УДК 532.516.5

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В. И. ЮДОВИЧ

(*Ростов-на-Дону*)

В работе [1] показано, что параллельное течение с произвольным непостоянным профилем скорости неустойчиво относительно пространственно-периодических возмущений с большой длиной волны вдоль течения. В данной статье доказывается, что эта неустойчивость приводит к возникновению сверхкритического автоколебательного режима типа простой волны.

Для расчета этого режима применяется метод Ляпунова — Шмидта в форме, данной в [2], в сочетании с асимптотикой длинных волн [1]. Если самыми опасными являются длинноволновые возмущения (что имеет место, например, для синусоидального профиля скорости), то построенный автоколебательный режим оказывается устойчивым относительно пространственно-периодических возмущений одинаковой с ним длины волны.

Будем рассматривать движения вязкой несжимаемой жидкости на плоскости $x'y$, предполагая вектор скорости периодическим по x' с периодом $2\pi / \alpha$ (α — волновое число), а по y — с периодом 2π. Зададим векторы массовых сил $\mathbf{F} = (-\gamma f(y))$, 0 и средней по прямоугольнику периодов скорости $q = q\gamma / \nu$, считая их пропорциональными некоторому параметру γ; ν — кинематический коэффициент вязкости. При этих условиях существует единственное стационарное параллельное течение с вектором скорости v_0 и давлением P_0

$$v_{0x} = \gamma\nu^{-1}U(y), \qquad v_{0y} = 0$$

Функции $U = U(y)$ и $P_0 = P_0(x)$ определяются условиями

$$U'' = f(y) - C, \qquad U(y + 2\pi) \equiv U(y)$$

$$\langle U\rangle = q, \quad P_0 = -\gamma Cx + \mathrm{const}, \quad C = \langle f\rangle$$

Здесь и далее $\langle g\rangle$ — среднее функции g на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$\langle g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy$$

Функцию тока Ψ возмущенного движения будем разыскивать в виде $\Psi = \psi_0 + \nu\psi'$, где ψ_0 — функция тока основного течения. Возмущение ψ' будем искать в виде

$$\psi' = \psi(x, y), \qquad x = x' - \nu ct$$

Тогда для определения функции ψ и фазовой скорости c получим нелинейную задачу на собственные значения

$$\Delta^2\psi = \psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y + \lambda[(U - c)\Delta\psi_x - U''\psi_x] \tag{1}$$

Функция ψ должна быть $2\pi / \alpha$-периодической по x и 2π-периодической по y; для определенности предположим еще, что ее среднее по прямоугольнику периодов равно нулю. Безразмерный параметр $\lambda = \gamma / \nu^2$ назовем числом Рейнольдса.

Пусть λ_* — критическое значение параметра λ. Введем параметр ε, полагая $\lambda = \lambda_* + \varepsilon^2$. Считаем ε малым. Решение задачи (4) ищем в виде рядов по степеням ε

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k, \qquad c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим для определения ψ_k, c_k цепочку уравнений вида

$$\Delta^2 \psi_k - \lambda_* [(U - c_0)\Delta\psi_{kx} - U''\psi_{kx}] = F_k \tag{3}$$

При этом имеем

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = \psi_{1y}\Delta\psi_{1x} - \psi_{1x}\Delta\psi_{1y} - c_1\Delta\psi_{1x} \tag{4}$$

При $k = 1$ уравнение (3) однородно и служит для определения критических параметров λ_*, c_0 и нейтрального колебания ψ_1. Последнее определяется с точностью до постоянного множителя — амплитуды β_1

$$\psi_1(x, y) = \beta_1 \psi_0(x, y), \quad \psi_0(x, y) = e^{i\alpha x}\varphi(y) + e^{-i\alpha x}\varphi^*(y) \tag{5}$$

где функция φ — решение уравнения Орра — Зоммерфельда

$$L_\alpha \varphi \equiv (D^2 - \alpha^2)^2 \varphi - i\alpha\lambda_* [(U - c_0)(D^2 - \alpha^2)\varphi - U''\varphi] = 0$$

Постоянную β_1 будем считать положительной, так как этого можно добиться с помощью сдвига переменной x. Сделаем существенное для дальнейшего предположение: что уравнение (3) при $k = 1$ и данных критических значениях λ_* и c_0 имеет ровно два линейно-независимых решения (за которые можно принять $e^{i\alpha x}\varphi$ и $e^{-i\alpha x}\varphi^*$). Как доказано в [3, 4], это выполняется для $U(y) = c_1 + c_2 \sin(y - y_0)$, а по теории возмущений — для профилей, близких к данному частному профилю. В общем случае сделанное предположение, по-видимому, может нарушаться, однако не более чем для счетного числа значений параметра α.

Условие разрешимости уравнения (3) имеет вид

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} F_k(x, y) e^{-i\alpha x} \theta(y)\, dx\, dy = 0 \tag{6}$$

где θ есть 2π — периодическое решение сопряженного уравнения Орра — Зоммерфельда

$$L_\alpha^* \theta \equiv (D^2 - \alpha^2)^2 \theta - i\alpha\lambda_* [(U - c_0)(D^2 - \alpha^2)\theta + 2U'\theta'] = 0 \tag{7}$$

Для функции ψ_2 из (3) и (4) получаем

$$\psi_2(x, y) = \beta_1^2 [v_0(y) + v_1(y) e^{2i\alpha x} + v_1^*(y) e^{-2i\alpha x}] \tag{8}$$

Функции v_0, v_1 суть 2π — периодические решения уравнений

$$L_0 v_0 \equiv v_0^{\mathrm{IV}} = i\alpha \frac{d^2}{dy^2}(\varphi^*\varphi' - \varphi\varphi^{*\prime}), \qquad \langle v_0 \rangle = 0$$

$$L_{2\alpha} v_1 \equiv (D^2 - 4\alpha^2)^2 v_1 - 2i\alpha\lambda_* [(U - c_0)(D^2 - 4\alpha^2) v_1 - U'' v_1] = i\alpha \frac{d}{dy}(\varphi'^2 - \varphi\varphi'')$$

Из условия разрешимости (6) при $k = 2$ получаем $c_1 = 0$, если отличен от нуля интеграл

$$I_1 = \langle\omega\theta\rangle, \qquad \omega = (D^2 - \alpha^2)\varphi \tag{9}$$

Из того же условия при $k = 3$ получаем уравнение для определения β_1, c_2

$$-\lambda_* c_2 I_1 + \beta_1^2 I_2 + I_3 = 0 \tag{10}$$

$$I_2 = \langle[v_0'\omega - v_1'\omega^* - 2v_1\omega^{*\prime} - v_0'''\varphi + 2\varphi^{*\prime}(D^2 - 4\alpha^2)v_1 + \varphi^*(D^2 - 4\alpha^2)v_2']\theta\rangle$$

$$I_3 = \langle[U\omega - U''\varphi]\theta\rangle$$

Решая уравнение (10), получим

$$\beta_1^2 = -\frac{\operatorname{Im}(I_3/I_1)}{\operatorname{Im}(I_2/I_1)}, \qquad \lambda_* c_2 = \frac{\operatorname{Im}(I_3/I_2)}{\operatorname{Im}(I_1/I_2)}$$

Функцию φ и критические параметры λ_* и c_0 при малых α можно вычислить, разлагая их в ряды по степеням α [1]

$$\lambda_* = \lambda_0 + \alpha^2\lambda_2 + \ldots, \qquad \lambda_0^2 = (\langle\tau'^2\rangle)^{-1} \tag{11}$$

$$\varphi = i + \alpha\lambda_0\tau + \ldots, \qquad c_0 = q + \delta_2\alpha^2 + \ldots$$

Функция τ определяется путем решения краевой задачи

$$\tau'' = U - q, \quad \tau(y + 2\pi) = \tau(y), \quad \langle\tau\rangle = 0$$

Оба числа $\pm\lambda_0$ — критические значения; для определенности считаем $\lambda_0 > 0$. Следующие члены разложения (11) приведены в [1].

Решение θ сопряженного уравнения (7) нормируем условием

$$\langle\theta\rangle = -i$$

Разыскивая θ в виде ряда по степеням α, найдем

$$\theta = -i + \alpha^3\lambda_0\chi + \ldots \tag{12}$$

$$\chi^{\mathrm{IV}} = -U + q, \qquad \chi(y + 2\pi) = \chi(y), \qquad \langle\chi\rangle = 0$$

Точно также для функций v_0, v_1 получаем, если $\langle\tau\tau'^2\rangle \neq 0$

$$v_0 = 2\lambda_0\alpha^2 h + O(\alpha^4), \qquad h' = \tau, \qquad \langle h\rangle = 0 \tag{13}$$

$$v_1 = b_1\alpha + \lambda_0\alpha^2(h - 2ib_1\tau + b_2) + O(\alpha^3)$$

$$b_1 = -2i\langle h\tau'^2\rangle / 9\langle\tau\tau'^2\rangle, \qquad b_2 = \mathrm{const}$$

Подставляя (11), (12) и (13) в (9) и (10), получим

$$J_1 = -\alpha^2 + O(\alpha^4), \qquad J_2 = 2i\alpha^5\lambda_0^2\langle\tau^2\rangle + O(\alpha^6)$$

$$J_3 = -q\alpha^2 - 2i\alpha^3 / \lambda_0 + O(\alpha^4) \tag{14}$$

Наконец, из (14) и (10) получаем выражения для амплитуды β_1 и коэффициента c_2 поправки к фазовой скорости

$$\beta_1^2 = \lambda_0^{-3}\alpha^{-2}\langle\tau^2\rangle^{-1}[1 + O(\alpha^2)], \qquad c_2 = q / \lambda_0 + O(\alpha^2) \tag{15}$$

Доказательство сходимости рядов по степеням α такое же, как в [1], и на нем останавливаться не будем. Сходимость рядов Ляпунова — Шмидта (5) следует из результатов работы [2].

Таким образом, формулы (2), (5), (8), (11) и (15) определяют при малых α сверхкритическое автоколебательное течение жидкости. Конечно, радиус сходимости рядов (1.5) зависит от α и, по-видимому, есть $O(\alpha)$ при $\alpha \to 0$.

Заметим, что формулы (15) сохраняют силу и в случае $\langle \tau\tau'^2 \rangle = 0$, если только $v_1 \to 0$ при $\alpha \to 0$. Это имеет место, например, для синусоидального профиля $U(y) = q + \gamma \sin y$.

Поступила 22 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений. Сб. «Численные методы решения задач математической физики», М., «Наука», 1966.
2. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, вып. 35, № 4, стр. 638—655.
3. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Б. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, вып. 25, № 6, стр. 1140—1143.
4. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, вып. 29, № 3, стр. 453—467.