

УДК 532.529.2

КОНВЕКЦИЯ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЭЛЕЯ ПРИ ПОЧТИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. И. ЧЕРНАТЫНСКИЙ, М. И. ШЛИОМИС

(Пермь)

Равновесие неравномерно нагретой жидкости в поле тяжести возможно только при вертикальном постоянном градиенте температуры в жидкости. Если жидкость подогревается снизу, равновесие ее устойчиво пока число Рэлея R (безразмерный градиент температуры) не превышает некоторого критического значения R_0 . При $R > R_0$ равновесие сменяется режимом стационарной конвекции, интенсивность которой вблизи R_0 пропорциональна $(R - R_0)^{1/2}$.

Эти хорошо известные результаты теории конвекции существенно изменяются при наличии уже сколь угодно малой боковой составляющей градиента температуры. Поскольку при боковом подогреве равновесие жидкости вообще невозможно, то конвективное движение в этом случае существует как выше, так и ниже точки R_0 . В связи с этим исчезает качественное различие между состоянием движения жидкости по обе стороны от R_0 и интенсивность конвекции меняется непрерывно с изменением R . Чем слабее, однако, боковой подогрев, тем быстрее меняются в окрестности R_0 конвективная скорость и температура.

Существует аналогия между конвективной неустойчивостью и фазовым переходом второго рода, на что указывалось, в частности, в работе [1]. В этой связи интересно отметить, что влияние слабого бокового подогрева на конвекцию жидкости вблизи R_0 подобно влиянию внешнего магнитного поля на поведение ферромагнетика вблизи точки Кюри [2]. В присутствии магнитного поля тело обладает магнитным моментом как ниже, так и выше температуры Кюри. Говорить о фазовом превращении в этом случае, очевидно, не имеет смысла: свойства ферромагнетика меняются с температурой непрерывно. Любопытно, что и количественные закономерности в обоих указанных задачах оказываются одинаковыми.

В п. 1 кратко излагаются основные результаты теории конвекции, полученные в работах [3-6] и относящиеся к случаю, когда жидкость в поле тяжести подогревается строго снизу. Эти результаты и техника, с помощью которой они могут быть получены, используются затем в п. 2 для исследования стационарной конвекции при почти вертикальном градиенте температуры. Там же найденные стационарные решения исследуются на устойчивость.

Показано, что в окрестности R_0 это движение устойчиво, а интенсивность его изменяется непрерывно, хотя и обнаруживает вблизи R_0 аномальное поведение. Кроме этой, основной, ветви решения справа от R_0 появляются еще две ветви (бифуркация), из которых одна неустойчива, а другая метастабильна. Эти выводы, полученные в общем виде для замкнутой полости произвольной формы, иллюстрируются результатами численного эксперимента по конвекции в горизонтальном круглом цилиндре (плоская задача).

1. Стационарные состояния и их устойчивость при подогреве снизу. Пусть жидкость заполняет замкнутую полость, все линейные размеры которой одного порядка. В поле тяжести $g = -kg$ жидкость подогревается так, что, пока она в равновесии, градиент температуры в ней равен $\nabla\theta_0 = -Ak$. Любое нестационарное малое возмущение равновесия жидкости, характеризующееся скоростью v , температурой T и давлением p , может быть разложено по нормальным возмущениям, зависящим от времени как $\exp(-\lambda_n t)$. Координатные части нормальных возмущений удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -\lambda_n v_n &= \Delta v_n + DkT_n - \nabla p_n \\ -\lambda_n pT_n &= \Delta T_n + Dkv_n, \quad \operatorname{div} v_n = 0 \\ (P &= v/\chi, R \equiv D^2 = g\beta\Delta t^2/\nu\chi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

и граничным условиям на внутренней поверхности полости S

$$\mathbf{v}_n|_S = T_n|_S = 0 \tag{1.2}$$

Все величины в (1.1) безразмерные. В качестве единиц выбраны: характерный размер полости l , время l^2/ν , скорость ν/l , температура $\nu l^{-1}(A\nu/g\beta\chi)^{1/2}$; P — число Прандтля и R — число Рэлея. Собственные функции самосопряженной краевой задачи (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям ортонормировки [7]

$$\int \{\mathbf{v}_m \mathbf{v}_n + P T_m T_n\} dV = \delta_{mn} \tag{1.3}$$

а все собственные значения — декременты λ_n — положительны (т. е. равновесие жидкости устойчиво), пока число Рэлея R остается меньше некоторого критического R_0 [3]. При приближении R к R_0 снизу декремент λ_0 стремится к нулю по закону [1]

$$\lambda_0 = \frac{R - R_0}{R_0} \int (\text{rot } \mathbf{v}_0)^2 dV \tag{1.4}$$

Неустойчивость равновесия при $R > R_0$ по отношению к возмущению с $n = 0$ приводит к установлению стационарной конвекции, описываемой уравнениями

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + D\mathbf{k}\theta - \nabla p \tag{1.5}$$

$$P\mathbf{u}\nabla\theta = \Delta\theta + D\mathbf{k}u, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0$$

При малом превышении R над R_0 уравнения (1.5) можно решить методом квазилинейных разложений [4, 5], аналогичным методу Ван-дер-Поля. С помощью полной системы собственных функций краевой задачи (1.1), (1.2) можно построить ряды

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \\ p \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ T_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n \\ T_n \\ p_n \end{pmatrix} + \dots \tag{1.6}$$

$$R = R_0 + \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \dots \tag{1.7}$$

Расчет приводит к следующим результатам:

$$R^{(1)} = 0, \quad R^{(2)} = R_0 \Lambda^2 / \int (\text{rot } \mathbf{v}_0)^2 dV, \quad a_n = H_{0n} \lambda_n^{-1} \tag{1.8}$$

$$\Lambda^2 = \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n}^2 \lambda_n^{-1}, \quad H_{0n} = -H_{n0} = \int \{\mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_n + P T_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) T_n\} dV$$

$$\left(\varepsilon^2 = \frac{R - R_0}{R^{(2)}} = \frac{R - R_0}{R_0 \Lambda^2} \int (\text{rot } \mathbf{v}_0)^2 dV \right)$$

т. е. движение, возникающее после потери равновесием устойчивости, имеет вблизи R_0 структуру критического возмущения \mathbf{v}_0 с амплитудой ε .

Исследование устойчивости найденного стационарного движения проведено в работе [6]. Решение этого вопроса сводится к вычислению собственных чисел λ краевой задачи

$$\begin{aligned} -\lambda \mathbf{v} + [(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}] &= \Delta\mathbf{v} + D\mathbf{k}T - \nabla p \\ -\lambda PT + P[\mathbf{v}\nabla\theta + \mathbf{u}\nabla T] &= \Delta T + D\mathbf{k}v \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v}|_S = T|_S = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Полагая здесь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ T \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ T_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} c_n \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n \\ T_n \\ p_n \end{pmatrix} + \dots \quad (1.10)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots$$

находим, используя (1.6)

$$\begin{aligned} c_n &= 2a_n, \quad \lambda^{(1)} = 0, \quad \lambda^{(2)} = 3\Lambda^2 \\ \lambda &= \lambda_0 + 3\varepsilon^2 \Lambda^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставляя в эту формулу λ_0 из (1.4) и ε^2 из (1.8), получим окончательно [6]

$$\lambda = 2 \frac{R - R_0}{R_0} \int (\text{rot } \mathbf{v}_0)^2 dV \quad (1.12)$$

Как видно из (1.12), стационарное решение (1.6) уравнений (1.5), существующее при $R > R_0$, устойчиво в этой области чисел Рэлея по крайней мере вблизи R_0 .

2. Конвекция при почти вертикальном градиенте температуры. Предположим, что на стенках полости поддерживается такое распределение температуры, которому в жидкости соответствовал бы в режиме теплопроводности постоянный градиент температуры

$$\nabla \theta_0 = -A(\mathbf{k} \cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)$$

где α — малый угол. Уравнения стационарной конвекции

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} &= \Delta\mathbf{u} + D\mathbf{k}\theta - \nabla p + G\mathbf{k}x \quad (G = g\beta A l^4 \alpha \nu^{-2}) \\ P\mathbf{u}\nabla\theta &= \Delta\theta + D\mathbf{u}(\mathbf{k} + PGR^{-1}\mathbf{i}), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

(G — число Грасгофа, связанное с боковым подогревом, x — горизонтальная, вдоль \mathbf{i} , координата) не допускают в этом случае решения с $\mathbf{u} = 0$, т. е. при любом отличном от нуля G существует конвекция. Уравнение, связывающее амплитуду ε конвективного движения с G , запишем в виде

$$G = \varepsilon G^{(1)} + \varepsilon^2 G^{(2)} + \varepsilon^3 G^{(3)} + \dots \quad (2.2)$$

Уравнение, получающееся из (2.2) при $G = 0$, и уравнение (17)

$$\varepsilon^2 G^{(3)} + \varepsilon G^{(2)} + G^{(1)} = 0 \quad (2.3)$$

должны совпадать (с точностью до постоянного множителя), поскольку в отсутствие бокового подогрева вертикальный градиент температуры остается единственной причиной конвекции. Учитывая это, из (2.3) и (1.7) имеем

$$\varepsilon^2 G^{(3)} + G^{(1)} = K[\varepsilon^2 R^{(2)} + (R_0 - R)], \quad G^{(2)} = 0 \quad (2.4)$$

Для определения константы K подставим в (2.1) разложение (2.2) и положим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \\ p \end{pmatrix} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ T_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n \\ T_n \\ p_n \end{pmatrix} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (2.5)$$

Собирая члены с первой степенью ε и принимая во внимание, что $\{v_n, T_n, p_n\}$ удовлетворяют уравнениям (1.1), получим

$$\lambda_0 v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n v_n = G^{(1)} kx \quad (2.6)$$

$$\lambda_0 p T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n p T_n = 0 \quad (2.7)$$

Умножим первое из этих уравнений на v_m , второе — на T_m и сложим их. Интегрируя получающуюся сумму по всему объему жидкости и учитывая условия ортонормировки (1.3), имеем

$$\lambda_0 = G^{(1)} \int x(kv_0) dV \quad (m=0)$$

$$b_m \lambda_m = G^{(1)} \int x(kv_m) dV \quad (m \neq 0) \quad (2.8)$$

$$b_m = (\lambda_0 / \lambda_m) \int x(kv_m) dV \left(\int x(kv_0) dV \right)^{-1} \quad (2.9)$$

Согласно (1.4) при $R \rightarrow R_0$ декремент критического возмущения $\lambda_0 \rightarrow 0$, в то время как декременты остальных возмущений остаются конечными. Поэтому, как видно из (2.9), вблизи R_0 все коэффициенты $b_m \ll 1$, т. е. стационарное решение (2.5) при R , близких к R_0 , имеет структуру критического возмущения. Подставляя в (2.8) значение λ_0 из (1.4), находим

$$G^{(1)} = (1 - R/R_0) \int (\text{rot } v_0)^2 dV \left(\int x(kv_0) dV \right)^{-1} \quad (2.10)$$

Из сравнения (2.10) с выражением $G^{(1)} = K(R_0 - R)$ из (2.4) определим константу K

$$K = \int (\text{rot } v_0)^2 dV \left(R_0 \int x(kv_0) dV \right)^{-1} \quad (2.11)$$

Подставляя теперь найденные значения $G^{(1)}$ и

$$G^{(3)} = KR^{(2)} = \Lambda^2 / \int x(kv_0) dV \quad (2.12)$$

в (2.2), получаем для амплитуды стационарного конвективного движения кубическое уравнение

$$\varepsilon^3 - 3a(R - R_0)\varepsilon - 2bG = 0 \quad (2.13)$$

$$a = {}^{1/3}R_0^{-1}\Lambda^{-2} \int (\text{rot } v_0)^2 dV > 0, \quad b = {}^{1/2}\Lambda^{-2} \int x(kv_0) dV$$

Дискриминант уравнения (2.13) обращается в нуль при числе Рэлея

$$R_* = R_0 + a^{-1}(bG)^{2/3} \quad (2.14)$$

При $R < R_*$ уравнение (2.13) имеет лишь одно вещественное решение $\varepsilon_1(R)$, которое при $R = R_0$ равно

$$\varepsilon_1(R_0) \equiv \varepsilon_0 = (2bG)^{1/3} \quad (2.15)$$

Кривая $\varepsilon_1(R)$ имеет при $R = R_0$ точку перегиба

$$\left(\frac{d^2 \varepsilon}{dR^2} \right)_{R_0} = 0, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dR} \right)_{R_0} = \frac{a}{\varepsilon_0} = \frac{a}{(2bG)^{1/3}}$$

При $R > R_*$ уравнение (2.13) имеет три вещественных решения, два из которых в точке R_* совпадают

$$\varepsilon_{1*} = 2(bG)^{1/2}, \quad \varepsilon_{2,3*} = -(bG)^{1/2} \quad (2.16)$$

Для значений R , столь близких к R_* , что $|R - R_*| \ll R_* - R_0$ находим приближенно

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2\sqrt{a(R_* - R_0)} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{R - R_*}{R_* - R_0} \right\} \\ \varepsilon_{2,3} &= -\sqrt{a(R_* - R_0)} \pm \sqrt{a(R - R_*)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Решения уравнения (2.13) изображены качественно на фиг. 1. Пунктиром показано решение при $G = 0$. Заметим, что наряду с упомянутой выше задачей [2] характер ветвления, аналогичный (2.17), имеет место в теории малых прогибов пластин [8].

Для решения вопроса об устойчивости полученных ветвей ε_i ($i = 1, 2, 3$) достаточно определить для каждой из них знак λ_i по формуле (1.11), которая в обозначениях (2.13) имеет вид

$$\lambda_i = 3\Lambda^2 \{ a(R_0 - R) + \varepsilon_i^2 \} \quad (2.18)$$

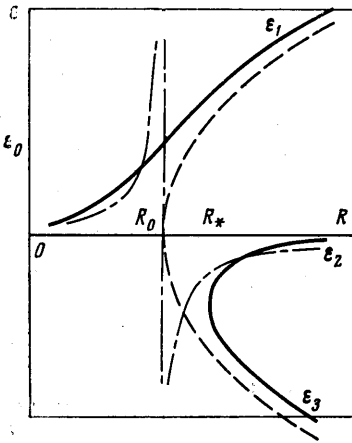
Устойчивому решению соответствует $\lambda > 0$. Подставляя в (2.18) значения ε_i из (2.17), получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 3 \frac{R_* - R_0}{R_0} \times \\ &\times \int (\text{rot } v_0)^2 dV \left\{ 1 + \frac{5}{9} \frac{R - R_*}{R_* - R_0} \right\} \\ \lambda_{2,3} &\approx \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\approx \mp 2 \frac{\sqrt{(R_* - R_0)(R - R_*)}}{R_0} \int (\text{rot } v_0)^2 dV$$

Таким образом, из двух новых ветвей, появляющихся при $R > R_*$, одна ε_2 неустойчива, а другая ε_3 «метастабильна», т. е. менее устойчива, чем основная ветвь ε_1 .

В начале п. 1 отмечалось, что в этой работе рассматриваются конвективные явления, происходящие в ограниченных объемах. Оговорка эта, конечно, весьма существенна: в открытых полостях результаты могут быть совершенно иными. Укажем здесь, в частности, как изменяются полученные выше результаты в случае бесконечного вертикального слоя или цилиндра. При постоянном вертикальном градиенте температуры первый кризис устойчивости равновесия наступает в этих полостях по отношению к плоскопараллельному движению, в котором $v_0 = kv_0$ и T_0 не зависят от вертикальной координаты. Вследствие этого критическое возмущение является одновременно и точным решением стационарных уравнений конвекции (1.5) при $R = R_0$: для $u = \varepsilon v_0$ и $\theta = \varepsilon T_0$ нелинейные члены в этих уравнениях исчезают тождественно, так что амплитуда ε может быть любой. Фактически она определяется лишь мощностью подогревателя. Сказанное означает, что в разложении (1.7) все $R^{(n)} = 0$. Следовательно, на основании (2.4) из коэффициентов $G^{(n)}$ только $G^{(1)}$ от-



Фиг. 1

личен от нуля, так что уравнение (2.13) превращается в

$$\varepsilon(R_0 - R)K = G \tag{2.20}$$

Определяемая этим уравнением зависимость $\varepsilon(R)$ представлена на фиг. 1 штрих-пунктирной линией; здесь вертикальная прямая $R_0 = R$ соответствует значению $G = 0$. Если же имеется боковой подогрев ($G \neq 0$), то при переходе числа Рэлея через критическое значение R_0 происходит инверсия профилей скорости и температуры — меняется знак ε . Именно такая инверсия имеет место, например, [9] в случае конвекции жидкости в вертикальном плоском канале.

Нетрудно заметить определенное сходство в расположении ветвей ε на фиг. 1. Сходство объясняется тем, что как в замкнутой полости, так и в вертикальной щели или цилиндре движение, вызываемое слабым боковым подогревом, имеет вблизи R_0 структуру критического возмущения. Этим-то в конечном счете и обусловлено anomальное поведение $\varepsilon(R)$ в окрестности R_0 .

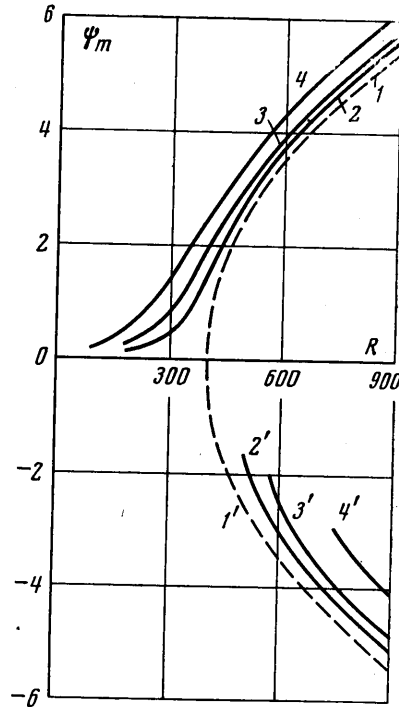
Иное дело, горизонтальный плоский слой жидкости, подогреваемый не строго снизу. Физически эта ситуация эквивалентна следующей: параллельные границы слоя наклонены под малым углом к плоскости горизонта и поддерживаются при постоянных (но разных) температурах. Пропорциональная углу наклона горизонтальная составляющая градиента температуры вызывает плоскопараллельное движение жидкости, в то время как критическое возмущение, срывающее устойчивость равновесия горизонтального слоя (задача Рэлея), имеет периодическую структуру с длиной волны, соизмеримой с толщиной слоя.

Следствием различия в симметрии указанных движений является то, что «основное» (плоскопараллельное) течение, вызываемое боковым подогревом, вообще не обнаруживает каких-либо аномалий в окрестности R_0 . Однако уже вблизи R_0 оно оказывается неустойчивым [10] по отношению к возмущениям, имеющим форму плоских валов (рулонов), ориентированных в направлении основного течения.

3. Результаты численного эксперимента. Для иллюстрации основных результатов п. 2 авторами был предпринят численный расчет (методом сеток) конвективного движения в бесконечном горизонтальном цилиндре круглого сечения. На границе области (на окружности) задавалось распределение температуры

$$\theta_0|_{r=r_0} = -\vartheta \sin(\varphi - \alpha)$$

где φ — полярный угол в плоскости сечения цилиндра, отсчитываемый от горизонтальной оси, α — угол, определяющий отклонение теплопроводного градиента температуры от вертикали.



Фиг. 2

Уравнения свободной конвекции для функции тока Ψ , температуры T и вихря скорости ζ записывались в полярных координатах. Стационарные режимы получались методом установления по явной трехслойной конечно-разностной схеме со вторым порядком аппроксимации. Во всех расчетах значение числа Прандтля было фиксированным ($P = 1$); значения числа Рэлея $R = g\beta\theta r_0^4 / \nu\chi$ изменялись в диапазоне $10^{-2} \div 5 \cdot 10^3$. Радиальный шаг сетки был равен 0,1, шаг по углу 15° . Расчет выполнен на ЭВМ М-220М в ВЦ Пермского университета. Результаты приведены на фиг. 2 в виде зависимости максимального значения функции тока Ψ_m , характеризующего интенсивность движения в полости от числа Рэлея R для значений $\alpha = 0, 1^\circ 24', 2^\circ 48', 5^\circ 36'$ (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно). Хорошо видно качественное соответствие с фиг. 1.

Выход на метастабильные движения (кривые 2', 3' и 4' на фиг. 2) осуществлялся следующим образом. При $\alpha = 0$ для некоторого значения числа Рэлея достигался стационарный режим, а затем углу α придавалось значение, которое приводило к сдвигу максимальной температуры на границе в сторону, противоположную направлению движения жидкости. Как видно из фиг. 2, подойти к вершине метастабильной ветви (точка R_*) не удается, очевидно, вследствие малой устойчивости этого решения вблизи R_* (см. (2.19)). Так, например, для $\alpha = 1^\circ 24'$ при $R < 500$ в процессе счета направление движения жидкости (знак Ψ) менялось на обратное, т. е. наблюдался переход с 2' на более устойчивую ветвь 2.

Авторы благодарят за дискуссию Г. З. Гершуни, обратившего внимание на рассмотренные здесь вопросы.

Поступила 30 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В. М., Шлиомис М. И. Гидродинамические флуктуации вблизи порога конвекции. ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 11.
2. Зайцев В. М. О поведении ферромагнетика в магнитном поле вблизи точки Кюри. Физика металлов и металловедение, 1959, т. 7, вып. 2.
3. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
4. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
5. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
7. Сорокин В. С., Сушкин И. В. Устойчивость равновесия подогреваемой снизу проводящей жидкости в магнитном поле. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2.
8. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
9. Бирих Г. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Устойчивость стационарного конвективного движения жидкости с продольным градиентом температуры. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
10. Бирих Г. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.