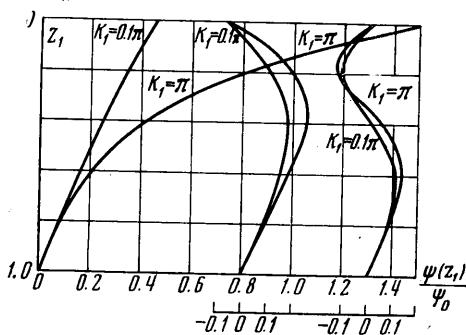


Результаты численного определения собственных частот и функций тока  $\psi$  на ЭВМ «Урал-2» методом Адамса приведены на фиг. 5, 6, причем графики частоты для экспоненциального закона распределения плотности совпадают с результатами расчетов по точным формулам (12), (13). В предельном случае однородной жидкости графики фиг. 5 совпадают с результатами расчетов по соответствующим точным формулам (см., например, [1]). Из результатов расчета видно также, что неоднородность жидкости относительно мало влияет на частоту колебаний в первой форме. Высшие формы колебаний жидкости возможны при всех значениях параметра  $k_1$ , если только жидкость становится неоднородной. Увеличение степени неоднородности ведет к увеличению частот внутренних волн. Частоты, соответствующие высшим формам колебаний, быстро убывают, и поэтому на фиг. 5, 6 приведены значения, соответствующие первым двум — трем частотам. Относительные значения функции тока, приведенные на фиг. 6 (для  $\rho = 1.0 - 1.5 \sin \pi z_1 / 2$ ) определяют форму колебаний жидкости



Фиг. 6

с точностью до постоянного множителя. Очевидно, при колебаниях жидкости в высших формах, как и в случае слоистой жидкости, имеют место внутренние волны. Однако здесь вследствие незначительной частоты и трудностей визуализации экспериментально получить внутренние волны затруднительно.

Поступила 7 II 1969

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
2. Краус В. Внутренние волны. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
3. Yih C.—S. Dynamics of nonhomogeneous fluids. Macmillan, 1965.
4. Гонтькевич В. С., Ищенко Л. А. Собственные колебания жидкости в сферическом сосуде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.

УДК 532.501.32

## О СВЯЗЯХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

З. Ф. КАРПЫЧЕВА

(Москва)

В статье устанавливается связь между автомодельными решениями двух одномерных потоков — прямолинейно-параллельного и плоскорадиального, а также характеристическими функциями для этих потоков [1].

Основные автомодельные задачи теории упругого режима обладают геометрической симметрией.

Решение автомодельных задач связано с переводом дифференциального уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение. Такой перевод достигается различными приемами: либо с помощью теории размерностей [1, 2], либо с помощью теории групп [3], либо подбором автомодельной переменной [4, 5].

Полное исследование автомодельного решения для уравнения пьезоупругости

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (1)$$

было проведено в работе [5]. Уравнение (1) встречается также в теории турбулентности, в динамике вязкой жидкости, в термодинамике пластовых систем.

Согласно [3] решением обыкновенного дифференциального уравнения в этом случае является вырожденная гипергеометрическая функция  $\Psi$ .

В работе [4], в частности, было показано, что для построения автомодельных решений уравнения (1) используются функции

$$\chi_n = i^n \operatorname{erfc}(\xi / 2\sqrt{\tau}) \quad (\alpha = 0) \quad (2)$$

$$\Phi_n = \tau^n J^n[-E_i(-\xi^2 / 4\tau)] \quad (\alpha = 1) \quad (3)$$

В работе [6] автомодельные решения для уравнения (1) строились с помощью некоторых операторов  $D_{\xi^2}^{\alpha/2}$  (при  $0 < \alpha \leq 2$ ).

В результате было установлено, что если за автомодельное решение дифференциального уравнения (1) для прямолинейно-параллельного потока ( $\alpha = 0$ )

$$\frac{\partial^2 P_{-\alpha/2}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial P_{-\alpha/2}}{\partial \tau} \quad (4)$$

взять [7]

$$P_{-\alpha/2} = A^* \tau^{n/2} i^n \operatorname{erfc}(\xi / 2\sqrt{\tau}) \quad (A^* = A / \kappa^{n/2}) \quad (5)$$

где  $A$  — постоянная, имеющая размерность, то автомодельное решение (1) можно записать в виде

$$P = \frac{A^*}{2^{n+\alpha} \sqrt{\pi}} \tau^{(n-\alpha/2)} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(n+1), 1/2(\alpha+1); \xi^2/4\tau) \quad (6)$$

Проанализируем формулу (6). Если в (6) положим  $\alpha = 0$ , то получим решение уравнения (4) в виде

$$P = \frac{A^* \tau^{n/2}}{2^n \sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(n+1), 1/2; \xi^2/4\tau) \quad (7)$$

Согласно работам [4, 8] имеем

$$i^n \operatorname{erfc}(\xi/2\sqrt{\tau}) = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(n+1), 1/2; \xi^2/4\tau) \quad (8)$$

Соотношение (8) можно получить исходя из результатов работы [9], если воспользоваться связью между функциями Уиттекера  $W_{\mu,\nu}$  и вырожденной гипергеометрической функцией и исправить имеющиеся там неточности.

Если воспользоваться (8), то (7) совпадает с (5). Таким образом из (6) при  $\alpha = 0$  получаем известное автомодельное решение для дифференциального уравнения прямолинейно-параллельного потока.

Пусть  $\alpha = 1$ , что соответствует плоскорадиальному потоку, тогда из (6) имеем

$$P = \frac{A^*}{2^{n+1} \sqrt{\pi}} \tau^{(n-1)/2} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(n-1)+1, 1; \xi^2/4\tau) \quad (9)$$

Нетрудно показать, что

$$\tau^{(n-1)/2} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(n-1)+1, 1; \xi^2/4\tau) = J^{1/2(n-1)}[-E_i(-\xi^2/4\tau)] \quad (10)$$

Если  $n = 2m + 1$  нечетное, тогда из (10) находим

$$\tau^m \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(m+1, 1; \xi^2/4\tau) = J^m[-E_i(-\xi^2/4\tau)] \quad (11)$$

$$P = \frac{A^*}{2^{2(m+1)} \sqrt{\pi}} J^m[-E_i(-\xi^2/4\tau)] \quad (12)$$

Если  $n = 2m$  четное, тогда из (10) получаем

$$\tau^{(2m-1)/2} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(2m-1)+1, 1; \xi^2/4\tau) = J^{m-1/2}[-E_i(-\xi^2/4\tau)] \quad (13)$$

$$P = \frac{A^*}{2^{2m+1} \sqrt{\pi}} J^{m-1/2}[-E_i(-\xi^2/4\tau)] \quad (14)$$

Следовательно, из (6) при  $\alpha = 1$  получаем автомодельное решение для дифференциального уравнения плоскорадиального потока. Когда  $n = 2m + 1$  нечетное число, это решение выражается через повторные интегралы от интегральной показательной функции  $[-E_i(-\xi^2/4\tau)]$ , что подтверждает результаты работ [4, 8].

В случае же, когда  $n = 2m$  четное, решение выражается через кратные интегралы нецелого порядка от функции  $[-E_i(-\xi^2/4\tau)]$  [10, 11].

Пусть теперь  $\alpha = 2$ ; этот случай соответствует сферическому радиальному потоку. Тогда из (6) находим

$$P = \frac{A^*}{2^{n+2} \sqrt{\pi}} \tau^{n/2-1} \exp(-\xi^2/4\tau) \Psi(1/2(n+1), 1/2+1; \xi^2/4\tau) \quad (15)$$

Чтобы расшифровать формулу (15), воспользуемся известным соотношением [12, 13]

$$i^n \operatorname{erfc} w = \int_w^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} \xi d\xi \quad (16)$$

Продифференцируем (16) по  $w$

$$\frac{d}{dw} \{i^n \operatorname{erfc} w\} = -i^{n-1} \operatorname{erfc} w \quad (w = (\xi^2/4\tau)^{1/2}) \quad (17)$$

Согласно формуле (8) кратные интегралы от дополнительной функции ошибок выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию  $\Psi$ , для которой имеет место следующее соотношение [14]:

$$\frac{d}{dw^2} \{\exp(-w^2) \Psi(a, c; w^2)\} = \exp(-w^2) \Psi(a, c+1; w^2) \quad (18)$$

Тогда на основании (18), (17) и (8) соотношение (15) можно записать в виде

$$P = \frac{A^*}{4\xi} \tau^{(n-1)/2} i^{n-1} \operatorname{erfc}(\xi/2 \sqrt{\tau}) \quad (19)$$

Исходя из (19), можно заключить, что в случае сферического радиального потока ( $\alpha = 2$ ) автомодельное решение также выражается через характеристические функции прямолинейно-параллельного потока (2), что совпадает с результатами работы [4].

Проведенный выше анализ позволяет установить некоторую связь между характеристическими функциями двух одномерных потоков — прямолинейно-параллельного и плоскорадиального.

Пусть автомодельным решением уравнения (4) служит (5), тогда, применяя оператор  $D_{\xi^2, (\infty)}^{\alpha/2}$  [15] к (5) и используя формулы (12), (14), имеем

$$J^k[-E_i(-\xi^2/4\tau)] = -2^{2k+2} \tau^{k+1/2} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^\infty i^{2k+1} \operatorname{erfc}(u/4\tau) (u^2 - \xi^2)^{-1/2} u du \quad (20)$$

Из формул (3), (20) находим

$$\varphi_k(\xi^2/4\tau) = -2^{2k+2} \sqrt{\pi\tau} D_{\xi^2, (\infty)}^{1/2} \{\chi_{2k+1}(\xi/2 \sqrt{\tau})\} \quad (21)$$

Из формулы (21) следует, что характеристические функции плоскорадиального потока  $\varphi_k$  с точностью до множителя есть производные порядка  $1/2$  от характеристических функций прямолинейно-параллельного потока  $\chi_{2k+1}$ .

Пусть теперь автомодельным решением уравнения пьезопроводности (1) при  $\alpha = 1$  служат (12), (14), тогда, применяя оператор  $D_{\xi^2, (\infty)}^{-1/2}$  [15] к (12), (14) и используя формулу (5), имеем

$$i^{2k+1} \operatorname{erfc}(\xi/2 \sqrt{\tau}) = \frac{1}{2^{2k+1} \pi \tau^{k+1}} \int_{\xi}^\infty J^k[-E_i(-u^2/4\tau)] (u^2 - \xi^2)^{-1/2} u du \quad (22)$$

На основании (2), (3), (22) находим

$$\chi_{2k+1}(\xi/2 \sqrt{\tau}) = \frac{1}{2^{2m+2} \sqrt{\pi\tau}} D_{\xi^2, (\infty)}^{-1/2} \{\varphi_k(\xi^2/4\tau)\} \quad (23)$$

В формулах (20)–(23)  $k = m$ , и  $m - 1/2$ .

Следовательно, из формулы (23) можем заключить, что характеристические функции прямолинейно-параллельного потока являются с точностью до множителя интегралами порядка  $1/2$  от характеристических функций плоскорадиального потока.

На основании вышеприведенного анализа можно сделать следующий вывод: характеристические функции двух одномерных потоков, а следовательно, и авто-модельные решения связаны между собой с помощью операторов  $D_{\xi^2, (\infty)}^{\pm 1/2}$ .

Поступила 16 IX 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
2. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. П. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 1.
3. Биркгоф Г. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Щелкачев В. Н. Обобщение формы решений простейших основных задач теории нестационарного поля фильтрационных потоков. Тр. МИНХ и ГП., вып. 66, М., «Недра», 1967.
5. Щелкачев В. Н. Обобщение решения уравнения одномерных нестационарных потоков в многомерном пространстве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
6. Карпычева З. Ф. Об одном свойстве простых решений дифференциального уравнения нестационарных фильтрационных потоков. Изв. вузов, Нефть и газ, 1971, № 8.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
8. Беркун В. А. К решению некоторых осесимметричных задач нестационарной фильтрации. Тр. Укр. НИИ-газа, 1969, вып. 3(7).
9. Белов В. Н. О некоторых свойствах интегральных функций, характеризующих решение основных задач теории нестационарного поля. Сб. «Подземная гидродинамика», М., «Недра», 1971.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 2. М., «Наука», 1970.
11. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
12. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
13. Hartree D. R. Some properties and applications of repeated integrals of the error function. Mem. and Proc. Manchester Literary and Philos. Soc., 1935, vol. 80, pp. 85—102.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I. М., «Наука», 1965.
15. Ростовцев Н. А. Замечание к работе В. С. Губенко «Некоторые контактные задачи теории упругости и дробное дифференцирование». ПММ, 1959, т. 27, вып. 4.

УДК 532.51:518.5

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОПУШКЕ

Г. А. АТАНОВ

(Донецк)

Численный метод характеристик с фиксированным шагом по времени применен для исследования сверхзвукового течения в гидропушке. Течение описывается уравнениями газовой динамики в квазиодномерной постановке. Приведены некоторые результаты расчета, указаны особенности течения, в частности возникновение отколов. Показано, что для достижения определенной скорости истечения необходимы меньшие значения давлений по сравнению со стационарным истечением.

1. Гидропушка, схематически изображенная на фиг. 1, реализует инерционный принцип разгона [1]. Предварительно разгоняясь под действием сжатого газа, поршень 1 вгоняет воду 2 в сужающееся сопло 3, из которого выкачан воздух. При достижении водой сечения среза сопла начинается ее истечение.

Плавное изменение площади сечения сопла  $F(x)$  позволяет рассматривать осесимметричное течение в квазиодномерном приближении [2].