

УДК 532.525.2

КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЭНТАЛЬПИИ В ТРЕХМЕРНОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Н. М. БЕЛЯНИН

(Москва)

Автомодельные решения уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя представляют интерес с двух точек зрения. Во-первых, они могут быть использованы для создания приближенных методов расчета, позволяющих проводить анализ различных вариантов и рассматривать сложные течения, в которых нельзя пренебрегать взаимодействием между пограничным слоем и внешним потоком (например, в области гиперзвукового взаимодействия [1-3]). Во-вторых, анализ автомодельных решений позволяет выяснить влияние отдельных параметров на ту или иную характеристику пограничного слоя и представить это влияние в обозримом виде.

Одной из основных характеристик трехмерного пограничного слоя, как и двумерного, является коэффициент восстановления энтальпии. Величина этого коэффициента необходима для определения температуры теплоизолированной поверхности, так и для нахождения действительного температурного (или энтальпийного) напора, определяющего величину теплового потока от нагретого газа к поверхности обтекаемого тела. В работе приведены результаты расчетов коэффициента восстановления энтальпии для локально-автомодельных решений уравнений трехмерного пограничного слоя, образующегося при обтекании цилиндрической теплоизолированной поверхности под углом скаса. Выяснено, что зависимость коэффициента восстановления от определяющих параметров не всегда является непрерывной.

1. Рассмотрим обтекание под углом скаса бесконечного цилиндра потоком газа. Расстояние x отсчитывается от критической линии вдоль поверхности цилиндра в плоскости, перпендикулярной образующей, расстояние y — от поверхности цилиндра по нормали, а расстояние z — вдоль образующей цилиндра. Введем обычные обозначения: u, v, w — соответствующие скорости, p, ρ, h — давление, плотность и энтальпия, P — число Прандтля, μ — коэффициент вязкости. Индексом 1 обозначены параметры вне пограничного слоя, звездочкой — параметры заторможенного потока.

Уравнения трехмерного пограничного слоя, образующегося на поверхности этого тела, могут быть преобразованы к переменным Лиза — Дордоницына [2, 4]

$$\xi = \int_0^x \rho_1 u_1 \mu_1 dx, \quad \eta = u_1 / \sqrt{2\xi} \int_0^y \rho dy$$

Введем параметры

$$\beta_0 = \frac{2\xi}{u_1} \frac{du_1}{d\xi}, \quad U = \frac{u_1^2}{2h_1}$$

характеризующие градиент давления и скорость во внешнем потоке. Если свойства газа ρ, μ, P зависят лишь от энтальпии, а β_0 и U остаются постоянными, то локально-автомодельные решения могут быть найдены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(Nf'')' + ff'' + \beta_0[\rho_1/\rho - (f')^2] = 0 \quad (1.1)$$

$$(N\phi')' + f\phi' = 0 \quad (1.2)$$

$$(NP^{-1}g')' + fg' + 2[NP^{-1}(P-1)(Uff'' + W\varphi\varphi')] = 0 \quad (1.3)$$

$$f(\eta) = \int_0^\eta u/u_1 d\eta, \quad \varphi(\eta) = w/w_1, \quad g(\eta) = h^*/h_1^*$$

$$N = \rho\mu / \rho_1\mu_1, \quad W = w_1^2 / 2h_1^*$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по η .

Граничные условия при обтекании теплоизолированной поверхности имеют вид

$$f(0) = f'(0) = \varphi(0) = g'(0) = 0, \quad f'(\infty) = \varphi(\infty) = g(\infty) = 1 \quad (1.4)$$

Температура стенки в этом случае является определяемой величиной, причем коэффициент восстановления энтальпии r определяется соотношением

$$r = 1 - [1 - g(0)] / (U + W)$$

и зависит от β_0 , U , W и вида функций $N(h)$, $\rho(h)$, $P(h)$.

2. Для несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости и постоянным числом Прандтля зависимость величины r от определяющих параметров U и W может быть найдена в аналитическом виде. При $N = 1$, $\rho_1 / \rho = 1$ уравнения движения (1.1) и (1.2) могут быть решены независимо от уравнения энергии (1.3), причем уравнение (1.1) — известное уравнение Фолкнера и Скэн для двумерного пограничного слоя несжимаемой жидкости, а уравнение (1.2) совпадает с уравнением энергии в двумерном пограничном слое несжимаемой жидкости при $P = 1$ [5]. Функции $f(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ при этом зависят лишь от одного параметра β_0 . После двукратного интегрирования уравнения энергии (1.3) с учетом граничных условий (1.4) получим

$$r = [UI_1(P, \beta_0) + WI_2(P, \beta_0)] / (U + W) \quad (2.1)$$

$$I_i(P, \beta_0) = P \left[1 + 2(1 - P) \int_0^\infty [E(\eta)]^{-1} \int_0^\eta F_i(\eta_1) E(\eta_1) d\eta_1 d\eta \right] \quad (2.2)$$

$$\left(i = 1, 2, \quad E(\eta) = \exp \left(P \int_0^\eta f d\eta \right) \right)$$

$$F_1(\eta) = ff''', \quad F_2(\eta) = f\varphi\varphi' \quad (2.3)$$

Тогда из соотношения (2.1) следует, что при $w_1 = 0$ (двумерный пограничный слой) для всех значений u_1 (в том числе и для $u_1 = 0$)

$$r = I_1(P, \beta_0)$$

а при $u_1 = 0$ (пограничный слой на критической линии) для всех значений w_1 (в том числе и для $w_1 = 0$)

$$r = I_2(P, \beta_0)$$

Если $u_1 \rightarrow 0$, $w_1 \rightarrow 0$ так, что их отношение остается постоянным ($w_1 = au_1$), то

$$r = [I_1(P, \beta_0) + a^2 I_2(P, \beta_0)] / (1 + a^2)$$

Так как в общем случае $I_1 \neq I_2$, то коэффициент восстановления не является непрерывной функцией параметров U и W при $U \rightarrow 0$, $W \rightarrow 0$. На фиг. 1 приведены значения I_1 (сплошная линия) и I_2 (пунктирная линия), вычисленные для различных β_0 при $P = 1.25$ (кривые 1), 0.7 (кривые 2) и 0.5 (кривые 3).

3. Так как численное интегрирование уравнения (1.1) при больших β_0 связано с определенными трудностями, то целесообразно рассмотреть предельный случай $\beta_0 \rightarrow \infty$. Как известно [6], при больших β_0 приближенное решение уравнения движения (1.1) имеет вид

$$f'(\eta_1) = 3\text{th}^2(\sqrt{\beta_0/2}\eta + \text{arth}\sqrt{2/3}) - 2$$

и можно найти асимптотические выражения для функций $f(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ так же, как при конечных β_0 [7]. Тогда из соотношений (2.3) получим

$$F_1(\eta) \approx 2.4\sqrt{\beta_0/2}\eta \exp(-2\sqrt{\beta_0/2}\eta)$$

$$F_2(\eta) \approx \sqrt{2/\pi}\eta \exp(-\eta^2/2)\Phi(\eta)$$

где $\Phi(\eta)$ — интеграл вероятности.

Подставляя асимптотическое значение $F_1(\eta)$ в соотношение (2.2), получим

$$I_1(P, \infty) = P + 4.8(1 - P) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_3(\alpha), \quad \alpha = 2\sqrt{\beta_0/P}$$

$$I_3(\alpha) = \alpha \int_0^\infty \exp(-t^2) \int_0^t t_1 \exp(t_1^2 - \alpha t_1) dt_1 dt$$

Проведем сначала оценки внутреннего интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^{t/2} t_1 \exp(t_1^2 - \alpha t_1) dt_1 + \int_{t/2}^t t_1 \exp(t_1^2 - \alpha t_1) dt_1 \leq \\ & \leq \exp(t^2/4) \int_0^{t/2} t_1 \exp(-\alpha t_1) dt_1 + \exp(t^2 - \alpha t/2) \int_{t/2}^t t_1 dt_1 \leq \\ & \leq \alpha^{-2} \exp(t^2/4) + 0.375t^2 \exp(t^2 - \alpha t/2) \end{aligned}$$

Тогда

$$I_3(\alpha) \leq \sqrt{\pi/3} \alpha^{-1} + 6\alpha^{-2}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_3(\alpha) = 0, \quad I_1(P, \infty) = P$$

Подставляя асимптотическое значение $F_2(\eta)$ в выражение (2.3) и выполняя интегрирование по частям во внутреннем интеграле, получим

$$I_2(P, \infty) = P - 2P\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \Phi(\eta) \exp(-\eta^2/2) d\eta + 4I_4/\pi = 4I_4/\pi,$$

$$I_4 = P \int_0^\infty \exp(-P\eta^2/2) \int_0^\eta \exp[(P-2)t^2/2] dt d\eta$$

Этот несобственный интеграл сходится, так как при $P > 2$

$$I_4 \leq P \int_0^\infty \eta \exp(-P\eta^2/2) \exp[(P-2)\eta^2/2] d\eta = P/2$$

а при $P \leq 2$

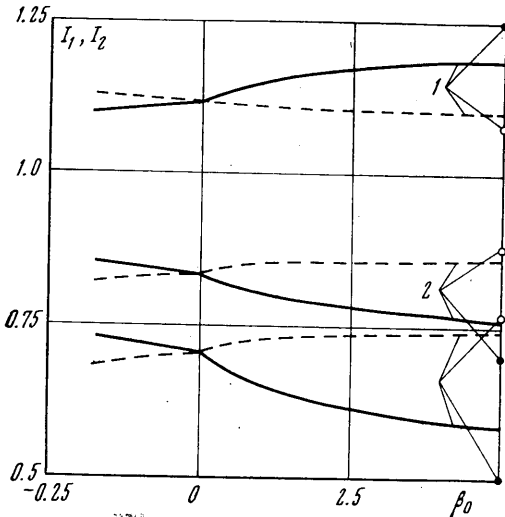
$$I_4 \leq P \int_0^\infty \eta \exp(-P\eta^2/2) d\eta = 1$$

Используя разложение показательной функции в степенной ряд и выполняя интегрирование, получим

$$I_2(P, \infty) = 4\pi^{-1} \sqrt{P / (2 - P)} \arctg \sqrt{(2 - P) / P}$$

Значения $I_1(P, \infty)$ и $I_2(P, \infty)$ при $P = 0.5, 0.7, 1.25$ также показаны на фиг. 1 темными и светлыми кружками соответственно.

4. В общем случае для определения коэффициента восстановления энthalпии необходимо решать систему уравнений (1.1) — (1.3) с граничными

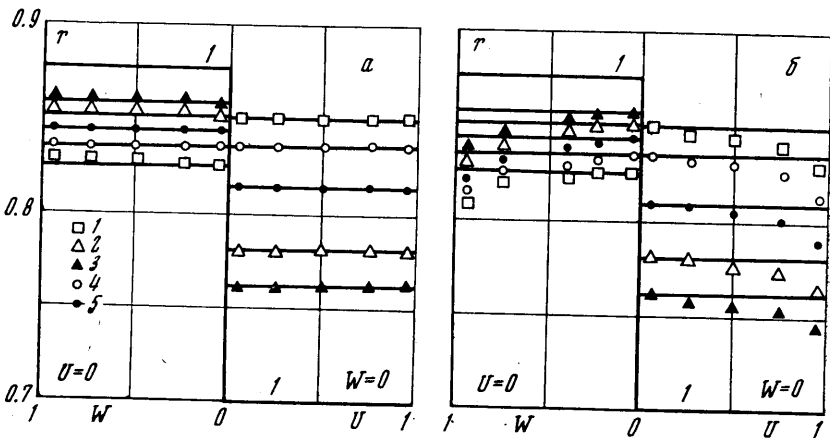


Фиг. 1

условиями (1.4). Такие решения для совершенного газа со степенной зависимостью коэффициента вязкости от энthalпии ($\mu \sim h^\omega$) и постоянным числом Прандтля получены методом пристрелки по трем параметрам.

Сравнение результатов численных расчетов с данными для несжимаемой жидкости при $P = 0.7$ и различных значениях $\beta = \beta_0 \rho_1 / \rho_1^*$ для двух предельных случаев ($W = 0$ — двумерный пограничный слой и $U = 0$ — пограничный слой при течении во внешнем потоке вдоль изобары) приведено на фиг. 2, а ($\omega = 1$) и б ($\omega = 0.5$). Сплошной линией обозначены данные для несжимаемой

жидкости, 1 — предельные значения при $\beta = \infty$, квадраты, светлые и темные кружки, светлые и темные треугольники — результаты расчетов для сжимаемого газа при $\beta = -0.16, 0, 0.5, 2, 5$ соответственно. Здесь ρ_1 — плот-



Фиг. 2

ность внешнего потока, ρ_1^* — плотность при энthalпии заторможенного потока и статическом давлении внешнего потока. Для несжимаемой жидкости $\beta = \beta_0$, а для совершенного газа $\beta = \beta_0 / (1 - U - W)$. Если в качестве параметра, характеризующего градиент давления, использовать величину

β , то зависимости коэффициента восстановления от определяющих параметров β, P, U, W для совершенного газа и несжимаемой жидкости практически совпадают при $\omega = 1$ (фиг. 2, а) и мало отличаются при $\omega = 0.5$ (фиг. 2, б) в обоих предельных случаях. При этом сохраняется указанная особенность зависимости величины γ от параметров U и W при $U \rightarrow 0, W \rightarrow 0$.

Поступила 16 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстин Р. Р. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Дьюи К. Ф. Использование представлений о местном подобии в задачах гиперзвукового вязкого взаимодействия. Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 1.
3. Галкин В. С., Жбакова А. В., Николаев В. С. Аэродинамические характеристики пластины под углом атаки в вязком гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
4. Cohen N. B. Boundary-layer similar solutions and correlation equations for laminar heat — transfer distribution in equilibrium air at velocities up to 41 000 feet per second. NASA, 1961, TR R-118.
5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
6. Авдеевский В. С., Копятевич Р. М. Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии теплообмена и произвольном распределении давления вдоль поверхности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
7. Cohen C. B., Reshotko E. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NASA, 1956, Rept 1293.