_n}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial y}=-\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\quad (n=0,1,\ldots) \tag{1.6}$$

и рекуррентным соотношениям

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}=\varphi_{n-1},\quad \frac{\partial\psi_n}{\partial x}=\psi_{n-1}\quad (n=1,2,\ldots) \tag{1.7}$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и учитывая условия (1.6), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\Delta\alpha_n\varphi_n+2\frac{\partial\alpha_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+2\frac{\partial\alpha_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+g(x,y)\alpha_n\varphi_n-\Delta\beta_n\psi_n-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial\beta_n}{\partial x}\frac{\partial\psi_n}{\partial x}-2\frac{\partial\beta_n}{\partial y}\frac{\partial\psi_n}{\partial y}-g(x,y)\beta_n\psi_n\right\}=0 \qquad (1.8)$$

Принимая во внимание рекуррентные соотношения (1.7), из (1.8) для коэффициентов α_n и β_n получим следующую систему рекуррентных уравнений:

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}=\frac{\partial\beta_0}{\partial y},\qquad \frac{\partial\alpha_0}{\partial y}=-\frac{\partial\beta_0}{\partial x}$$

$$2\frac{\partial\alpha_n}{\partial x}=2\frac{\partial\beta_n}{\partial y}-(\Delta\alpha_{n-1}+g(x,y)\alpha_{n-1}) \qquad (1.9)$$

$$2\frac{\partial\alpha_n}{\partial y}=-2\frac{\partial\beta_n}{\partial x}-(\Delta\beta_{n-1}+g(x,y)\beta_{n-1})$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots)$$

Введем в рассмотрение комплексные переменные

$$z=x+iy,\qquad \bar z=x-iy$$

В комплексной форме система уравнений (1.9) запишется в виде

$$\frac{\partial A_0}{\partial\bar z}=0,\qquad \frac{\partial A_n}{\partial\bar z}=-\left(\frac{\partial^2A_{n-1}}{\partial z\,\partial\bar z}+G(z,\bar z)A_{n-1}\right) \qquad (1.10)$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots)$$

где

$$A_n(z,\bar z)=\alpha_n(x,y)+i\beta_n(x,y),\qquad G(z,\bar z)=\frac{1}{4}g\left(\frac{z+\bar z}{2},\ \frac{z-\bar z}{2i}\right) \qquad (1.11)$$

Положим $A_0(z)=1$. При интегрировании рекуррентных уравнений (1.10) можно ограничиться частными решениями, не зависящими от граничных условий. Тогда коэффициенты $\alpha_n(x,\ y)$ и $\beta_n(x,\ y)$ будут определяться лишь проницаемостью $k(x,\ y)$ и могут быть затабулированы.

Введем последовательность комплексных функций

$$W_n(z)=\varphi_n(x,\ y)+i\psi_n(x,\ y)\qquad (n=0,\ 1,\ \ldots) \qquad (1.12)$$

для которых согласно (1.7) будет справедливо рекуррентное соотношение

$$dW_n\,/\,dz=W_{n-1}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (1.13)$$

С учетом условий (1.6) комплексные функции $W_n(z)$ будут аналитическими, причем произвольной будет лишь $W_0(z)$, так как все последующие функции $W_n(z)$ выражаются через предыдущие и, следовательно, через $W_0(z)$.

Последовательное интегрирование рекуррентного соотношения (1.13) приводит к следующей зависимости функций $W_n(z)$ от произвольной функции $W_0(z)$:

$$W_n(z) = \int_{z_0}^{z} W_0(t)\,[(z-t)^{n-1}/(n-1)!]\,dt \tag{1.14}$$

где z_0 — комплексная постоянная.

В обозначениях (1.11) и (1.14) ряд (1.5) можно представить в виде

$$U(x,y) = \operatorname{Re}\left[W_0(z) + \int_{z_0}^{z} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z,\bar z)\frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} W_0(t)\,dt\right] \tag{1.15}$$

или

$$U(x\ y) = \operatorname{Re}\left[W_0(z) + \int_{z_0}^{z} N(z,\bar z,t)\,W_0(t)\,dt\right] \tag{1.16}$$

где функция

$$N(z,\bar z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z\ \bar z)\frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.17}$$

является ядром интегрального оператора (1.16).

Полученный интегральный оператор переводит произвольную аналитическую функцию $W_0(z)$ в решение исходного уравнения, и тем самым фильтрационному потоку в однородной среде, с потенциалом $\varphi = \operatorname{Re} W_0(z)$, ставится в соответствие некоторое фильтрационное течение в неоднородной среде с проницаемостью $k(x, y)$.

2. Для практического применения интегрального оператора (1.16) к краевым задачам необходимо, чтобы ядро (1.17) оператора в области фильтрации было равномерно и абсолютно сходящимся. Приведем один из примеров решения уравнения (1.1), которое может быть мажорантным в круговой области для решений, соответствующих некоторому классу проницаемостей.

Рассмотрим следующую зависимость:

$$\tilde G(z,\bar z) = \lambda \Big/ \left(1 + \frac{a-ib}{2}z + \frac{a+ib}{2}\bar z\right)^2 \qquad (\lambda = \mathrm{const}) \tag{2.1}$$

которая при постоянных параметрах a и b соответствует линейному закону распределения проницаемости

$$k(x,\ y) = k_0(1 + ax + by)$$

и пусть

$$|G| \leqslant |\tilde G| \qquad \left|\frac{\partial^m G}{\partial z^m}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^m \tilde G}{\partial z^m}\right| \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

Для определения $\tilde A_n(z, \bar z)$ имеем рекуррентные уравнения

$$\frac{\partial \tilde A_n}{\partial \bar z} = -\left(\frac{\partial^2 \tilde A_{n-1}}{\partial z\,\partial \bar z} + \frac{\lambda \tilde A_{n-1}}{(1 + {}^1/_2(a-ib)z + {}^1/_2(a+ib)\bar z)^2}\right), \qquad \tilde A_0 = 1 \tag{2.3}$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

из которых последовательным интегрированием находим

$$\tilde A_n(z,\bar z) = n!\mu_n\left(\frac{a-ib}{2}\right)^n\left(1 + \frac{a-ib}{2}z + \frac{a+ib}{2}\bar z\right)^{-n} \tag{2.4}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

где коэффициенты μ_n связаны между собой зависимостью

$$\mu_{n+1} = \mu_n(n + \alpha^{(1)})(n + \alpha^{(2)})(n+1)^{-2}, \qquad \mu_0 = 1 \tag{2.5}$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4\lambda}{a^2+b^2}}, \qquad \alpha^{(2)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4\lambda}{a^2+b^2}}$$

Для ядра $\tilde{N}(z, \bar{z}, t)$ будем иметь

$$\tilde{N}(z, \bar{z}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\mu_n(a-ib)^n(z-t)^{n-1}}{2^n(n-1)!(1+ax+by)^n} \tag{2.6}$$

Замечая, что μ_n изменяются так же, как и коэффициенты гипергеометрического ряда

$$F(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, 1, (a-ib)(z-t) / 2(1+ax+by)) \tag{2.7}$$

мажорирующее ядро $\tilde{N}(z, \bar{z}, t)$ можно записать в виде

$$\tilde{N}(z, \bar{z}, t) = -\frac{d}{dt} F\left(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, 1, \frac{(a-ib)(z-t)}{2(1+ax+by)}\right) \tag{2.8}$$

Очевидно, ряд (2.6) будет равномерно и абсолютно сходиться в области, где

$$\frac{1}{2}\left|\frac{(a-ib)(z-t)}{1+ax+by}\right| < 1 \tag{2.9}$$

Если интегрирование в (1.16) ведется по прямой от точки $z=0$ до точки $z=t$, то $\max|z-t| = |z|$ и в качестве области сходимости ядра $\tilde{N}(z, \bar{z}, t)$ можно взять круг с радиусом

$$R = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \min(1+ax+by) \tag{2.10}$$

Из (1.10) и (2.3) с учетом условий (2.2) для $A_n(z, \bar{z})$ получаем оценку

$$|A_n(z, \bar{z})| \leqslant |\tilde{A}_n(z, \bar{z})| \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

следовательно, ядро $N(z, \bar{z}, t)$ будет равномерно и абсолютно сходиться в той же области, что и ядро $\tilde{N}(z, \bar{z}, t)$.

Общее аналитическое решение уравнения (1.1) при линейном изменении проницаемости $k(x, y)$ принимает вид

$$H(x, y) = (1+ax+by)^{-1/2} \operatorname{Re}\left[W_0(z) - \int_0^z \frac{d}{dt} F(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, 1, (a-ib) \times \right.$$

$$\left. \times (z-t)/2(1+ax+by)) W_0(t)\,dt\right] \tag{2.12}$$

Следует отметить, что в этом случае решение исходного уравнения в таком замкнутом виде другим путем получить пока не удалось.

Рассмотрим еще частный случай, когда

$$g(x, y) = \lambda^2 \qquad (\lambda = \text{const}) \tag{2.13}$$

Из рекуррентных уравнений (1.10) для $A_n(z, \bar{z})$ получим

$$A_0 = 1, \ A_n = (-1)^n \lambda^{2n} \bar{z}^n / 2^{2n}! \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.14}$$

Ядро (1.17) принимает вид

$$N(z,\bar z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{2n}\bar z^n(z-t)^{n-1}}{2^{2n}n!(n-1)!} \qquad (2.15)$$

а общее решение уравнения (1.1) представится в виде следующего интегрального оператора:

$$H(x,y)=k^{-1/2}(x,y)\,\mathrm{Re}\left[W_0(z)-\int_0^z\frac{d}{dt}J_0(\lambda\sqrt{\bar z(z-t)})\,W_0(t)\,dt\right] \qquad (2.16)$$

где $J_0(\lambda x)$ — функция Бесселя первого ряда.

Другим путем этот интегральный оператор ранее был получен И. Н. Векуа [5].

3. Рассмотрим плановую задачу установившейся напорной фильтрации несжимаемой жидкости к точечной скважине с дебитом Q в горизонтальном пласте единичного радиуса и переменной проницаемости при постоянном напоре H_0 на контуре питания.

Определение понижения напора в пласте сводится к интегрированию уравнения (1.1) при следующих условиях:

$$H=H_0,\quad \rho=1;\qquad \lim_{\gamma_0\to 0}\left(-\oint_{\gamma_0}\frac{kh}{\mu}\frac{\partial H}{\partial n}ds\right)=Q\quad (\rho=\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (3.1)$$

Здесь γ_0 — произвольный контур, охаватывающий скважину, n — внутренняя нормаль к контуру γ_0, μ — вязкость жидкости, h — мощность пласта.

Для решения задачи воспользуемся интегральным оператором

$$H=H_0+k^{-1/2}(x,y)\,\mathrm{Re}\left[W_0(z)+\int_0^z N(z,\bar z,t)\,W_0(t)\,dt\right] \qquad (3.2)$$

Произвольную аналитическую функцию $W_0(z)$ будем искать в виде ряда

$$W_0(z)=A\left(\ln z+\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m\right),\qquad A=\frac{Q\mu}{2\pi h\sqrt{k(0,0)}} \qquad (3.3)$$

Тогда постоянные коэффициенты a_m должны быть такими, чтобы выполнялось граничное условие на контуре питания

$$\mathrm{Re}\left[\ln z+\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m+\int_0^z N(z,\bar z,t)\left(\ln z+\sum_{m=0}^{\infty}a_m t^m\right)dt\right]_{|z|=1}=0 \qquad (3.4)$$

Для сравнения результатов рассмотрим примеры, решенные методом И. Н. Векуа [5] в работах [2, 3] Г. В. Голубевым.

Пример 1. Пусть проницаемость изменяется по линейному закону

$$k(x,\ y)=k_0(1+ax+by) \qquad (3.5)$$

В этом случае ядро оператора (3.2) будет иметь вид (2.8), где $\lambda = (a^2+b^2)/16$. Повернув систему координат на угол $\delta=\mathrm{arctg}\,(b/a)$, проницаемость и ядро оператора (3.2) приведем к виду

$$k=k_0(1+\alpha x),\qquad N(z,\bar z,t)=-\frac{d}{dt}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{\alpha(z-t)}{2(1+\alpha x)}\right) \qquad (3.6)$$

Ограничиваясь первым приближением ряда (3.6)

$$N(z, \bar{z}, t) \approx \alpha/(1+\alpha x) \tag{3.7}$$

и внося его в (3.4), получим

$$\operatorname{Re}\left[\ln z + \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m + \frac{\alpha}{8(1+\alpha x)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m z^{m+1}}{m+1}\right]_{|z|=1} = \\ = \left\{\frac{\alpha}{8(1+\alpha x)} \operatorname{Re}[z - z\ln z]\right\}_{|z|=1} \tag{3.8}$$

или, выделяя действительную часть и переходя к полярным координатам

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta + \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{a_m c_k}{2} [\cos(m+k+1)\theta + \cos(m-k+1)\theta] = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos k\theta \tag{3.9}$$

Здесь c_k и d_k — коэффициенты разложения соответственно функции $\alpha/8(1+\alpha\cos\theta)$ и правой части (3.8) в ряды по косинусам.

Для нахождения a_m нужно приравнять коэффициенты при косинусах одинаковых дуг. В результате получим регулярную систему алгебраиче-

Таблица 1

ρ	θ				
	0	π/4	π/2	3/4π	π
0.1	136.82	136.78	136.60	136.52	136.28
0.2	140.87	140.81	140.56	140.40	140.32
0.4	144.93	144.87	144.62	144.38	144.29
0.6	147.22	147.17	147.00	146.82	146.80

ских уравнений. Ограничиваясь N первыми коэффициентами a_m, эту систему можно решить на ЭВМ.

С учетом (3.7) для табулирования $H(\rho, \theta)$ в первом приближении будем иметь следующее выражение:

$$H^{(1)}(\rho,\theta) = H_0 + A[k_0(1+\alpha\rho\cos\theta)]^{-1/2}\left\{\ln\rho + \sum_{m=0}^{N-1} a_m\rho^m \cos m\theta + \right. \\ + \frac{\alpha}{8(1+\alpha\rho\cos\theta)}\left(\rho\ln\rho\cos\theta - \rho\theta\sin\theta - \right. \\ \left.\left. - \rho\cos\theta + \sum_{m=0}^{N-1} a^m \frac{\rho^{m+1}\cos(m+1)\theta}{m+1}\right)\right\} \tag{3.10}$$

В табл. 1 приведены значения напора, вычисленные на ЭВМ М-20 по формуле (3.10) с учетом шести первых коэффициентов a_m.

За исходные данные были взяты величины $\alpha = 0.3$, $\mu = 2.5$ *спз*, $k_0 = 0.4$, $h = 0.8$ *м*, $H_0 = 150$ *атм*, $Q = 5200$ *см³/сек*.

Пример 2. Рассмотрим теперь фильтрационное течение, обусловленное действием эксцентрично расположенного источника в круговом пласте с проницаемостью (3.5).

Запишем первое приближение для напора $H(x, y)$

$$H^{(1)}(x, y) = H_0 + k^{-1/2}(x)\,\mathrm{Re}\left[W_0(z) + \frac{\alpha}{8(1+\alpha x)}\int_{z_0} W_0(t)\,dt\right] \tag{3.11}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$; x_0, y_0 — координаты скважины.

Выбирая произвольную функцию $W_0(z)$ в виде

$$W_0(z) = B\left(\ln(z - z_0) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right), \quad B = \frac{Q\mu}{2\pi h\sqrt{k(x_0 y_0)}} \tag{3.12}$$

и внося ее в (3.11), для определения напора $H^{(1)}(\rho, \theta)$ получим

$$H^{(1)}(\rho\theta) = H_0 + B[k_0(1 + \alpha\rho\cos\theta)]^{-1/2}\left\{\ln R + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \rho^m \cos m\theta + \right.$$

$$+ \frac{\alpha}{8(1+\alpha\rho\cos\theta)}\Big(R\ln R\cos(\theta - \theta_0) - R(\theta - \theta_0)\sin(\theta - \theta_0) +$$

$$\left. + R\cos(\theta - \theta_0) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \rho^{m+1}\frac{\cos(m+1)\theta}{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \rho_0^{m+1}\frac{\cos(m+1)\theta_0}{m+1}\Big)\right\},$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0)} \tag{3.13}$$

где постоянные коэффициенты b_m определяются, как и в примере 1, из граничного условия на контуре $\rho = 1$.

Таблица 2

ρ	θ							
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
0.2	149.01	148.74	148.92	149.24	149.32	149.37	149.38	149.30
0.4	148.94	147.92	148.91	149.54	149.51	149.43	149.54	149.61
0.6	149.21	146.31	149.10	150.00	149.56	149.40	149.62	149.84
0.8	149.71	138.56	149.64	150.72	149.44	149.32	149.60	150.48

В табл. 2 приведены результаты вычислений напора $H(\rho, \theta)$, полученные с учетом шести первых коэффициентов a_m по следующим исходным данным [3]:

$$k_0 = 0.6,\ \alpha = 0{,}5;\ \mu = 2.5\ \text{спз},\ h = 8\ \text{м},\ H_0 = 150\ \text{атм},\ Q = 5200\ \text{см}^3/\text{сек},$$
$$\rho_0 = 0.81;\ \theta_0 = 44^\circ.$$

Сопоставление полученных результатов с ранее известными [2, 3] показывает, что они практически совпадают, при этом следует отметить, что расчетные формулы, полученные на основе данного метода, значительно проще и более удобны при расчетах.

Поступила 9 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частотными производными. М., «Мир», 1964.
2. Голубев Г. В. К задаче об определении поля давлений в неоднородной пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
3. Голубев Г. В. Об одном методе определения поля давлений в неоднородной пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949.
5. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., Гостехиздат, 1948.