

УДК 532.516.2:621.822—72

УПОРНЫЙ ГАЗОВЫЙ ПОДШИПНИК С НАДДУВОМ

Н. Д. ЗАБЛОЦКИЙ, В. С. КАРПОВ

(Ленинград)

Применен метод Галеркина для расчета упорного газового подпятника с наддувом. Показано, что при соответствующем выборе аппроксимирующих функций уже первое приближение дает удовлетворительные результаты. Полученные данные сравниваются с результатами численного интегрирования.

Рассмотрим течение газовой смазки в зазоре упорного подпятника с наддувом (фиг. 1) при произвольном положении смазываемых плоскостей. Газовая опора включает в себя подпятник 1, имеющий в центре отверстие наддува 2 и карман 3 радиуса r_0 . Торец ротора 4 составляет с плоскостью подпятника угол α . Ротор вращается с угловой скоростью ω . Из камеры нагнетания 5 газ, имеющий плотность ρ_0 и находящийся под давлением p_0 , через отверстие в диафрагме поступает в карман 3 и далее в зазор между подпятником и ротором. Давление в кармане p_s считается постоянным и равным давлению $p|_{r=r_0}$ на входе в смазочный слой. Зазор между дисками мы задаем формулой (h' — размерная величина зазора)

$$h = h' / h_0 = 1 + v r \cos \varphi \quad (v = R \operatorname{tg} \alpha / h_0) \quad (1)$$

Распределение давления p в зазоре подпятника определяется из уравнения Рейнольдса, которое в безразмерной форме (за масштаб давления принято давление в камере нагнетания p_0 , за масштаб длины радиус R) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r h^3 p \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) = \Lambda r^2 \frac{\partial p h}{\partial \varphi} \quad \left(\Lambda = \frac{6 \mu \omega R^2}{p_0 h_0^2} \right) \quad (2)$$

Решение уравнения (2) должно быть периодической функцией и удовлетворять условиям на границе

$$p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi), \quad p|_{r=r_0} = p_s, \quad p|_{r=1} = p_a \quad (3)$$

Для определения p_s используем условие равенства массового расхода газа через диафрагму [1] и через кольцевое сечение смазочного слоя радиуса r_0 и высотой h

$$-\frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^3 \left(\frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r_0} d\varphi = m \Theta \quad \left(m = \frac{12 \mu M^*}{\pi h_0^3 p_0 \rho_0}, \quad \Theta = \sqrt{1 - p_s^4} \right) \quad (4)$$

Здесь Θ — дроссельная характеристика, M^* — максимальный расход. Формула, связывающая Θ с давлением p_s , является аппроксимацией изэнтропической зависимости безразмерного массового расхода через сужающееся сопло от противодавления [2].

Для параллельных дисков ($v = 0$) задача имеет простое решение (индексом 0 отмечены значения p и p_s при $v = 0$)

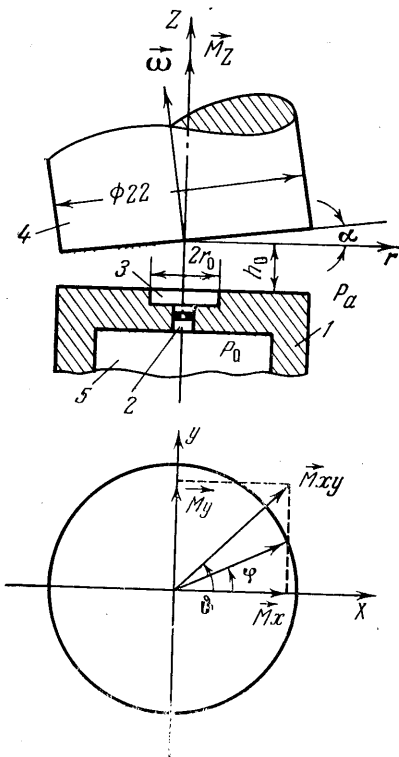
$$p_0^2 = (p_{s0}^2 - p_a^2) \frac{\ln r}{\ln r_0} + p_a^2 \quad (5)$$

$$p_{s0}^2 = (p_a^2 - m \ln r_0 \sqrt{m^2 \ln r_0 + 1 - p_a^4}) / (1 + m^2 \ln^2 r_0)$$

Представляет также интерес другой частный случай — $\Lambda \rightarrow \infty$. Из работы [3] следует, что асимптотическое (при $\Lambda \rightarrow \infty$) решение уравнения (2) является функцией только одной переменной (индексом ∞ здесь и в дальнейшем отмечаются величины, соответствующие $\Lambda = \infty$).

$$p_{\infty}^2 h^2 = F(r) \quad (6)$$

Чтобы определить вид функции $F(r)$, проинтегрируем уравнение (2) по φ от 0 до 2π и дважды по r



Фиг. 1

$$\int_0^{2\pi} h^3 p^2 d\varphi - 3 \int dr \int_0^{2\pi} h^2 p^2 \frac{\partial h}{\partial r} d\varphi = 2\pi C_1 \ln r + 2\pi C_2 \quad (7)$$

Для нахождения констант интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями (3)

$$2\pi(1 + 1.5v^2 r_0^2) p_s^2 - 3v \left(\int dr \int_0^{2\pi} h^2 p^2 \cos \varphi d\varphi \right) \Big|_{r=r_0} = 2\pi C_1 \ln r_0 + 2\pi C_2 \quad (8)$$

$$2\pi(1 + 1.5v^2) p_a^2 - 3v \left(\int dr \int_0^{2\pi} h^2 p^2 \cos \varphi d\varphi \right) \Big|_{r=1} = 2\pi C_2$$

Подстановка в эти выражения асимптотического решения (6) позволяет определить функцию $F(r)$

$$F(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

$$C_1 = [p_{s\infty}^2 (1 + 1.5v^2 r_0^2) - C_2] / \ln r_0$$

$$C_2 = p_a^2 (1 + 1.5v^2) \quad (9)$$

Следует отметить, что это решение можно получить иным путем, используя метод, предложенный в работе [4]. Давление в кармане $p_{s\infty}$ для асимптотического случая выражается формулой

$$p_{s\infty} = \frac{C_2(1 + 1.5v^2 r_0^2) - m \ln r_0 [m^2 \ln^2 r_0 + (1 + 1.5v^2 r_0^2)^2 - C_2^2]^{1/2}}{(1 + 1.5v^2 r_0^2)^2 + m^2 \ln^2 r_0} \quad (10)$$

Рассмотрим далее случай произвольных значений параметров в уравнении (2). Введя новую функцию $\psi = p^2 h^2$, запишем уравнение (2) в виде

$$h \left[r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] - r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - 2\Lambda r^2 \frac{\partial \sqrt{\psi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (11)$$

Разложим [5] иррациональную функцию $\sqrt{\psi}$, входящую в это уравнение, в ряд в окрестности ψ_∞ ($\psi_\infty = \psi |_{\Lambda \rightarrow \infty}$)

$$\sqrt{\psi} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\psi_\infty} + \frac{\psi}{\sqrt{\psi_\infty}} + \dots \right) \quad (12)$$

Если ограничиться первыми двумя членами в разложении (12), то уравнение (11) будет линейным

$$h \left[r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] - r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\Lambda}{\sqrt{\psi_\infty}} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 \quad (13)$$

Решение уравнения (13) будем искать методом Галеркина. Этот метод целесообразно применять к уравнениям с однородными условиями. Поэтому введем новую функцию $\psi^* = \psi - \sigma(r)h^2$, где $\sigma(r)$ — некоторая произвольная функция, удовлетворяющая следующим граничным условиям:

$$\sigma(r) |_{r=r_0} = p_s^2, \quad \sigma(r) |_{r=1} = p_a^2 \quad (14)$$

Тогда n -е приближение функции ψ согласно методу Галеркина можно представить в виде тригонометрического полинома

$$\psi = \sigma(r)h^2 + \psi^* = \sigma(r)h^2 + \sum_{k=0}^n f_k(r) (a_k \sin k\varphi + b_k \cos k\varphi) \quad (15)$$

где $f_k(r)$ — произвольные функции, зависящие только от координаты r и удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$f_k(r_0) = f_k(1) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Быстрота сходимости приближенного решения (15) к точному решению существенно зависит от удачного выбора функций $f_k(r)$. Целесообразно выбрать вид этих функций таким, чтобы решение тождественно удовлетворяло (на любом приближении) хотя бы одному из условий (помимо граничных условий), вытекающих из физических особенностей движения газа. Проинтегрируем (11) по φ от 0 до 2π

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \left(rh \frac{\partial \psi}{\partial r} - 2r\psi \frac{\partial h}{\partial r} \right) d\varphi = 0 \quad (16)$$

Это выражение является следствием закона сохранения массы. Выберем $\sigma(r)$ и $f_k(r)$ таким образом, чтобы решение (15) удовлетворяло условию (16) тождественно при произвольных значениях коэффициентов a_k и b_k . Для этого подставим (15) в (16)

$$2b_0(rf_0'' + f_0') + vb_1(r^2f_1'' - 2f_1) = 2[r(1 + 1.5v^2r^2)\sigma']' \quad (17)$$

Вид функции $\sigma(r)$ произволен, поэтому определим его из условия обращения в нуль правой части соотношения (17). Проинтегрировав полученное равенство с учетом граничных условий (14), получим

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= d_1 \ln [r^2 / (1 + 1.5v^2r^2)] + d_2 \\ d_1 &= (p_s^2 - p_a^2) \{ \ln [r_0^2(1 + 1.5v^2) / (1 + 1.5v^2r_0^2)] \}^{-1} \\ d_2 &= d_1 \ln(1 + 1.5v^2) + p_a^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Так как f_k определяется с точностью до постоянного множителя, положим $b_0 = -0.5vb_1$. При таком выборе $\sigma(r)$ и b_0 соотношение (17)

примет вид

$$rf_0'' + f_0' = r^2 f_1'' - 2f_1 \quad (19)$$

После интегрирования последнего выражения получим

$$f_0 = d_3 + d_4 \ln r + rf_1 - 3 \int f_1 dr \quad (20)$$

где d_3 и d_4 — произвольные константы.

Выберем f_k ($k > 0$) в виде $f_k = r^k(1-r)(r-r_0)$. Тогда f_0 будет иметь следующий вид:

$$f_0 = d_3 + d_4 \ln r - 0.25 r^2 (r^2 - 2r_0) \quad (21)$$

Константы d_3 и d_4 определяются из условия обращения f_0 в нуль при $r = r_0$ и $r = 1$

$$d_3 = 0.25(1 - 2r_0), \quad d_4 = [0.5r_0(1 - r_0^2) - 0.25(1 - r_0^4)] / \ln r_0 \quad (22)$$

При таком выборе $\sigma(r)$ и $f_k(r)$ условие (16) выполняется тождественно. Коэффициенты a_k и b_k определяются из системы уравнений, получаемых по методу Галеркина

$$\int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} L(\psi) f_k \begin{cases} \sin k\varphi \\ \cos k\varphi \end{cases} d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

$$L = h \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\Lambda}{\sqrt{\psi_\infty}} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \quad (24)$$

К системе (23) необходимо присоединить уравнение для определения p_s , которое получается подстановкой решения (15) в условие (4). Однако при этом будем иметь нелинейное алгебраическое уравнение, усложняющее решение системы. Расчеты давления p_∞ по формуле (10) показали, что изменение угла перекоса дисков даже при $\Lambda = \infty$ оказывает небольшое влияние на величину давления p_s в кармане. Поэтому заменим функцию истечения (4), записанную в переменных (θ, p_s^2) , линейной функцией, являющейся уравнением касательной к функции θ в точке $\theta(p_{s0}^2)$.

$$\theta \approx (1 - p_{s0}^2 p_s^2) (1 - p_{s0}^4)^{-1/2} \quad (25)$$

Тогда из условия (4) после подстановки в него выражений (25) и (15) для определения p_s получим уравнение

$$0.5\nu b_4 d_4 - (p_s^2 - p_a^2) \left\{ 2 \left[\ln \frac{r_0^2(1 + 1.5\nu^2)}{1 + 1.5\nu^2 r_0^2} \right]^{-1} - m p_{s0}^2 (1 - p_{s0}^4)^{-1/2} \right\} = m(1 - p_{s0}^2 p_a^2) (1 - p_{s0}^4)^{-1/2} \quad (26)$$

Для $n = 1$ систему (23) с учетом (26) запишем в виде

$$c_{11} a_1 + c_{12} b_1 + c_{13} (p_s^2 - p_a^2) = c_{14} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$c_{11} = \int_{r_0}^1 (r^2 f_1'' + r f_1' - f_1) f_1 dr, \quad c_{12} = -c_{21} = \Lambda \int_{r_0}^1 r^2 f_1^2 \psi_\infty^{-1/2} dr$$

$$c_{13} = 2\nu \Lambda \ln^{-1} \frac{r_0^2(1 + 1.5\nu^2)}{1 + 1.5\nu^2 r_0^2} \int_{r_0}^1 \frac{r^3 f_1}{\sqrt{\psi_\infty}} \ln \frac{r^2(1 + 1.5\nu^2)}{1 + 1.5\nu^2 r^2} dr \quad (27)$$

$$c_{14} = -2\nu\Lambda p_a^2 \int_{r_0}^1 r^3 f_1 \psi_\infty^{-1/2} dr, \quad c_{22} = c_{11} - 0.5\nu^2 \int_{r_0}^1 r^3 f_1 (r_0 - 3r^2 - d_4 r^{-2}) dr$$

$$c_{23} = 6\nu \ln^{-1} \frac{r_0^2 (1 + 1.5\nu^2)}{1 + 1.5\nu^2 r_0^2} \int_{r_0}^1 f_1 r (1 - 0.75\nu^2 r^2 + 0.375\nu^4 r^4) (1 + 1.5\nu^2 r^2)^{-2} dr$$

$$c_{24} = c_{31} = 0, \quad c_{32} = 0.5\nu d_4, \quad c_{33} = m p_{s0}^2 (1 - p_{s0}^4)^{-1/2} - 2 \ln^{-1} \frac{r_0^2 (1 + 1.5\nu^2)}{1 + 1.5\nu^2 r_0^2}$$

$$c_{34} = (1 - p_{s0}^2 p_a^2) (1 - p_{s0}^4)^{-1/2}$$

Некоторые из интегралов, входящих в последние выражения, можно вычислить аналитически, однако результаты интегрирования получаются настолько громоздкими, что целесообразнее пользоваться численными методами.

Систему, аналогичную (27), можно получить и для следующих приближений. Было проведено сравнение первого и второго приближений. Расчеты показали, что коэффициенты a_2 и b_2 на один-два порядка меньше, чем коэффициенты a_1 и b_1 , вследствие чего различие в значении функции ψ , вычисленной в первом и втором приближениях не превышает нескольких процентов. На величине давления $p = \sqrt{\psi} / h$ поправка от второго приближения сказывается еще меньше. Поэтому для расчетов интегральных характеристик опоры было использовано только первое приближение.

Вычисления давления p_s с учетом второго приближения показали, что параметры ν и Λ на величину давления в кармане влияют незначительно. Так, например, при $\Lambda = 10$, $m = 1$, $p_a = 0.1$, $r_0 = 0.02$ и $\nu = 0.3$ давление p_s отличается от давления $p_s|_{\nu=0}$ только на 2%. Это обстоятельство, с одной стороны, указывает на допустимость использованной выше линеаризации (25), а с другой — позволяет без существенного ущерба для точности принимать

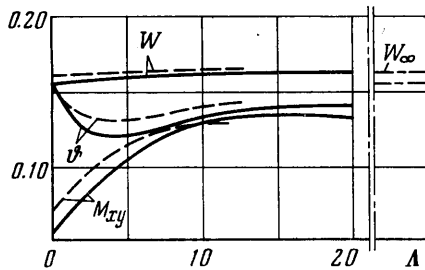
$$p_s = p_s|_{\nu=0}$$

Решение системы (27) с последующим расчетом давления в смазочном слое и определение интегральных характеристик опоры проводилось с помощью ЭВМ. Интегральные характеристики опоры — коэффициент несущей способности W , а также коэффициенты моментов сил давления M_x, M_y и сил трения M_z , направленных соответственно по осям x, y, z (фиг. 1), вычислялись по формулам

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (p - p_a) r dr d\varphi, \quad M_x = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p r^2 \sin \varphi dr d\varphi \quad (28)$$

$$M_y = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p r^2 \cos \varphi dr d\varphi, \quad M_z = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} h r \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \Lambda \frac{r^3}{6h} \right) dr d\varphi$$

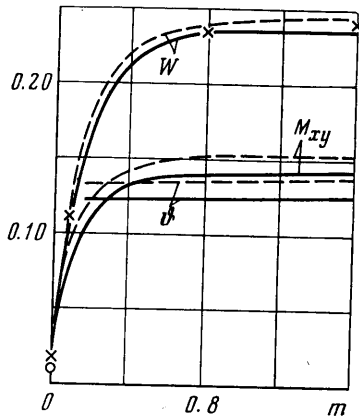
Для оценки точности предлагаемого способа решения задачи было проведено численное интегрирование уравнения (11). Уравнение (11) заме-



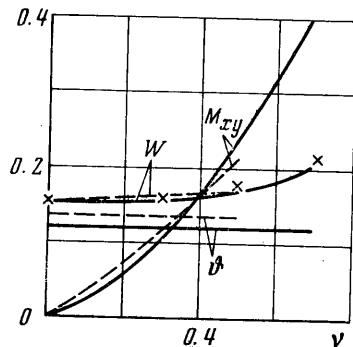
Фиг. 2

нялось с помощью центрально-разностных формул системой конечно-разностных уравнений относительно значений ψ в узлах сетки. Для решения разностной системы уравнений использовался метод Зейделя [6]. За начальное приближение выбиралось давление, соответствующее случаю параллельных дисков.

На фиг. 2–4 приведены результаты расчета интегральных характеристик опоры (при $r_0 = 0.02$ и $p_a = 0.1$), полученные по методу Галеркина (сплошные кривые) и численным интегрированием на ЭВМ ОДРА-1204



Фиг. 3



Фиг. 4

(пунктирные кривые). Кроме несущей способности были определены зависимости величины главного момента сил давления $M_{xy} = (M_x^2 + M_y^2)^{1/2}$ и его направления, характеризующего углом $\phi = \arctg(M_y / M_x)$ от параметров ν , m , Λ . По осям ординат на фиг. 2–4 отложены значения W , $M_{xy} \cdot 10$ и $\phi \cdot 10^{-1}$. На фиг. 2 двумя штрихпунктирными линиями показаны асимптотические ($\Lambda \rightarrow \infty$) значения W (верхняя прямая) и M_{xy} (нижняя прямая), полученные с использованием решения (9).

Приведенные на фиг. 2 данные, полученные при $\nu = 0.3$ и $m = 0.16$, показывают, что несущая способность слабо зависит от числа сжимаемости Λ и, как следует из фиг. 3 (при $\nu = 0.3$, $\Lambda = 5$), определяется в основном величиной коэффициента режима m . Следует отметить, что слабая зависимость несущей способности от Λ наблюдается почти во всем диапазоне изменения параметра m . Исключение составляют только область близких к нулю значений m . Это хорошо видно из фиг. 3, где крестиками обозначены асимптотические значения ($\Lambda = \infty$): при $m = 0$ величина W , вычисленная при $\Lambda = 5$ (кружок на фиг. 3), примерно в два раза отличается от асимптотического значения; по мере увеличения m различие между общим и асимптотическим решением становится меньше. Из этого можно сделать вывод, что для расчета несущей способности можно пользоваться асимптотическим решением (6). При этом совпадение с общим решением оказывается хорошим в широких пределах изменения параметра ν , что подтверждается данными, приведенными на фиг. 4, на которой крестиками обозначены асимптотические значения W , вычисленные при $m = 0.16$. Все остальные результаты, помещенные на фиг. 4, получены при $\Lambda = 5$ и $m = 0.16$.

Поскольку на несущую способность гибридной опоры относительный перекосяк (при $\nu < 0.5$) тоже оказывает слабое влияние (фиг. 4), то величину W можно определять и по распределению давления, полученному для режима подвеса ($\Lambda = 0$) при параллельном положении смазываемых

поверхностей ($\nu = 0$). В этом случае формулы для распределения давления имеют весьма простой вид (5). Очевидно, что такое упрощение будет давать тем меньшую погрешность, чем больше коэффициент режима и меньше ν . Порядок величины этой погрешности можно оценить, сопоставив результаты расчетов с использованием формулы (5) с данными, полученными из асимптотического решения (9).

В противоположность несущей способности момент сил давления M_{xy} существенно зависит не только от параметров m и ν , но и от числа сжимаемости Λ , причем асимптотическое ($\Lambda \rightarrow \infty$) значение момента M_{xy} практически реализуется при очень больших значениях Λ , поскольку даже при $\Lambda = 20$ (фиг. 2) отличие величины этого момента от асимптотического значения составляет 13%. Вследствие сильного влияния параметров Λ , m и ν на момент M_{xy} расчет момента приходится вести, используя общее решение задачи (15).

Направление момента M_{xy} , определяемое углом θ , при $m > 0.1$ практически не зависит от коэффициента режима m . Почти не влияет на угол θ и перекос дисков (фиг. 4).

При $\nu < 0.2$ составляющая момента M_x была очень малой и ее вычисление по методу Галеркина было сопряжено со значительной погрешностью. Эта погрешность почти не сказывалась на величине главного момента M_{xy} , так как его величина в основном определялась второй составляющей M_y , на порядок превышающей M_x . Однако угол $\theta = \arctg (M_y / M_x)$ вычислялся не достаточно точно. С большой погрешностью также связано вычисление угла θ при $m < 0.1$, поэтому на фиг. 3 для этих значений m результаты расчета угла не приведены.

На графиках не приведено изменение момента сил трения M_z , так как расчеты показали, что даже при небольших значениях Λ ($\Lambda \approx 1$) величина этого момента в основном определяется вторым членом подынтегральной функции, входящей в формулу (28) для момента M_z . Поэтому момент сил трения с достаточной точностью можно вычислить по приближенной формуле

$$M_z = -1/8 \Lambda \nu^{-4} [2(1 - \sqrt{1 - \nu^2}) - \nu^2 \sqrt{1 - \nu^2}]$$

Как следует из приведенных результатов, совпадение данных, полученных по методу Галеркина и численным интегрированием нелинейного уравнения (11), оказывается удовлетворительным. Реализация численного метода решения рассматриваемой здесь задачи встречает ряд осложнений, связанных как с большой затратой машинного времени (расчет одного варианта на ЭВМ ОДРА — 1204 занимает до 35 мин), так и с трудностью получения решения при больших Λ . Поэтому разобранный выше метод Галеркина в сочетании с машинным счетом оказывается удобным для исследования торцевых газовых опор с наддувом.

Поступила 13 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Заблочкий Н. Д. Влияние закона истечения воздуха через устройство наддува на аэродинамические характеристики упорного подшипника. Машиноведение, 1969, № 2.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
3. Шейнберг С. А. Газовая смазка подшипников скольжения. Сб. «Трение и износ в машинах», т. 8, М., Изд-во АН СССР, 1953.
4. Котляр Я. М. Асимптотические решения уравнения Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
5. Заблочкий Н. Д. Приближенное решение уравнения Рейнольдса для радиального газового подшипника конечной длины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1962.