УДК 532.58

СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ДЕФОРМИРУЕМЫЙ КОНТУР, ДВИЖУЩИЙСЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Л. А. БАРМИНА

(*Москва*)

Дано решение плоской нестационарной задачи о движении произвольного деформируемого контура в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Задача решалась методом конформного отображения. Для силы, действующей на контур малого размера, получена простая формула.

1. Постановка задачи. Пусть в плоскости z имеется потенциальный неустановившийся поток идеальной несжимаемой жидкости с известным комплексным потенциалом

$$W_0(z,t)=\sum_{l=0}^{m} a_l(t)z^l \tag{1.1}$$

Предположим, что в этом потоке движется деформируемый контур C, движение которого задается поступательной скоростью $q(t)$ и угловой скоростью $\omega(t)$ сопутствующей контуру системы координат (x_1, y_1), циркуляцией Γ, а также законом изменения границы профиля. Требуется найти комплексный потенциал

$$W(z, t)=\varphi(z, t)+i\psi(z, t)$$

получившегося возмущенного течения жидкости и определить гидродинамические силы, действующие на контур. Граничные условия для W

$$(\partial\varphi/\partial n)_C=q_n+[\omega\cdot\mathbf{r}]_n+v_n$$

$$\lim_{z\to\infty} W(z,t)=W_0(z,t)$$

Индексом n обозначены проекции соответствующих векторов на нормаль в точках границы контура, v_n — нормальная скорость границы контура в подвижной системе координат (x_1, y_1). Представим $W(z, t)$ в виде суммы трех комплексных функций $W_i(z, t)$ $(i=1, 2, 3)$, каждая из которых удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$(\partial\varphi_1/\partial n)_C=q_n+[\omega\cdot\mathbf{r}]_n,\ \lim_{z\to\infty} W_1(z,t)=0,\ \Gamma_1=\Gamma$$

$$(\partial\varphi_2/\partial n)_C=0,\quad \lim_{z\to\infty} W_2(z,t)=W_0(z,t),\quad \Gamma_2=0$$

$$(\partial\varphi_3/\partial n)_C=v_n,\qquad \lim_{z\to\infty} W_3(z,t)=0,\qquad \Gamma_3=0$$

где Γ — циркуляция скорости по контуру. Таким образом задача сведется к нахождению трех комплексных потенциалов: $W_1(z, t)$, соответствующего движению твердого контура в жидкости, покоящейся на бесконечности; $W_2(z, t)$, соответствующего обтеканию заданным потоком неподвижного твердого контура; и $W_3(z, t)$, соответствующего течению около деформируемого контура, внесенного в покоящуюся жидкость.

2. Комплексные потенциалы W_1 и W_2. Пусть функция

$$z_1 = f(\zeta,\ t) = k_{-1}(t)\zeta^{-1} + k_0(t) + k_1(t)\zeta + k_2(t)\zeta^2 + \ldots \tag{2.1}$$

реализует в каждый момент времени t конформное отображение области потока в плоскости z_1 на внутренность единичного круга K в плоскости ζ, так что точка $z = \infty$ соответствует точке $\zeta = 0$, и точке $\zeta = 1$ соответствует некоторая определенная точка контура C. При этом комплексный потенциал $W_1(z, t)$ преобразуется в $W_1(\zeta, t)$ [1]

$$W_1(\zeta, t) = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\zeta^j =$$

$$= -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta + \bar{q}f(\zeta) - \bar{q}k_{-1}\zeta^{-1} - q\bar{k}_{-1}\zeta + \omega g(\zeta) \tag{2.2}$$

$$g(\zeta) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_K f(\zeta')\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{\zeta' + \zeta}{(\zeta' - \zeta)\zeta'}d\zeta'$$

Здесь и в дальнейшем чертой обозначается сопряженная величина. Функция $g(\zeta)$ регулярна при $|\zeta| \leqslant 1$ и может быть представлена в этой области в виде

$$g(\zeta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(t)\zeta^l, \qquad g_l(t) = \frac{\partial^l g(0, t)}{l!\,\partial\zeta^l}$$

В частности

$$g_1(t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_K f(\zeta')\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\zeta'^{-2}d\zeta' \tag{2.3}$$

Найдем $W_2(z,\ t)$ указанным в [1] методом решения задачи об определении комплексного потенциала течения жидкости при наличии в заданных точках внутри потока заданных особенностей течения. Для этого сначала найдем выражение W_0 через $z_1 = x_1 + iy_1$. Пусть в начальный момент времени подвижная система координат $(x_1,\ y_1)$ совпадает с неподвижной. В момент времени t начало координат подвижной системы будет находиться в точке z_0 в плоскости z, так что

$$z = z_0 + z_1 e^{i\Phi}, \qquad \Phi = \int\limits_0 \omega dt$$

Из (1.1) следует, что в плоскости z_1 комплексный потенциал W_0 абсолютного невозмущенного течения жидкости будет иметь вид

$$W_0(z_1, t) = \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^m \tag{2.4}$$

где b_j — известные функции a_l, q, ω и t. Воспользовавшись разложением $W_0(z,\ t)$ в ряд около точки z_0, получим для b_j следующие выражения:

$$b_j = \left(\frac{\partial^j W_0(z, t)}{j!\,\partial z^j}\right)_{z=z_0} e^{-i\Phi} = \left(\frac{\partial^j W_0(z_1, t)}{j!\,\partial z_1^j}\right)_{z_1=0} = \frac{\partial^{j-1}\bar{u}_0(t)}{j!\,\partial z_1^{j-1}}$$

$$u_0 = u_{0x_1} + iu_{0y_1} \tag{2.5}$$

где u_0 — скорость невозмущенного потока в точке z_0. Представим теперь разыскиваемый комплексный потенциал $W_2(z_1, t)$ в виде

$$W_2(z_1,t)=b_m z_1{}^m+\ldots+b_1 z_1+\sum_{j=0}^{\infty} b_{-j} z_1{}^{-j} \tag{2.6}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — заданные из (2.5) функции времени, а b_{-j} — неизвестные функции времени. При конформном отображении (2.1) $W_2(z_1, t)$ преобразуются в $W_2(\zeta, t)$ [1]

$$W_2(\zeta,t)=\sum_{l=1}^{m}(d_l\zeta^{-l}+\bar d_l\zeta^l) \tag{2.7}$$

Нетрудно получить, сравнив (2.6) и (2.7) с учетом (2.1), что

$$d_l=\sum_{j=0}^{m-l} b_{m-j} D_{m-l-j}^{(m-j)} \tag{2.8}$$

$$D_0^{(s)}=k_{-1}{}^s,\qquad D_l^{(s)}=\frac{1}{l_{k-1}}\sum_{j=1}^{l}(js-l+j)k_{j-1}D_{l-j}^{(s)} \tag{2.9}$$

3. Комплексный потенциал W_3. Для нахождения $W_3(z, t)$ потребуется выражение нормальной скорости границы деформируемого контура через функцию конформного отображения (2.1). В силу взаимной однозначности этого отображения каждой точке окружности $\zeta=e^{i\theta}$ будет соответствовать в момент времени t точка контура C, и на контуре $z_1=z_1(\theta,t)$. Скорость точки границы контура

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\partial z_1}{\partial t}+\frac{\partial z_1}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

В проекциях на оси x_1 и y_1 получим

$$\left(\frac{dz_1}{dt}\right)_{x_1}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}+\overline{\frac{\partial z}{\partial t}}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}+\overline{\frac{\partial z}{\partial\theta}}\right)\frac{d\theta}{dt}\right] \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{dz_1}{dt}\right)_{y_1}=-\frac{i}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\overline{\frac{\partial z}{\partial t}}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}-\overline{\frac{\partial z}{\partial\theta}}\right)\frac{d\theta}{dt}\right]$$

Единичный вектор внешней нормали в момент времени t

$$n_0=n_{0x_1}+in_{0y_1}=-\frac{i}{2}\left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial\theta}-\overline{\frac{\partial z_1}{\partial\theta}}\right)+\left(\frac{\partial z_1}{\partial\theta}+\overline{\frac{\partial z_1}{\partial\theta}}\right)\right]\left|\frac{\partial z_1}{\partial\theta}\right|^{-1} \tag{3.2}$$

Проектируя вектор скорости движения точек границы (3.1) на нормаль (3.2), получим

$$v_n=\operatorname{Im}\left[\frac{\partial z_1}{\partial\theta}\overline{\frac{\partial z_1}{\partial t}}\right]\left|\frac{\partial z_1}{\partial\theta}\right|^{-1} \tag{3.3}$$

В плоскости ζ комплексный потенциал W_3 будет иметь вид [1]

$$W_3(\zeta,t)=-(Q/2\pi)\ln\zeta+h_1\zeta+h_2\zeta^2+\ldots \tag{3.4}$$

Чтобы найти выражения для коэффициентов этого ряда, вычислим

$$\psi_3=\int_0^s v_n ds=\int_0^\theta v_n\left|\frac{\partial z_1}{\partial\theta}\right|d\theta \tag{3.5}$$

Подставив в (3.5) выражение v_n из (3.3), z_1 из (2.1) и воспользовавшись тем, что на окружности $\zeta = e^{i\theta}$, получим с точностью до слагаемого, зависящего только от времени

$$\psi_3 = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \operatorname{Re} k_{s+n-1} \bar{k}_{n-1} + \sum_{n=s}^{\infty} (n-1) \operatorname{Re} k_{-s+n-1} k_{n-1} \right) \frac{\sin s\theta}{s} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \operatorname{Im} k_{s+n-1} \bar{k}_{n-1} + \sum_{n=s}^{\infty} (n-1) \operatorname{Im} k_{-s+n-1} \bar{k}_{n-1} \right) \frac{\cos\theta}{s} \right] +$$

$$+ \theta \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \operatorname{Re} \dot{k}_{n-1} \bar{k}_{n-1}$$

Точкой обозначена производная по времени. Из (3.4) и (3.5) получим

$$h_s = \frac{1}{s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \dot{k}_{s+n-1} \bar{k}_{n-1} + \sum_{n=s}^{\infty} (n-1) \dot{\bar{k}}_{-s+n-1} k_{n-1} \right. \tag{3.6}$$

$$Q = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) (\dot{k}_{n-1} \bar{k}_{n-1} + \dot{\bar{k}}_{n-1} k_{n-1}) \tag{3.7}$$

4. Сила, действующая на контур. Для силы, действующей на движущийся деформируемый контур, имеет место следующая формула [1]:

$$X + iY = i\rho q\Gamma + \overline{\frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{dW}{dz_1} \right)^2 dz_1} + \frac{d}{dt} \left[\rho \frac{dSz_1^*}{dt} + \rho S q + i\rho \int_C z_1 \frac{dW}{dz_1} dz_1 \right] \tag{4.1}$$

Подставив в (4.1) $W = W_1 + W_2 + W_3$ из (2.2), (2.7), (3.4) и вычислив интегралы, найдем выражение силы в общем случае. В виду громоздкости полученного выражения приведем его здесь лишь для $m = 2$, т. е. для случая, когда скорость невозмущенного потока — линейная функция координат

$$X + iY = i\rho q\Gamma + \frac{d}{dt} \rho \frac{dSz_1^*}{dt} + i\rho k_0 (\Gamma + iQ) \dot{\overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}}} + \frac{d}{dt} \rho i k_0 (\Gamma + iQ) +$$

$$+ 2\pi\rho \bar{k}_{-1} [\dot{\bar{k}}_1 (q - u_0) - k_{-1} \overline{(q - u_0)} + \overline{g_1 \omega}] \overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} +$$

$$+ \frac{d}{dt} \left\{ 2\pi\rho\, k_{-1} [k_1 \overline{(q - u_0)} - \bar{k}_{-1} (q - u_0) + g_1 \omega] + \rho S q \right\} - \rho u_0 Q +$$

$$+ 2\pi\rho \left(\overline{k_{-1} h_1} \overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} + \frac{\partial}{dt} k_{-1} h_1 \right) +$$

$$+ 2\pi\rho \left(\bar{k}_{-1} k_0 k_{-1} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1} \overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} + \frac{d}{dt} k_{-1} \bar{k}_0 \bar{k}_{-1} \overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} \right) -$$

$$- 2\pi\rho \left[\overline{k_{-1} (k_0 k_{\cdot} + k_{-1} k_2)} \overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} \overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} + \frac{d}{dt} k_{-1} (k_0 k_1 + k_{-1} k_2) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1} \right] \tag{4.2}$$

где g_1, h_1, и Q определяются из (2.3), (3.6) и (3.7) соответственно, S — площадь контура, z_1^* — координата центра тяжести в системе координат (x_1, y_1), Sz_1^* — статический момент площади $S(t)$. Преобразуем (4.2). Заметим, что если $\mathbf{A}$ — некоторый вектор с компонентами A_x и A_y, то имеют место следующие соотношения:

$$(A_x - iA_y)\overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z}} = A_x\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_y\frac{\partial u_0}{\partial y} = (\mathbf{A}\nabla u_0) \qquad (A_x + iA_y)\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z} = (\mathbf{A}\nabla \bar{u}_0).$$

Преобразуем (4.2) с учетом (4.3)

$$\overline{i\rho k_0(\Gamma + iQ)}\overline{\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z_1}} + \frac{d}{dt} i\rho k_0(\Gamma + iQ) =$$

$$= i\rho\Gamma[\dot{k}_0 + i\omega k_0 + (\mathrm{k}_0\nabla u_0)] - \rho Q(\mathbf{k}_0\nabla u_0) - \frac{d}{dt}\rho k_0 Q \tag{4.4}$$

Обозначим

$$I(t) = \rho S(u_0 - q) + 2\pi\rho k_{-1}[k_1(\overline{u_0 - q}) - \bar{k}_{-1}(u_0 - q)] -$$
$$-\omega(iS\rho z_1^* + 2\pi\rho k_{-1}g_1) \tag{4.5}$$

$$I_1(t) = \rho k_0 Q - 2\pi\rho k_{-1}h_1 + 2\pi\rho k_{-1}[k_1(\mathrm{k}_0\nabla\bar{u}_0) - k_{-1}(\bar{\mathrm{k}}_0\nabla u_0) + k_{-1}(\mathrm{k}_2\nabla\bar{u})]$$

Заметим, что I — вектор количества движения жидкости относительного движения. Из (4.2), (4.4) и (4.5) получим

$$X + iY = i\rho\Gamma[q - u_0 + \dot{k}_0 + i\omega k_0 + (\mathrm{k}_0\nabla n_0)] +$$
$$+ \rho S\frac{\tilde{d}u_0}{dt} - \frac{d(I + I_0)}{dt} - (\mathbf{I} + \mathbf{I}_1)\nabla u_0 + \rho\frac{\partial^2 Sz_1^*}{\partial t^2} - \tag{4.6}$$
$$- i\omega\rho\left[\frac{\partial Sz_1^*}{\partial t} + S(\mathbf{z}_1^*\cdot\nabla u_0)\right] \qquad \frac{\tilde{d}u_0}{\partial t} = \frac{\tilde{\partial}u_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0\nabla u_0) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p_0$$

Пренебрежем в (4.6) членами, пропорциональными кубу линейного размера, и напишем выражение для силы, действующей на контур малого размера при $z_1^* = 0$.

$$X + iY = i\rho\Gamma[q - u_0 + \dot{k}_0 + i\omega k_0 + (\mathbf{k}_0\nabla u_0)] -$$
$$- dI/dt - (\mathbf{I}\nabla u_0) - S\operatorname{grad} p_0 \tag{4.7}$$

К формуле (4.7) приводятся также полученные ранее выражения для силы, действующей на цилиндр [2] и сферу [3] малого размера [1]. Этот вид формулы для силы в общем случае малого тела при $\Gamma = 0$ был предложен Ю. Л. Якимовым.

Автор благодарит Л. И. Седова и Ю. Л. Якимова за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 25 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1965.
2. Якимов Ю. Л. Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
3. Якимов Ю. Л. Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 9.

[1] Следует заметить, что в работе [3] выписано правильное решение для потенциала и указан способ вычисления силы, однако коэффициенты в выражении силы содержат арифметическую ошибку, которая была обнаружена О. В. Воиновым и А. Г. Петровым.