

УДК 532.516:518.5

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Т. А. ВИЛЬГЕЛЬМИ, М. А. ГОЛЬДШТИК, В. А. САПОЖНИКОВ

(Новосибирск)

Устойчивости течения в круглой трубе посвящено много работ теоретического и экспериментального характера (см., например, обзор [1]). Каждый раз математическим исследованием не удавалось получить гидродинамическую неустойчивость этого течения относительно возмущений с достаточно малой амплитудой. (Исключение составляет работа [2].) В пользу устойчивости к таким возмущениям говорит и эксперимент [3], в котором удалось затянуть ламинарный режим до чисел Рейнольдса порядка десятков тысяч. Эти факты дают основание считать, что течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе устойчиво к малым возмущениям. Однако аналитического или хотя бы численного доказательства этой гипотезы нет. Более того, некоторые работы, например [2], указывают на неустойчивость течения по отношению к трехмерным неосесимметричным возмущениям.

Проведенный в работе численный анализ гидродинамической устойчивости течения в круглой трубе по отношению к трехмерным возмущениям показал устойчивость течения в широком диапазоне изменения волновых чисел и чисел Рейнольдса.

1. **Постановка задачи.** Пусть на основной поток с вектором скорости  $V_0 = \{0, 0, u(r)\}$  и давлением  $p_0$  положены малые возмущения вида

$$v = w(r)G, \quad p = -\frac{i}{\alpha R}q(r)G, \quad G = \exp[ia(z - ct) + im\theta]$$

Соответствующие уравнения для этих возмущений в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  получены в [4]

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r}(rw_1)' \right]' - bw_1 - \frac{2im}{r^2}w_2 + \frac{i}{\alpha}q' &= 0 \\ \left[ \frac{1}{r}(rw_2)' \right]' - bw_2 + \frac{2im}{r^2}w_1 - \frac{m}{\alpha r}q &= 0 \\ \frac{1}{r}(rw_3)' - bw_3 - Ru'w_1 - q &= 0 \\ (rw_1)' + imw_2 + iarw_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$b = i\alpha R(u - c) + \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2, \quad R = \frac{Uh}{v}$$

Здесь  $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ , волновые числа  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $c = X + iY$  — искомое собственное значение (при  $Y < 0$  возмущение затухает со временем),  $u$  — невозмущенная скорость,  $h$  — радиус трубы,  $U$  — средняя скорость, штрих обозначает дифференцирование по  $r$ .

Для дальнейшего введем вместо  $w_i$  новые функции, для которых из (1.1) получается следующая система:

$$\Psi = \frac{i}{\alpha}rw_1, \quad \Phi = rw_2, \quad f = rw_3', \quad F = \frac{\Phi'}{r}, \quad W = w. \quad (1.2)$$

$$f' = rbW - i\alpha Ru'\Psi + rq, \quad F' = \frac{1}{r} \left( b\Phi - \frac{2\alpha m}{r^2} \Psi + \frac{m}{\alpha} q \right)$$

$$q' = \frac{\alpha^2}{r} \left( f - b\Psi + \frac{m}{\alpha} F \right), \quad W' = \frac{1}{r} f, \quad \Psi' = rW + \frac{m}{\alpha r} \Phi, \quad \Phi' = rF \quad (1.3)$$

Условие прилипания на стенке трубы записывается равенством

$$W = \Psi = \Phi = 0 \quad (r = 1) \quad (1.4)$$

Остальные три условия получаются из требования ограниченности скорости при  $r = 0$ . Согласно (1.2) это приводит при  $r = 0$  к равенству

$$\Psi = \Phi = f = 0$$

При численном решении задачи нужно иметь возможность вычислять правые части (1.3) при  $r = 0$ . Здесь возникают существенные трудности при устранении особенностей.

Если пользоваться разложением решения в степенные ряды в окрестности  $r = 0$ , то для каждого  $m$  получаются свои коэффициенты разложения, которые имеют довольно громоздкий вид. К тому же при больших значениях  $\alpha R$  должно быть взято большое число членов разложения. Однако основное неудобство состоит в том, что при нахождении фундаментальных решений системы (1.3) значения  $W$ ,  $F$ ,  $q$  при  $r = 0$  нельзя задавать по произволу. Это связано с тем, что функция  $W(r)$  вблизи  $r = 0$  имеет представление  $W \sim r^m$  и при  $m > 0$  нужно задавать не  $W(0)$ , а соответствующую производную.

Здесь эти трудности преодолеваются тем, что граничные условия ставятся не при  $r = 0$ , а при  $r = r_0 \ll 1$

$$\Psi = \Phi = f = 0, \quad W = C_1, \quad q = C_2, \quad F = C_3 \quad (r = r_0) \quad (1.5)$$

Эти условия обеспечивают ограниченность решения и допускают равномерный предельный переход при  $r_0 \rightarrow 0$  к случаю «пустой» трубы в отличие от варианта, когда на внутреннем цилиндре поставлены физические условия прилипания вида (1.4).

Таким образом, решается задача на собственные значения (1.3)–(1.5). Для вычисления собственных значений используется методика, описанная в [4].

При отладке метода и программы для ЭВМ были просчитаны контрольные варианты и результаты расчета сравнивались с ранее полученными результатами работы [4].

Для большого набора значений параметров проводились расчеты собственных значений и их сравнение для трех задач: I – (1.3)–(1.5); II – (1.3), (1.4) и при  $r = 0$  граничные значения функций получались разложением в степенной ряд по  $r$  в окрестности  $r = 0$ ; III – (1.3) и при  $r = 0$ ,  $r = 1$  ставились условия прилипания (1.4).

В задаче II невозмущенный профиль скорости описывался функцией  $u = 2(1 - r^2)$ , в задачах I, III –  $u = Ar^2 + B \ln r + C$ . константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  были получены из условий

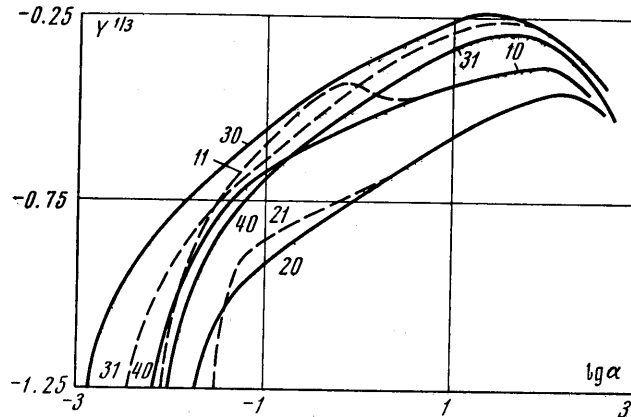
$$u(1 + \xi) = 0, \quad 2 \int_{\xi}^{1+\xi} ru \, dr = 1 + 2\xi \quad (\text{задача I})$$

$$u(\xi) = 0$$

и условия  $u'(\xi) = 0$  для задачи I или  $u(\xi) = 0$  для задачи III.

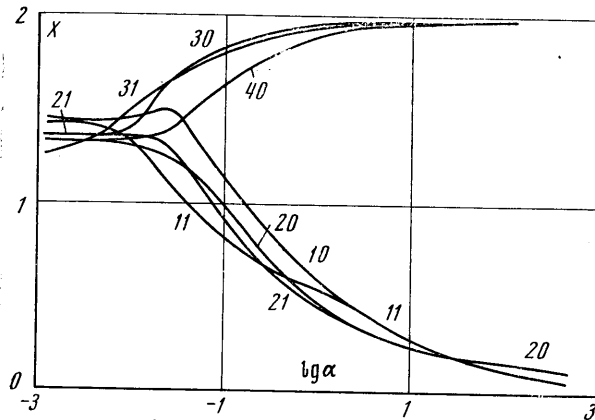
Здесь параметр  $\xi$  представляет собой отношение радиуса внутреннего цилиндра к зазору между цилиндрами. При  $\xi \rightarrow 0$  профиль скоростей во всех случаях стремился к параболическому, но в задаче III неравномерно. Расчеты показали, что собственные значения задач I и II практически совпадают и отличаются не более, чем на 4% от соответствующих собственных значений задачи III.

2. Результаты расчетов. Здесь будут приведены основные численные результаты по расчету собственных значений задачи (1.3)–(1.5). Расчеты



Фиг. 1

ты, как правило, производились при изменении параметров в диапазоне  $\alpha \in (0,001, 400)$ ,  $m \leq 16$ ,  $R \geq 5000$  для нескольких наиболее опасных спектральных номеров. Значение  $\xi$  принималось равным  $10^{-2}$ , так как выполненные расчеты показали, что, начиная с  $\xi \sim 10^{-2}$ , собственные значения

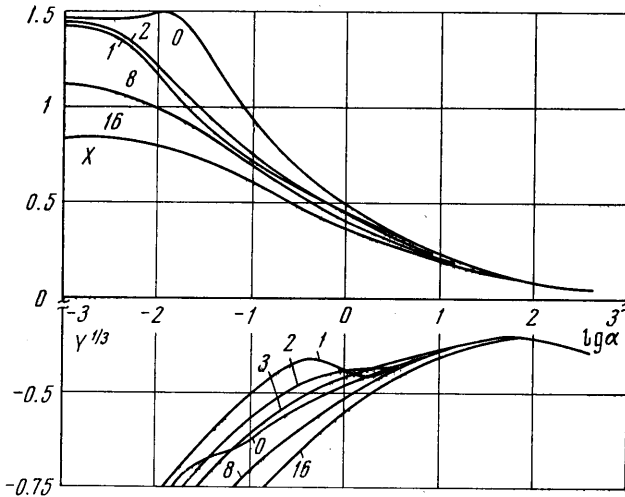


Фиг. 2

практически не изменялись при фиксированных значениях  $\alpha$ ,  $R$ ,  $m$  и  $\xi \rightarrow 0$ . Расчеты прекращались для значений параметров, при которых собственные значения выходили на асимптотические зависимости.

На фиг. 1 представлены зависимости мнимых частей собственных значений  $\gamma$  от волнового числа  $\alpha$  для нескольких спектральных номеров при двух значениях  $m$  ( $m=0$  — сплошные линии,  $m=1$  — штриховые). В нумерации кривых первая цифра означает условный номер собствен-

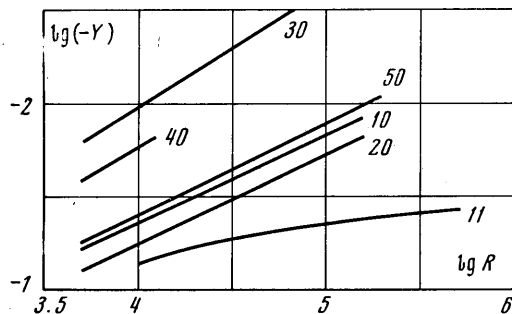
ного значения, вторая —  $m$ . Число Рейнольдса равно 5000. Результаты сравнивались с собственными значениями работы [1], где для  $\alpha = 1$ ,  $m = 0$  и  $R = 5000$  представлен график спектральных мод. Различие в собственных значениях для данных фиксированных параметров незначительное, например собственное значение [1]  $s = 0.454 - i 0.4$  (с точностью графического изображения), а вычисленное авторами  $s = 0.457 - i 0.415$ . При



Фиг. 3

очень малых и больших значениях  $\alpha Y_{ij}(\alpha)$ , как и для течений в плоском канале, асимптотически выходят на определенные зависимости. Из фиг. 2 видно четкое разделение спектральных мод на два класса: пристенное, локализованное у стенки трубы, с фазовой скоростью  $X(\alpha)$ , которая стремится к нулю при больших  $\alpha$ , и приосевые, локализованные у оси трубы, с фазовой скоростью, стремящейся к максимальной скорости потока. Как и в плоском канале, для приосевых собственных значений  $Y(\alpha)$  имеет место один максимум, соответствующий коротковолновым возмущениям. Пристенные собственные значения с  $m = 0$  имеют также один коротковолновый максимум при  $\alpha \sim 100$ . Длинноволновый максимум в области  $\alpha \sim 1$  имеет только функция  $Y_{11}(\alpha)$  (кривая 11 на фиг. 1). Все  $Y_{ij} < 0$ .

На фиг. 3 представлена деформация зависимости  $s(\alpha)$  для наиболее опасного собственного значения с ростом  $m$  при  $R = 10^4$ . Номер кривой соответствует значению  $m$ . При  $\alpha \sim 1$  наиболее опасным является возмущение с  $m = 1$ . С ростом  $m$  ( $m > 1$ ) и для  $m = 0$  длинноволновый локальный максимум исчезает. Как показали расчеты, этот максимум исчезает и при  $m = 1$ , если число Рейнольдса превышает  $4.5 \cdot 10^5$ . В этом отношении течение в трубе существенно отличается от плоского, для которого при всех числах Рейнольдса существует характерный длинноволновый



Фиг. 4

пик, который и «вылезает» в области неустойчивости при больших числах Рейнольдса.

Для полного изучения устойчивости течения при увеличивающемся числе Рейнольдса достаточно проследить за изменением локальных максимумов функции  $Y_{ij}(\alpha)$ , но, как только что было отмечено, локальный длинноволновый максимум функции  $Y_{11}(\alpha)$  исчезает с ростом  $R$ . Зависимость от числа  $R$  функций  $\max_{\alpha} Y_{ij}$  при различных  $i, j$  для коротковолновых локальных максимумов показана на фиг. 4. С ростом  $R$  эти функции в логарифмическом масштабе выходят на линейные, оставаясь в области  $\dot{Y} < 0$ . Отметим, что величина  $\alpha_{\max}$  для всех номеров  $i$  и  $j$  возрастает с ростом числа Рейнольдса. Кривая *II* представляет собой изменение длинноволнового локального максимума.

Таким образом, численный анализ гидродинамической устойчивости течения в круглой трубе практически во всем диапазоне изменения параметров показал устойчивость течения к трехмерным малым возмущениям при любых числах Рейнольдса.

Поступила 7 X 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Davey A., Drazin P. G. The stability of Poiseuille flow in a pipe. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, pt 2.
2. Graebel W. P. The stability of pipe flow, pt 1. Asymptotic analysis for small wavenumbers. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, pt 2.
3. Leite R. J. An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 1.
4. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в кольцевом канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.