

Однако прямая связь между нестационарностью движения цилиндра и характеристиками вязкоупругости раствора полимера не обнаруживается, так как величины периодов свободных колебаний и автоколебаний цилиндра, изменявшиеся в проведенных опытах в пределах 1.5—1.7 сек, на несколько порядков превышают время сдвиговой релаксации.

Существенное уменьшение амплитуды автоколебаний цилиндра, буксируемого в слабом растворе полимера, по сравнению со случаем буксировки в воде отчасти может быть связано с уменьшением силы, вынуждающей колебания вследствие затягивания отрыва ламинарного пограничного слоя цилиндра, который находится в докритическом режиме обтекания, и уменьшения размеров зоны вихреобразования и следа. Затягиванием отрыва также может быть объяснено уменьшение полного сопротивления цилиндра, подавляющую часть которого составляет сопротивление давления. Другой причиной уменьшения амплитуды является увеличение сопротивления нестационарным колебательным движениям цилиндра в растворе полимера, о чем свидетельствуют зависимости декремента свободных колебаний от амплитуды, показанные на фиг. 3.

Авторы благодарят В. П. Боровикова за помощь в организации экспериментов.

Поступила 19 X 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В., Шульман З. П., Пурис Б. И. Отрыв пограничного слоя на круговом цилиндре, обтекаемом неньютоновской эластовязкой жидкостью. *Инж.-физ. ж.*, 1968, т. 14, № 1.
2. Баренблатт Г. И., Булина И. Г., Мясников В. П. Влияние растворов некоторых высокомолекулярных соединений на снижение сопротивления при обтекании тел турбулентным потоком. *ПМТФ*, 1965, № 3.
3. Калашников В. И., Кудин А. М. Вихри Кармана в потоках растворов полимеров, снижающих сопротивление трения. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 4.

УДК 533.6.01.6

#### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ УДАРНОГО СЛОЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ СФЕРЫ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ВДУВАХ

Г. А. ДАНИЛИН

(Москва)

Численные оценки при гиперзвуковом обтекании показывают [1], что вследствие больших конвективных и радиационных потоков плотность потока массы, уносимой с поверхности тела, может стать равной или большей плотности потока массы набегающего потока, т. е. плотность вдуваемого потока массы с поверхности тела можно считать как угодно большой. В настоящей статье приводится асимптотическое решение уравнений ударного слоя в окрестности критической точки сферы при интенсивных вдувах. Асимптотические решения сравниваются с численными и устанавливается граница их применимости.

Ранее асимптотические решения уравнений пограничного слоя при больших вдувах исследовались в работах [1—4]. В работе [1] были получены асимптотические и численные профили скоростей при течении газа в ударном слое в окрестности сферического и цилиндрического притупления. В качестве исходных принимались уравнения пограничного слоя. В работе [5] были получены асимптотические и численные решения уравнений Навье — Стокса в окрестности центральной линии тока для течения газа в плоском канале при интенсивном вдуве со стенок. Сравнение результатов вычисления по асимптотическим формулам с точными численными решениями показало довольно быструю сходимость асимптотических решений для всех перечисленных выше работ и позволило установить критерий большого вдува.

1. Рассмотрим обтекание сферы радиуса  $R$  гиперзвуковым потоком однородного, вязкого, теплопроводного, сжимаемого газа. Не учитывая диффузию и излучение в системе координат, связанной со сферой (ось  $x$  вдоль поверхности) и (ось  $y$  нормально к ней) уравнения движения в приближении тонкого ударного слоя [6, 7] в окрестности критической точки имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (xH\rho^*u^*) + \frac{\partial}{\partial y} (xH^2\rho^*v^*) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho^* \left( \frac{u^*}{H} \frac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{Ku^*v^*}{H} \right) = -\frac{1}{H} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{1}{H^3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu^* H^4 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^*}{H} \right) \right]$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{K\rho^*u^{*2}}{H}, \quad \rho^* c_p^* v^* \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( H^2 \frac{\mu^* c_p^*}{\sigma} \frac{\partial T^*}{\partial y} \right)$$

$$p^* = \rho^* R_A T^*, \quad H = 1 + Ky, \quad K = R^{-1}, \quad \sigma = \mu^* c_p^* / \lambda^*$$

Здесь  $u^*$  и  $v^*$  — составляющие скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно; остальные обозначения общеприняты.

В уравнении притока тепла опущены члены, которые имеют порядок  $O(x^2)$  в окрестности критической линии.

Предполагая постоянной теплоемкость газа, будем исследовать такие течения, когда ударную волну можно рассматривать математической поверхностью разрыва. Считая заданными расход и температуру газа, вдуваемого с поверхности сферы, имеем следующие граничные условия:

$$u^* = 0, \quad \rho^* v^* = (\rho^* v^*)_w, \quad T^* = T_w \quad (y = 0) \quad (1.2)$$

$$u^* = u_e^* = V_\infty s, \quad v^* = v_e^* = -kV_\infty \quad (s = Kx)$$

$$p^* = p_{e0}^* = p_\infty^* [1 + \gamma M_\infty^2 (1 - k)]$$

$$T^* = T_e^* = T_\infty^* [1 + 1/2(\gamma - 1)M_\infty^2(1 - k^2)]$$

$$k = \frac{\rho_\infty^*}{\rho_e^*} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma - 1)M_\infty^2} \right], \quad \frac{dp_e^*}{ds} = -\frac{4\gamma M_\infty^2 p_\infty^*}{\gamma + 1} s$$

$$M_\infty^2 = \rho_\infty^* V_\infty^2 / (\gamma p_\infty^*), \quad (\gamma - 1) / \gamma = R_A / c_p^* \quad (y = \Delta)$$

где  $V_\infty$  — скорость набегающего потока,  $\Delta$  — отход ударной волны от тела,  $\infty$  будем относить к значению параметров в набегающем потоке,  $e$  — непосредственно за ударной волной и  $w$  — на поверхности тела.

Последние получены из условий Ренкина — Гюгонио в предположении концентричности ударной волны со сферой в окрестности критической линии.

В окрестности критической линии решение системы (1.1) и (1.2) будем искать в виде

$$u^* = u_e^*(s)u(\eta), \quad \rho^* v^* = (\rho^* v^*)_e \Phi(\eta) \quad (1.3)$$

$$p^* = p_{e0}^* p_0(\eta), \quad T^* = T_e^* \theta(\eta), \quad \rho^* = \rho_e^* \rho(\eta)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial s} = -\frac{(\rho^* u^{*2})_e}{s} p_2(\eta), \quad \mu^* = \mu_e^* \mu(\theta)$$

$$\sigma = \sigma(\theta), \quad y = \Delta \eta$$

Функции  $\psi_i$  определяются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий

$$(H^2 \Phi)' = 2\delta \rho H u \quad (1.4)$$

$$\varepsilon^2 H^{-2} [\mu H^4 (H^{-1} u)']' + H \Phi u' + \delta u (k\Phi - \rho u) = -\delta p_2$$

$$p_0' = 0, \quad p_2' = -2\delta k H^{-1} \rho u^2$$

$$\varepsilon^2 H^{-2} (\mu \sigma^{-1} H^{-2} \theta')' + \Phi \theta' = 0, \quad \rho = \theta^{-1}$$

$$u = 0, \quad \Phi = \Phi_w, \quad \theta = \theta_w \quad (\eta = 0)$$

$$u = \Phi = p_0 = \theta = 1, \quad p_2 = \beta_e \quad (\eta = 1)$$

$$\left( \delta = \frac{\Delta}{kR}, \quad \varepsilon^2 = -\mu_e^* / (\rho^* v^*)_e \Delta, \quad \beta_e = 4k / (\gamma + 1) \right)$$

Уравнения (1.3) — (1.5) будут исходными для формулируемой выше задачи.

2. Основная задача будет состоять в определении отхода ударной волны, положения линии растекания, трения и теплового потока на стенке. Структура уравнений (1.4), (1.5) такова, что при большом вдуве, т. е. больших значениях  $\Phi_w$  и  $\varepsilon^2 \ll 1$ , введение внешних переменных вблизи тела и ударной волны, приводит к существо-

ванию малого параметра у старшей производной. Представляя решение в виде степенных рядов по малому параметру, можно показать [1-5], что при  $|\Phi_w| \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  уравнения (1.4) вблизи стенки и ударной волны сведутся в первом приближении к системе уравнений Эйлера со следующими граничными условиями:

$$(H^2\varphi)' = 2\delta\rho Nu \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} H\varphi u' + \delta u(k\varphi - \rho u) &= -\delta p_2, & p_0 &= 1 \\ p_2' &= -2\delta k H^{-1} \rho u^2, & \theta' &= 0, \quad \rho = \theta^{-1} \\ u &= 0, \quad \varphi = \Phi_w, & \theta &= \theta_w \quad (\eta = 0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u = \varphi = \theta = 1, \quad p_2 = \beta_e \quad (\eta = 1) \quad (2.3)$$

Поскольку порядок системы (2.1) понизился, то при решении системы (2.1) вблизи поверхности тела должны быть опущены граничные условия на ударной волне (2.3), а при решении системы (2.1) в окрестности за ударной волной должны быть опущены граничные условия на теле (2.2). Тогда из уравнения для температуры и уравнения состояния следует, что в области около тела

$$\theta = \theta_w, \quad \rho = \rho_w = \theta_w^{-1} \quad (2.4)$$

а в области непосредственно за ударной волной

$$\theta = 1, \quad \rho = 1 \quad (2.5)$$

Далее определим линию растекания как линию, на которой вертикальная составляющая скорости обращается в нуль и величина  $p_2$  не меняет своего значения при переходе через нее, т. е.

$$\varphi = 0, \quad p_2^+ = p_2^- \quad (\eta = \eta_0) \quad (2.6)$$

Здесь величина  $\eta_0$  определяет положение линии растекания;  $p_2^+$  и  $p_2^-$  — значения  $p_2$  непосредственно перед линией растекания и за ней соответственно. Из (2.1), (2.2), (2.4) — (2.6) следует:

$$u'(0) = -\delta\beta_w\Phi_w^{-1}, \quad \beta_w = p_2(0) \quad (2.7)$$

$$\rho_w(u^2)^- = (u^2)^+ \quad (\eta = \eta_0) \quad (2.8)$$

Полагая  $H = 1$ , нетрудно показать, что решение системы (2.1) — (2.5) и (2.7) в окрестностях тела и за ударной волной имеет вид

$$\varphi = \Phi_w \{1 + 2\beta_w(k\Lambda_w)^{-2} [1 - \delta k\eta - \exp(-\delta k\eta)]\} \quad (0 \leq \eta < \eta_0)$$

$$\varphi = 1 - 2\delta(1 - \eta) - 2k^{-2}(1 - \beta_e^*) \{1 - \delta k(1 - \eta) - \exp[\delta k(1 - \eta)]\} \quad (\eta_0 < \eta \leq 1)$$

$$\Lambda_w^2 = \rho_w^{-1}\Phi_w^2, \quad \beta_e^* = \beta_e + k$$

Разлагая в этих выражениях  $\exp$  по степеням  $-\delta k\eta$  и  $\delta k(1 - \eta)$  соответственно при  $\delta k \ll 1$  с точностью до членов третьего порядка, получаем приближенные формулы

$$\varphi = \Phi_w(1 - \delta^2\beta_w\Lambda_w^{-2}\eta^2) \quad (2.9)$$

$$u = \delta\beta_w\rho_w^{-1/2}\Lambda_w^{-1}\eta(1 - 1/2\delta k\eta) \quad (0 \leq \eta < \eta_0)$$

$$\varphi = 1 - 2\delta(1 - \eta) + \delta^2(1 - \beta_e^*)(1 - \eta)^2 \quad (2.10)$$

$$u = 1 - \delta(1 - \beta_e^*)(1 - \eta) [1 + 1/2\delta k(1 - \eta)] \quad (\eta_0 < \eta \leq 1)$$

Учитывая (2.9), (2.10), из условий на линии растекания (2.6) и (2.8) следует:

$$\delta\eta_0 = \beta_w^{-1/2}\Lambda_w, \quad \delta = (1 + \sqrt{\beta_e^*})^{-1} + \beta_w^{-1/2}\Lambda_w$$

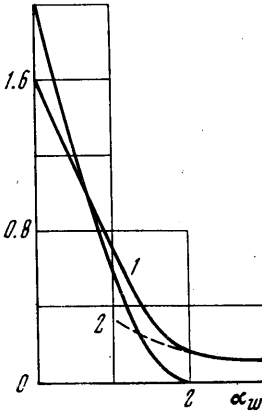
$$\beta_w = \beta_e^* \left[ 1 + \frac{k}{2\sqrt{\beta_e^*}} \left( \Lambda_w - \frac{1 - \sqrt{\beta_e^*}}{1 + \sqrt{\beta_e^*}} \right) \right]^2 \quad (2.11)$$

Отличие полученных выше асимптотических формул для отхода ударной волны, положения линии растекания и трения от аналогичных, полученных в работе [1] состоит в том, что формулы (2.11) позволяют установить влияние вдува на распределение давления. Поэтому зависимость перечисленных выше параметров от вдува получается несколько иной, чем в [1]. Формулы [1] получаются из (2.6), (2.8), (2.9) и (2.10), если пренебречь в выражениях для касательной скорости членами порядка  $k$ , а значение параметра  $\beta_e^*$  относить к заданному распределению давления на поверхности тела.

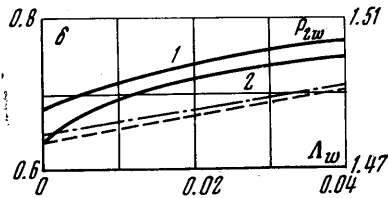
3. Уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) решались численно на ЭЦВМ аналогично [5].

Коэффициенты вязкости и теплопроводности определялись степенной зависимостью от температуры с показателями 0.65.

Для всех расчетов принималось  $\gamma = 1.266$ . Численные расчеты были проведены для чисел Рейнольдса в набегающем потоке  $\epsilon_{\infty}^{-2} = \rho_{\infty} * V_{\infty} R / \mu_{\infty} * = 0.339 \cdot 10^5$ ,  $0.451 \cdot 10^5$ ,  $0.135 \cdot 10^6$ ; чисел Маха:  $M_{\infty} = 19.6$ ,  $26.1$ ;  $\theta_w = 0.05, 0.1$ ;  $-\varphi_w = 0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.125, 0.150, 0.2, 0.3, 0.4$ . На фиг. 1 сплошными линиями 1, 2 представлены результаты численных расчетов  $\delta^{-1} \epsilon_0 u'(0)$  и  $\delta^{-1} \epsilon_0 \theta'(0)$  соответственно в зависимости от параметра вдува  $\alpha_w = -\varphi_w \epsilon_0^{-1}$  ( $\epsilon_0^2 = \delta \epsilon^2$ ), для  $\epsilon_{\infty}^{-2} = 0.451 \cdot 10^5$ ,  $M_{\infty} = 26.1$  и  $\theta_w = 0.05$ .



Фиг. 1

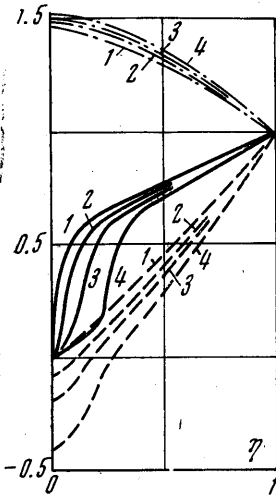


Фиг. 2

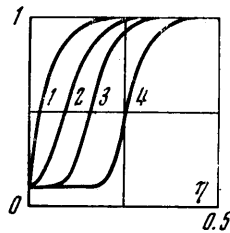
Пунктирные кривые соответствуют значениям перечисленных выше величин, подсчитанных по асимптотическим формулам (2.7), (2.11).

На фиг. 2 сплошными линиями 1, 2 представлены результаты численных расчетов  $\delta$  и  $P_{2w} = \beta_w / \beta_e$  в зависимости от  $\Lambda_w$  для тех же параметров набегающего потока и температуры стенки. Пунктирная кривая соответствует значениям  $\delta$ , штрихпунктирная —  $P_{2w}$ , подсчитанным по асимптотическим формулам (2.11).

Из фиг. 1 следует, что с увеличением вдува уменьшается влияние вязкого члена в уравнении импульсов на напряжение трения и становится пренебрежимо мало при  $\alpha_w \geq 2$ . Там же видно, что при таких значениях параметра вдува тепловой поток практически равен нулю. Из фиг. 2 следует, что распределение давления на стенке может быть определено из идеального течения практически для всех значе-



Фиг. 3



Фиг. 4

ний параметра вдува. Ошибка в определении отхода ударной волны по формулам (2.11) не превышает 7% для всех рассчитанных вариантов.

На фиг. 3 и 4 сплошными линиями 1-4 представлены профили  $u$  (фиг. 3) и  $\theta$  (фиг. 4), пунктирными —  $\varphi$ , штрихпунктирными —  $P_2 = \beta_e^{-1} p_2$  поперек слоя для  $\epsilon_{\infty}^{-2} = 0.339 \cdot 10^4$ ,  $M_{\infty} = 19.6$ ,  $\theta_w = 0.1$  и  $-\varphi_w = 0, 0.1, 0.2$  и  $0.4$  соответственно. Из фигур видно, что с ростом вдува пограничный слой вначале разбухает, а затем, начиная с  $-\varphi_w > 0.1$ , что соответствует значениям  $\alpha_w \geq 2$ , отходит от стенки.

Аналогичные результаты наблюдались во всех рассчитанных вариантах. Таким образом, определение большого вдува, сформулированное в работе [1] не нарушается для представленной выше задачи.

Поступила 16 X 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Гирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
2. Филимонов В. Н. Асимптотическое решение уравнений несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
3. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
4. Гершбейн Э. А. Об автомодельных численных и асимптотических решениях уравнений пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
5. Данилин Г. А. Асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса для течения сжимаемой жидкости в плоском канале при интенсивном вдуве со стенок. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
6. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.

УДК 533.6.011.5

### О ПРИБЛИЖЕННОМ РАСЧЕТЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ

В. Д. ПРИХОДЬКО, А. М. СИЗОВ

(Волгоград, Ленинград)

Рассматривается приближенный способ расчета параметров составной воздушной струи, истекающей из четырех сопел при малой степени нерасчетности, но достаточной для того, чтобы взаимодействие отдельных струй произошло на начальном газодинамическом участке.

Исследование проводится для случая истечения струй в затопленное пространство, при докритических режимах течения, т. е. когда интерференционная ударная волна является присоединенной.

Предлагается схема расчета коэффициента потерь полного давления при движении газа через ударные волны, образующиеся при взаимодействии струй, и затем рассчитывается распределение чисел Маха на оси составной струи.

При сравнении данных экспериментов с результатами расчетов получено удовлетворительное совпадение.

В работе [1] на основании экспериментального изучения составных струй показано, что область взаимодействия такой струи можно разделить на два участка: участок начального формирования течения, для которого существенно влияние начальных параметров соплового блока, и участок автомодельного течения.

Для первого участка на основании анализа экспериментальных данных распределение чисел Маха вдоль оси составной струи можно принять линейным, для автомодельного участка имеют место равенства [1]

$$f(M_+) = \xi^{-1} f(M_-), \quad \xi = p_0'' / p_0$$

$$f(M) = \left[ \frac{(k+1)M^2}{(k-1)M^2 + 2} \right]^{k/(k-1)} \left( \frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{-1/(k-1)} \quad (1)$$

где  $M_+$ ,  $M_-$  — числа Маха на оси составной струи и на оси, эквивалентной ей по расходу одиночной струи;  $\xi$  — отношение давления торможения на оси составной струи к давлению торможения на срезе сопла;  $f(M)$  — функция числа Маха, определяющая отношение давлений торможения за прямым скачком уплотнения и до скачка.