№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

УДК 532.517

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЖИДКИХ СТРУЙ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, В. Я. ШКАДОВ

(*Москва*)

Впервые задача об устойчивости капиллярной жидкой струи была решена Рэлеем [1], который рассмотрел устойчивость неподвижного столба невязкой жидкости по отношению к возмущениям различного рода и показал, что на поверхности жидкости быстрее развиваются осесимметричные волны с длиной волны, равной примерно девяти радиусам жидкого столба. Задача о неосесимметричных волнах на поверхности цилиндрического столба жидкости наиболее детально рассмотрена в работе Бора [2]. В работе Г. И. Петрова и Т. Д. Калининой рассмотрено влияние окружающей среды на устойчивость жидкой капиллярной струи. Обзор более поздних работ дан в [4]. В последнее время опубликовано несколько работ [5–8], посвященных теоретическому исследованию некоторых нелинейных эффектов, относящихся к неустойчивости осесимметричных струй.

В данной работе рассмотрено поведение неосесимметричных струй. Интерес к исследованию некруглых струй объясняется, в частности, тем, что струи, вытекающие из неосесимметричных отверстий, могут распадаться значительно раньше, чем осесимметричные струи [9, 10].

Решена нелинейная задача о пространственном стационарном течении неосесимметричной капиллярной струи. Получены характерные формы изменения струи. Показано, что наибольшее влияние нелинейности наблюдается в том месте поверхности, которое наименее удалено от оси струи. Приведены значения амплитуд, с которых может начинаться разрушение (нарушение сплошности) некоторых неосесимметричных струй.

Поставлена и решена задача об устойчивости капиллярной жидкой струи, вытекающей из неосесимметричного отверстия. Показано, что наличие неосесимметричности приводит к более быстрому распаду струи. Это вызывается в основном увеличением коэффициента нарастания возмущений и увеличением эффективной амплитуды возмущений в отдельных местах на поверхности струи из-за наличия неосесимметричности.

Приведены некоторые экспериментальные результаты по изучению распада струй, вытекающих из неосесимметричных отверстий. Подтверждено наличие двух механизмов воздействия неосесимметричности струи на неустойчивость и распад.

1. Рассмотрим развитие течения в струе, вытекающей из отверстия некругового сечения. Предположим, что действием силы тяжести и вязкостью можно пренебречь. В цилиндрической системе координат z, r, θ уравнения движения имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
u_t + uu_z + vu_r + r^{-1}wu_\theta = -p_z \\
v_t + uv_z + vv_r + r^{-1}wv_\theta - w^2r^{-1} = -p_r \\
w_t + uw_z + vw_r + r^{-1}ww_\theta + wv/r = -r^{-1}p_\theta
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь u, v, w — проекции скорости на оси z, r, θ. На поверхности струи примем условие непротекания и условие отсутствия касательных напряжений. Тогда, учитывая поверхностное натяжение, получим на поверхности струи при

$$r = h(z, \theta, t) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{1.2}$$

$$h_t + uh_z + r^{-1}wh_\theta = v \tag{1.3}$$

$$p - p_* = \sigma\varkappa \tag{1.4}$$

$$\varkappa=\left[1+\left(\frac{h_\theta}{h}\right)^2+h_z^2\right]^{-3/2}\left\{\frac{1}{h}\left(1+2\left(\frac{h_\theta}{h}\right)^2+h_z^2\right)-\frac{1+h_z^2}{h^2}h_{\theta\theta}-\right.$$

$$\left.-\left(1+\left(\frac{h_\theta}{h}\right)^2\right)h_{zz}+2\frac{h_\theta h_z h_{\theta z}}{h^2}\right\},\qquad \sigma=\frac{T}{\rho U_0^2 R_0} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1)—(1.5) записаны в безразмерной форме. В качестве масштабов длины и скорости выбраны характерный размер выходного сечения R_0 и характерная скорость вытекания U_0. Параметр σ — число Вебера, T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность.

Во многих случаях число σ мало. Например, если струя воды вытекает из отверстия диаметром $R_0=4$ *мм* под напором $H=2$ *м* при температуре 15° С, то $\sigma=0.0075$. При этом скорость истечения равна $U_0=630$ *см·сек*$^{-1}$. В экспериментах Бора [2] скорость истечения 440 *см·сек*$^{-1}$ при среднем диаметре отверстия $R_0=1.35$ *мм*, что дает $\sigma=0.0045$. Будем предполагать в дальнейшем, что $\sigma\ll 1$.

Рассмотрим прежде всего случай, когда отклонения формы струи от осесимметричной являются малыми. Если течение в выходном отверстии равномерное, т. е. $u=1$, $v=0$, $w=0$, то можно рассмотреть малые возмущения цилиндрического столба идеальной жидкости. Записывая

$$u=1+\varepsilon u_1,\qquad v=\varepsilon v_1,\qquad w=\varepsilon w_1,\qquad p=p_0+\varepsilon p_1$$

и отбрасывая в уравнениях (1.1)—(1.4) члены с квадратами ε, получим для возмущений линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами. Частное решение этой системы, удовлетворяющее условиям на поверхности (1.3), (1.4), имеет вид

$$u=-\frac{ik}{\omega+ik}p,\qquad v=-\frac{1}{\omega+ik}p',\qquad w=-\frac{i\beta}{\omega+ik}\frac{1}{r}p$$

$$p=I_\beta(kr)\exp\{\omega t+ikz+i\beta\theta\} \tag{1.6}$$

Здесь $I_\beta(kr)$ суть функция Бесселя, а величины ω, k, β связаны соотношением

$$(\omega+ik)^2=\sigma(1-\beta^2-k^2)\frac{kI_\beta'(k)}{I_\beta(k)} \tag{1.7}$$

Для неосесимметричных возмущений $\beta=2, 3, \ldots,$ и из (1.7) получаем

$$\omega_r=0,\qquad (\omega_i+k)^2=\sigma\beta(\beta^2-1)$$

Если положить $\omega_i=0$, то получим стационарное возмущение с пространственно-периодическими волнами, имеющими постоянную амплитуду. Длины этих волн имеют порядок $\sigma^{-1/2}$ и могут в несколько десятков раз превышать средний диаметр струи. В системе координат, перемещающейся со средней скоростью жидкости, это возмущение будет периодическим по времени. В случае струи эллиптического сечения $\beta=2$, поэтому для безразмерной частоты колебаний получаем

$$q^2=\frac{(\omega_i+k)^2}{\sigma}=6$$

Если ввести обозначение $\varepsilon^2=\sigma$, то, как следует из формулы (1.6), в линейном приближении имеем оценки безразмерных величин

$$u^*=1+\varepsilon^2 u,\quad v^*=\varepsilon v,\quad w^*=\varepsilon w,\quad p^*=\varepsilon^2 p,\quad z^*=\varepsilon^{-1}z. \tag{1.8}$$

Примем эти оценки и в нелинейном приближении. Рассмотрим стационарное течение, развивающееся в струе, вытекающей с постоянной скоростью из отверстия. При этом течение можно считать безвихревым. Система уравнений (1.1)—(1.4) с учетом оценок (1.8) для безвихревого течения приводится к виду

$$r(ru_r)_r = u_{\theta\theta} = 0, \quad v_z = u_r, \quad w_z = r^{-1}u_\theta \tag{1.9}$$

$$r = h(z, \theta), \qquad h_z = v - r^{-1}wh_\theta$$

$$p - p_0 = \left[1 + \left(\frac{h_\theta}{h}\right)^2\right]^{-3/2} \left[\frac{1}{h}\left(1 + 2\left(\frac{h_\theta}{h}\right)^2\right) - \frac{h_{\theta\theta}}{h^2}\right]$$

Для системы (1.9) поставим задачу с начальными условиями при $z = 0$. Пусть в этом сечении заданы периодические по θ функции v, w, $u(r, \theta)$ и $h(\theta)$, причем возмущение $u(r, \theta)$ удовлетворяет первому уравнению (1.9). Тогда система (1.9) позволяет рассчитать форму струи и распределение скоростей в каждом последующем сечении z. Применим метод работы [8].

Периодическое по θ решение системы (1.9) будем искать в виде

$$u = u_0 + u_1e^{i\beta\theta} + u_1^*e^{-i\beta\theta} + u_2e^{2i\beta\theta} + u_2^*e^{-2i\beta\theta} + \ldots \tag{1.10}$$

Аналогичные выражения примем для v, w, h. Здесь u_k, v_k, w_k — комплексные функции z и r, h_k — только z, а величины со звездочкой — комплексно-сопряженные.

Разложение (1.10) можно записать в виде

$$h = h_0(z) + 2(h_{10}\cos\beta\theta - h_{11}\sin\beta\theta) +$$
$$+ 2(h_{20}\cos 2\beta\theta - h_{21}\sin 2\beta\theta) + \ldots \tag{1.11}$$

учитывая, что

$$h_1 = h_{10} + ih_{11}, \qquad u_1 = u_{10} + iu_{11}$$

Как легко видеть, решения уравнений (1.9) для скоростей v, w имеют вид

$$u_0 = u_0(z), \qquad u_k = A_k(z)r^{k\beta}, \qquad v_0 = 0$$

$$v_k = B_k(z)r^{k\beta-1}, \qquad w = 0, \qquad w_k = C_k(z)r^{k\beta-1}$$

Коэффициенты A_k, B_k, C_k связаны между собой уравнениями

$$B_k' = k\beta A_k, \qquad C_k' = ik\beta A_k \tag{1.12}$$

Функции $A_k(z)$ и $h_k(z)$ должны быть определены из двух нелинейных уравнений (1.9), выполняющихся на поверхности струи.

Подставим (1.10) в эти уравнения и проведем разложения по степеням $\exp[i\beta\theta]$. Отбрасывая члены, содержащие степени, начиная с третьей, и приравнивая нулю выражения при оставшихся степенях экспоненты, получим системы уравнений для h_kA_k. Из уравнения непротекания получаем

$$\frac{dh_0}{dz} = V_0 - i\frac{\beta}{h_0}(w_1^*h_1 - w_1h_1^*)$$

$$\frac{dh_1}{dz} = V_1 - i\frac{\beta}{h_0}\left(w_0h_1 + 2w_1^*h_2 - \frac{1}{h_0}h_1^2w_1^* - h_1^*w_2\right)$$

$$\frac{dh_2}{dz} = V_2 - i\frac{\beta}{h_0}w_1h_1 \tag{1.13}$$

$$V_0 = (\beta - 1)h_0^{\beta-2}(B_1h_1^* + B_1^*h_1)$$

$$V_1 = h_0^{\beta-3}\left[\frac{(\beta-1)(\beta-2)}{2}(h_1^2B_1^* + 2h_1h_1^*B_1) + (\beta-1)h_0h_2B_2^* + \right.$$

$$\left. + (2\beta-1)h_0^\beta B_2h_1^* + h_0^2B_1\right] \qquad (1.14)$$

$$V_2 = h_0^{\beta-2}\ [h_0^\beta B_2 + (\beta-1)h_1B_1]$$

Величины w_k определяются из подобных соотношений с заменой B_k на C_k. Из интеграла Бернулли находим выражение для давления

$$p = p_0 - u - {}^1/_2(u^2 + w^2)$$

Отсюда получаем

$$h_0^{\beta-2}[h_0^2 - \beta(\beta+1)h_1h_1^*]A_1 + \beta h_0^{\beta-2}[h_0h_2 + {}^1/_2(\beta-1)h_1^2)A_1^* =$$

$$= (\beta^2-1)h_0^{-2}h_1 + E_1h_2h_1^* + E_2h_1^2h_1^* - h_0^{2\beta-3}\ [2(\beta-1)(B_1B_1^* + C_1C_1^*)h_1 +$$

$$+ h_0^{\beta+1}(\beta+1)(B_2B_1^* + C_2C_1^*) - (B_1^2 + C_1^2)h_1^*] \qquad (1.15)$$

$$A_2 = -\beta h_0^{-\beta-1}A_1h_1 - h_0^{-2\beta}\left[\frac{4\beta^2-1}{h_0^2}h_2 + \frac{2-5\beta^2}{2h_0^3}h_1^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(B_1^2 + C_1^2)h_0^{2(\beta-1)}\right]$$

$$E_1 = (8\beta^3 - 2\beta + 8\beta^2 - 2)h_0^{-3}, \quad E_2 = {}^1/_2(4\beta - 10\beta^3 - 15\beta^2 + 3\beta^4 + 6)h_0^{-4}$$

Система дифференциальных уравнений (1.12), (1.13) вместе с алгебраическими соотношениями (1.14), (1.15) решалась численно от точки $z = 0$. В начальном сечении $z = 0$ задавались значения всех вычисляемых функций h_k, B_k, C_k. Эти значения определяют начальное возмущение.

Наиболее просто представить возмущение, которое создается изменением формы выходного отверстия для равномерно вытекающего потока. Простейший случай, когда $h_{10}(0) \neq 0$ при $z = 0$ и все $h_{ik} = 0$, $B_{ik} = 0$, $C_{ik} = 0$. Расчеты с такими начальными данными были проведены при разных значениях $h_{10}(0)$, β. На фиг. 1 показана форма струи в сечениях, перпендикулярных оси, на разных расстояниях от выходного отверстия $z = 0$ (*1*), 3.9 (*2*), 7.8 (*3*) при $\beta = 2$ и $h_{10}(0) = 0.25$.

На фиг. 2 форма струи дана на расстояниях $z = 0$ (*1*), 7.8 (*2*), 19.5 (*3*) при $\beta = 3$, $h_{10}(0) = 0.25$. Изменение поверхности струи в сечении плоскостью $\theta = 0$, проходящей через ось симметрии, в зависимости от расстояния от выходного отверстия дается при $h_{10} = 0.25$ на фиг. 3 ($\beta = 2$) и на фиг. 4 ($\beta = 3$). Можно видеть, что в струе развиваются пространственно-периодические волны.

Длина этих волн слабо меняется по z и близка к значению, определяемому формулой линейной теории (1.4). В целом влияние нелинейных членов проявляется мало на расстояниях порядка шести длин волн. Как видно на фиг. 1, 2, наиболее заметно нелинейность проявляется в точках поверхности, наименее удаленных от оси.

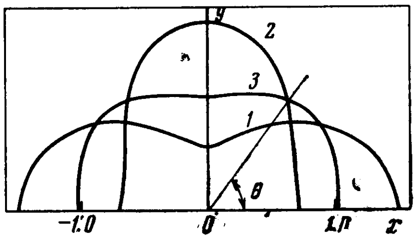
Расчеты показывают, что такой характер течения сохраняется при значениях $h_{10} \approx 0{,}3$. Изменение характера начальных условий при $z = 0$ вызывает количественные изменения в решении, не меняя общей картины. С ростом β отклонение решения от линейного становится более заметным. Например, при $\beta = 4$ значение $h_{10}(0) = 0.135$ приводит к быстрому разрушению струи, что проявляется в переполнении при счете с таким начальным возмущением.

2. Исследуем устойчивость неосесимметричной жидкой капиллярной струи. Если рассматриваемое течение потенциально, то задача сводится к решению уравнения Лапласа

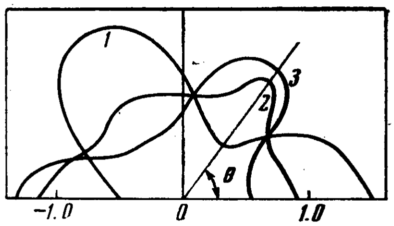
$$\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + r^{-2}\Phi_{\theta\theta} + \Phi_{zz} = 0$$
$$0 \leqslant r \leqslant 1 + \xi(\theta, z, t) = h, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad (-\infty < z < \infty) \tag{2.1}$$

Здесь $\Phi(r, z, \theta, t)$ — потенциал скорости.

Задачу рассмотрим в системе координат, перемещающейся со средней скоростью жидкости, а в качестве масштаба скорости для безразмерных пе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ременных t и θ выберем $V^* = T^{1/2}(\rho a)^{1/2}$. Тогда граничные условия (1.3) и (1.4) при $r = 1 + \xi$ принимают вид

$$\Phi_r = \Phi_z\xi_z + r^{-2}\Phi_\theta\xi_\theta - \xi_t \tag{2.2}$$

$$-\Phi_t - {}^1/_2[\Phi_r^2 + \Phi_z^2 + r^{-2}\Phi_\theta^2] + \varkappa - 1 = 0 \tag{2.3}$$

В новых переменных линейное частное решение (1.6) примет вид

$$p = T_\beta(kr)\exp(qt + ikz + i\beta\theta) \qquad (q = (\omega + ik)\sigma^{-1/2})$$

Это решение является периодическим по t и медленно меняется по z, так как $k \sim \sigma^{1/2}$. Поэтому основное состояние, устойчивость которого исследуется, можно рассматривать как бесконечный цилиндрический столб покоящейся жидкости, на который наложены колебания по времени. Используем для основного состояния приближенное аналитическое решение, полученное в работе [2]

$$\xi^{(0)} = 1 + (-{}^1/_8 b^2 - {}^1/_8 b^2\cos 2qt) + b\cos 2\theta\cos qt +$$
$$+ ({}^1/_6 b^2\cos 2qt + {}^1/_4 b^2)\cos 4\theta \equiv A\xi_1^{(0)} + A^2\xi_2^{(0)} \tag{2.4}$$

$$\Phi^{(0)} = Ar^2\sin qt\cos 2\theta - {}^5/_{12}A^2q^{-1}r^4\sin 2qt\cos 4\theta \equiv A\Phi_1^{(0)} + A^2\Phi_2^{(0)} \tag{2.5}$$

$$b = 2A/q, \qquad q^2 = 6$$

Пусть

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)}, \qquad \xi = \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)}, \qquad \varepsilon \ll A^2$$

Подставив Φ и ξ в исходные уравнения и линеаризируя их относительно параметра ε, получим уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений

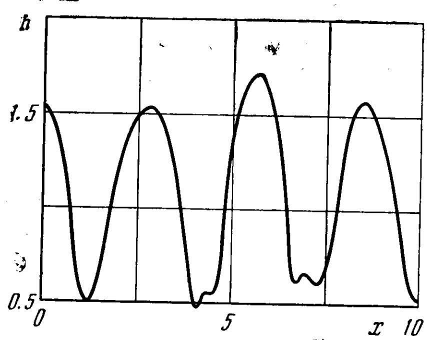
при $r = 1 + \xi^{(0)}$

$$\Phi_{rr}^{(0)}\xi^{(1)} + \Phi_r^{(1)} = r^{-2}\{[\Phi_{\theta r}^{(0)}\xi^{(1)} + \Phi_\theta^{(1)}]\xi_\theta^{(0)} +$$
$$+ \Phi_\theta^{(0)}\xi_\theta^{(1)}\} - \Phi_\theta^{(0)}\xi_\theta^{(0)}2\xi^{(1)} - \xi_t^{(1)}$$

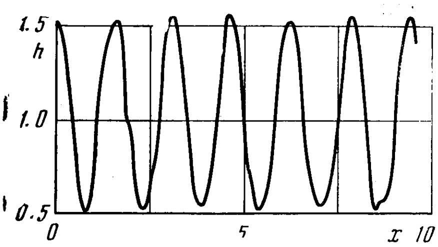
$$-\Phi_t^{(1)} - \Phi_{tr}^{(0)}\xi^{(1)} + \Phi_r^{(0)}\Phi_r^{(1)} + r^{-2}\Phi_\theta^{(0)}\Phi_\theta^{(1)} +$$
$$+\Phi_r^{(0)}\Phi_{rr}^{(0)}\xi^{(1)} + \Phi_\theta^{(0)}\Phi_{\theta r}^{(0)}\xi^{(1)} - \Phi_\theta^{(0)2}\xi^{(1)} + (\varkappa - 1) = 0 \qquad (2.6)$$

$$(\varkappa - 1) = -\frac{\xi^{(1)}}{(1+\xi^{(0)})^2}[1 + 2\xi_\theta^{(0)2}] + \frac{4\xi_\theta^{(0)}\xi_\theta^{(1)}}{(1+\xi^{(0)})^3} - 4\xi^{(0)2}\xi^{(1)} +$$
$$+\frac{2\xi^{(1)}\xi_{\theta\theta}^{(0)}}{(1+\xi)^3} - \frac{\xi_{\theta\theta}^{(1)}}{(1+\xi^{(0)})^2} - \xi_{zz}^{(1)} - \xi_{zz}^{(1)}\xi_\theta^{(0)2} + \frac{3}{2}\frac{\xi^{(0)2}}{1+\xi^{(0)}}(\xi^{(1)} + \xi_{zz}^{(1)}) - \qquad (2.7)$$
$$-\frac{3\xi_\theta^{(0)}\xi_\theta^{(1)}}{(1+\xi^{(0)})^2}\left\{\frac{1}{1+\xi^{(0)}} - \xi_{\theta\theta}^{(0)}\right\} + 3\xi_\theta^{(0)2}\xi^{(1)}$$

Здесь часть членов порядка εA^3 отброшена, волновое число α порядка единицы, оно соответствует волнам, длина которых сравнима с диаметром струи.



Фиг. 3



Фиг. 4

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями, имеющими периодические коэффициенты [11], решение для $\varphi^{(1)}$ и $\xi^{(1)}$ будем искать в виде

$$\Phi^{(1)} = e^{i\alpha z}\varphi^{(1)}(r, \theta, t), \qquad \xi^{(1)} = e^{i\alpha z}\eta^{(1)}(\theta, t)$$
$$\varphi^{(1)} = e^{i\omega t}\varphi(r, \theta, t), \qquad \eta^{(1)} = e^{i\omega t}\eta(\theta, t) \qquad (2.8)$$

где $\varphi(r, \theta, t)$ и $\eta(\theta, t)$ — периодически по θ и t функции с теми же периодами, что и основное состояние. Нетрудно видеть, что теперь получаем задачу на собственные значения для системы уравнений в частных производных.

Представим решение этой задачи в виде

$$\varphi = \varphi_0 + A\varphi_1 + A^2\varphi_2 + \ldots$$
$$\eta = \eta_0 + A\eta_1 + A^2\eta_2 + \ldots$$
$$\omega = \omega_0 + A\omega_1 + A^2\omega_2 + \ldots$$

Все функции φ удовлетворяют уравнению (2.1). Подставив данные выражения в граничные условия и собирая члены при A^k, получим рекуррентную систему уравнений, определяющих последовательные приближения φ_0, η_0, φ_1, η_1.

В нулевом приближении уравнения при $r=1$ имеют вид

$$L_1(\varphi_0, \eta_0) \equiv \varphi_{0,r} + \eta_{0,t} + i\omega_0\eta_0 = 0 \tag{2.9}$$

$$L_2(\varphi_0; \eta_0) \equiv -\varphi_{0,t} - i\omega_0\varphi_0 - \eta_0 - \eta_{0,\theta\theta} + \alpha^2\eta^0 = 0$$

Пусть $\varphi_{0,\theta} = 0$ и $\eta_{0,\theta}$, тогда

$$\varphi_0 = A_0 I_0(i\alpha r) = A_0 I_0(\alpha r), \qquad \eta_0 = \text{const}$$

$$\omega_0^2 = \frac{i\alpha I_0'(i\alpha)}{I_0(i\alpha)}(\alpha^2 - 1)$$

т. е. в нулевом приближении получаем известное решение Рэлея.

В первом приближении при $r=1$ получаем

$$L_1(\varphi_1; \eta_1) = -\Phi_{rr}^{(0)}\eta_0 - \varphi_{0,rr}\xi^{(0)} - i\omega_1\eta_0$$

$$L_2(\varphi_1; \eta_1) = \Phi_{tr}^{(0)}\eta^{(1)} + i\omega_1\varphi_0 + (i\omega_0\varphi_{0,r} + \varphi_{0,tr})\xi^{(0)} - $$
$$- \Phi_r^{(0)}\varphi_{0,r} - 2\xi^{(0)}\eta_0 - \xi_{\theta\theta}^{(0)}2\eta_0$$

Подставив известные значения $\Phi^{(0)}$, $\xi^{(0)}$, φ_0 и η_0, найдем

$$L_1(\varphi_1; \eta_1) = -A2\sin qt\cos 2\theta\eta_0 -$$
$$-\alpha^2 I_0''(\alpha)A_0 b\cos 2\theta\cos qt - i\omega_1\eta_0 \equiv$$
$$\equiv \gamma_s\sin qt\cos 2\theta + \gamma_1\cos qt\cos 2\theta - i\omega_1\eta_0$$

$$L_2(\varphi_1; \eta_1) = 2Aq\cos qt\cos 2\theta\eta_0^{(1)} + i\omega_1\varphi_0 +$$
$$+ Ai\omega_0\alpha I_0'(\alpha)b\cos 2\theta\cos qt - A_2\sin qt\cos 2\theta A_0\alpha I_0'(\alpha) -$$
$$-2b\cos qt\cos 2\theta\eta_0 + 4b\cos qt\cos 2\theta 2\eta_0 \equiv$$
$$\equiv \gamma_2\cos qt\cos 2\theta + \gamma_4\sin qt\cos 2\theta + i\omega_1\varphi_0$$

Нетрудно показать, что решение данной задачи имеет вид

$$\varphi_1 = I_2(\alpha r)\cos 2\theta[\varkappa_{12}\cos qt + \varkappa_{12}\sin qt], \qquad \omega_1 = 0$$
$$\eta_1 = \cos 2\theta[\varkappa_{21}\cos qt + \varkappa_{22}\sin qt]$$

Таким образом, в первом приближении задача сводится к нахождению постоянных $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{21}$, $\varkappa_{22}$

$$\alpha I_2'(\alpha)\varkappa_{11} + i\omega_0\varkappa_{21} + q\varkappa_{22} = \gamma_1$$
$$-[i\omega_0\varkappa_{11} + q\varkappa_{12}]I_2(\alpha) + 3\varkappa_{21} + \alpha^2\varkappa_{21} = \gamma_2$$
$$\alpha I_2'(\alpha)\varkappa_{12} + i\omega_0\varkappa_{22} - q\varkappa_{21} = \gamma_3$$
$$-[i\omega_0\varkappa_{12} - q\varkappa_{11}]I_2(\alpha) + 3\varkappa_{22} + \alpha^2\varkappa_{22} = \gamma_4$$

Объединяя члены вида εA^2, получим

$$L_1(\varphi_2, \eta_2) = -\varphi_{0,rr}\eta^{(0)} - \varphi_{0,rrr}{}^1/_2\eta^{(0)2} - \varphi_{1,rr}\eta^{(0)} -$$
$$-(\Phi_{rr}^{(0)} + \Phi_{rrr}^{(0)}\xi^{(0)})(\eta_0 + \eta_1) + \varphi_\theta^{(1)}\xi_\theta^{(0)} + \Phi_{\theta r}^{(0)}\xi_\theta^{(0)}\eta_0^{(1)} +$$
$$+ \Phi_\theta^{(0)}\xi_\theta^{(1)} - 2\xi_\theta^{(0)}\Phi_\theta^{(0)}\eta_0^{(1)} - i\omega_2\eta_0 + \varphi_{0,rr}b\cos gt\cos 2\theta$$

$$L_2(\varphi_2, \eta_2) = (\varphi_{0,t,r} + i\omega_0\varphi_{0r} + \varphi_{1,t,r} + i\omega_0\varphi_{1,r})\xi^{(0)} +$$

$$+ i\omega_0\varphi_{0,rr}{}^1/_2\xi^{(0)2} + \Phi_{rr}^{(0)}(\eta_0 + \eta_1) + \Phi_{trr}^{(0)}\xi^{(0)}\eta_0 - \Phi_r^{(0)}(\varphi_{0r} + \varphi_{1,r} +$$

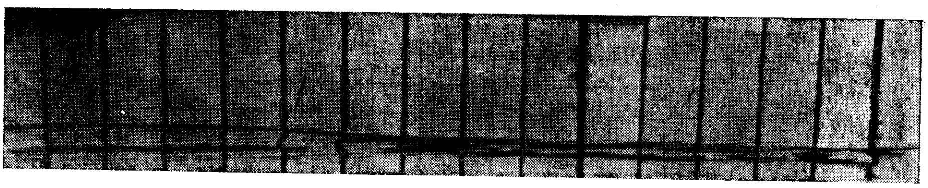
$$+ \varphi_{0,rr}\xi^{(0)}) - \Phi_{rr}^{(0)}\xi^{(0)}\varphi_{0,r} - \Phi_\theta^{(0)}\varphi_{1,\theta} - \Phi_r^{(0)}\Phi_{rr}^{(0)}\eta_0^{(1)} - \Phi_\theta^{(0)}\Phi_{\theta r}^{(0)}\eta_0^{(1)} +$$

$$+\Phi_\theta^{(0)2}\eta_0+i\omega_2\varphi_0-\Big\{-(\eta_0^{(1)}+\eta_1^{(1)})[-2\xi^{(0)}+3\xi^{(0)2}]-\eta_0^{(1)}2\xi_\theta^{(0)2}+$$

$$+4\xi_\theta^{(0)}\eta_{1,\theta}^{(1)}-4\xi_\theta^{(0)2}\eta_0+2\frac{\xi_{\theta\theta}^{(0)}(\eta_0+\eta_1)}{(1+\xi^{(0)})^3}-\frac{\eta_{1,\theta\theta}}{(1+\xi^{(0)})^2}+\alpha^2(\eta_0+\eta_1)+$$

$$+\alpha^2\eta_0\xi_\theta^{(0)2}+\frac{3}{2}\frac{\xi_\theta^{(0)2}}{1+\xi^{(0)}}(\eta_0-\alpha^2\eta_0)-3\xi_0^{(0)}\eta_{1,\theta}+3\xi_\theta^{(0)2}\xi^{(1)}\Big\}.$$

Здесь с целью сокращения записи включено несколько лишних членов вида εA^3.



Фиг. 5

Правые неоднородные части выписанной системы уравнений, определяющей φ_2 и η_2, имеют вид

$$\varkappa_1^{(i)}\cos 2\theta+\varkappa_2^{(i)}\cos 2qt+\varkappa_3^{(i)}\cos 2\theta\cos 2qt+\varkappa_4^{(i)}\qquad (i=1,\,2)$$

Здесь $\varkappa_1^{(i)}$, $\varkappa_2^{(i)}$, $\varkappa_3^{(i)}$, $\varkappa_4^{(i)}$ — постоянные.

Решение системы уравнений при $\varkappa_4^{(i)}=0$ может быть легко выписано. При решении системы возникнут особенности, если $\varkappa_4^{(i)}\neq 0$. Действительно, если

$$\partial\varphi_2/\partial\theta=0,\qquad \partial\varphi_2/\partial t=0$$

то

$$\varphi_2=\varphi_2(0)I_0(\alpha r),\qquad \varphi_2(0)=\mathrm{const}$$

Нетрудно видеть, что при этом левые части уравнений, определяющих φ_2 и η_2, оказываются пропорциональными, т. е. система уравнений может быть решена не при любых $\varkappa_4^{(1)}$ и $\varkappa_4^{(2)}$. Необходимо, чтобы правые части $\varkappa_4^{(1)}$ и $\varkappa_4^{(2)}$ были точно также пропорциональны, как и левые

$$\frac{\varkappa_4^{(1)}}{\varkappa_4^{(2)}}=\frac{i\omega}{1-\alpha^2}$$

Напомним, что в выражение для $\varkappa_4^{(1)}$ и $\varkappa_4^{(2)}$ входит заранее неизвестная величина ω_2, которая теперь может быть определена из полученного соотношения.

Несложные, но весьма громоздкие вычисления показывают, что $i\omega_2\cong 2.6$ при $\alpha=0.7$. Значение волнового числа $\alpha=0.7$ соответствует наибольшему значению $i\omega_0=0.34$. Таким образом, наличие неосесимметричности жидких струй приводит к заметному усилению роста возмущений. Например,

$$A^2 i\omega_2\cong 0.65\qquad \text{при } A={}^1/_2,\quad \alpha=0.7$$

Для сравнения отметим, что $i\omega_0\cong 0{,}34$.

Кроме данного механизма усиления возмущений, как уже отмечалось выше, существенную роль в распаде струи играет механизм неравномерного усиления возмущений. Из-за наличия неосесимметричности к основной симметричной волне добавляется некоторое несимметричное возмущение, которое заметно усиливает основное возмущение в отдельных местах на поверхности струи. Например, при $\alpha=0.7$ уравнение поверхности струи имеет вид

$$r = 1 + \varepsilon\xi_0 + \varepsilon A\xi_1 + \ldots, \qquad \xi_0 = \cos \alpha z e^{i\omega_0 t}$$

$$\xi_1 = \cos \alpha z e^{i\omega_0 t} \cos 2\theta [5.5 \cos qt + 6.7 \sin qt]$$

т. е. к основному симметричному возмущению присоединяется несимметричная часть порядка $\sim 10A$. Особенно заметно выделяется этот механизм усиления при малых амплитудах, когда вклад $A_i^2\omega_2$ мал.

3. В экспериментальной части данной работы главное внимание было уделено влиянию неосесимметричной формы выходного отверстия на распад струи.

Струя вытекала горизонтально из бака через отверстие в пластине или через трубочку, которые с помощью специального устройства можно было легко заменять. Это позволяло в широких пределах менять форму выходного отверстия.

Фиг. 6

Были исследованы эллиптические отверстия со средним размером порядка 2.5 *мм*, а также отверстия треугольной и квадратной форм. Сторона равностороннего треугольника 3 *мм*, а сторона квадрата 2 *мм*. Уровень воды в баке во всех экспериментах поддерживался одинаковым. Скорость жидкости на выходе соответствовала давлению столба жидкости высотой 2 *м*. Температура воды 8° С.

Вытекающая из неосесимметричного отверстия жидкая струя на начальном участке довольно устойчива. В струе развивается стационарное пространственно-периодическое течение (фиг. 5), расчет течений такого типа проведен в п. 1.

Обычно длина волны λ превышала в несколько десятков раз средний размер. Согласно линейной теории имеем

$$\lambda = \tau_1 R_0 (\sigma\beta(\beta^2 - 1))^{-1/2}$$

Для струи на фиг. 5 (эллипс размером 3×2.7 *мм*^{2}) расчетные и экспериментальные значения составляют соответственно $\lambda = 10.9$ и 10 *см*.

Дробление капли начинается на расстоянии L от выходного отверстия, зависящего от условий вытекания.

Во всех рассмотренных случаях, за исключением струй с очень большой эллиптичностью, основным механизмом дробления было образование симметричных относительно оси неустойчивых волн с длиной порядка нескольких значений характерного размера сечения струи, постепенное нарастание амплитуды этих волн по мере удаления от выходного отверстия и последующее образование капель. Эти явления хорошо видны на фиг. 6.

С увеличением степени эллиптичности в местах наибольшего расширения может происходить разделение основной струи на две. Чем больше эллиптичность, тем раньше происходит дробление ее на капли (длина L сплошного участка уменьшается). Например, $L \cong 30$ и 20 *см* для эллипсов $3 \cdot 2.7$, $4 \cdot 2.5$ *мм*^{2}. Начало распада струи фиксировалось с помощью стробоскопа. Еще быстрее дробление происходит в струях квадратного и треугольного сечения. Эти результаты подтверждаются теорией в п. 1, 2.

Если струя вытекает из трубки, то распад на капли начинается очень быстро. Течение в струе при этом, по-видимому, турбулентное. Наряду с основным механизмом дробления (образование симметричных волн) может наблюдаться также и другой механизм, связанный с образованием несимметричных волн.

Авторы благодарят Г. И. Петрова за внимание к работе.

Поступила 10 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Р е л е й. Теория звука, т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
2. B o h r N. Determination of the surface tension of water by method of jet vibration. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1909, vol. 209, p. 281.
3. П е т р о в Г. И., К а л и н и н а Т. Д. Применение метода малых колебаний к исследованию распада струи топлива в воздухе. Технические заметки МАП, 1947, вып. 4.

4. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., «Машиностроение», 1967.
5. Man-Chuen Yuen., Non-linear sapillary instability of a liquid jet. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, No. 1, pp. 151—163.
6. Wang D. P. Finite amplitude effect on the stability of a jet of circular cross section. J. Fluid Mech., 1968, vol. 34, No. 2, pp. 299—313.
7. Ali Hasan Naufeh. Non-linear stability of a liquid jet. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 4, p. 841.
8. Шкадов В. Я., Маркова М. М. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
9. Дитякин Ю. Ф. Об устойчивости и распаде на капли жидкой струи эллиптического сечения. Изд. АН СССР, ОТН, 1954, т. 10, стр. 124—130.
10. Иванов В. А. О дроблении жидкой струи. ПМТФ, 1966, № 8, стр. 30—37.
11. Малкин Г. И. Теория устойчивости движения, Изд. 2. М., «Наука», 1966.