

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДАХ

В. С. ГОНТКЕВИЧ

(Харьков)

Исследованы собственные колебания стратифицированной жидкости в прямоугольном сосуде. В качестве предельного случая стратификации рассматриваются колебания идеальной несжимаемой жидкости, разделенной на слои различной плотности. Получено частотное уравнение для произвольного закона распределения плотности уравнение колебаний решается численно на ЭВМ. Результаты расчета для синусоидального закона распределения плотности сравниваются с данными для экспоненциального закона, когда имеется точное решение.

Стратификация бесконечной жидкости в естественных условиях рассматривается в работах [1-3]. Предельным случаем служит система, состоящая из слоев различной плотности, когда необходимо решать задачу о колебаниях слоев однородной жидкости. Для бесконечной жидкости задача рассмотрена в работе [1].

Решение уравнения

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

в обозначениях, приведенных на фиг. 1, для любого слоя, за исключением нижнего, имеет вид

$$\varphi_{n-j} = (A_{n-j} \operatorname{ch} kz + B_{n-j} \operatorname{sh} kz) X(x) e^{i\omega t} \quad (1)$$

Для нижнего слоя из условия на дне $\partial\varphi/\partial z = 0$ имеем

$$\varphi_0 = A_0 \operatorname{ch} kz X(x) e^{i\omega t}$$

В случае плоских колебаний

$$X(x) = \frac{\sin}{\cos} kx, \quad k = \frac{m\pi}{2l} \quad (2)$$

Используя условия непрерывности давления на поверхности раздела

$$\rho_{n-j} \left(\frac{\partial\varphi_{n-j}}{\partial t} - g\eta_{n-j} \right) = \rho_{n-j-1} \left(\frac{\partial\varphi_{n-j-1}}{\partial t} - g\eta_{n-j} \right) \quad (3)$$

и кинематические условия на поверхностях раздела

$$-\frac{\partial\varphi_{n-j}}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_{n-j-1}}{\partial z} = \frac{\partial\eta_{n-j}}{\partial t} \quad (4)$$

где η_{n-j} — отклонение поверхности раздела с номером $n-j$ от равновесного состояния

$$\eta_{n-j} = a_{n-j} \frac{\sin}{\cos} kx e^{i\omega t}$$

а также условие на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2} = -g \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} \quad (5)$$

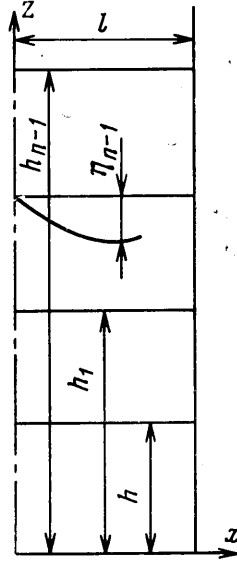
получаем частотное уравнение в виде

$$|c_{ik}| = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2n-2) \quad (6)$$

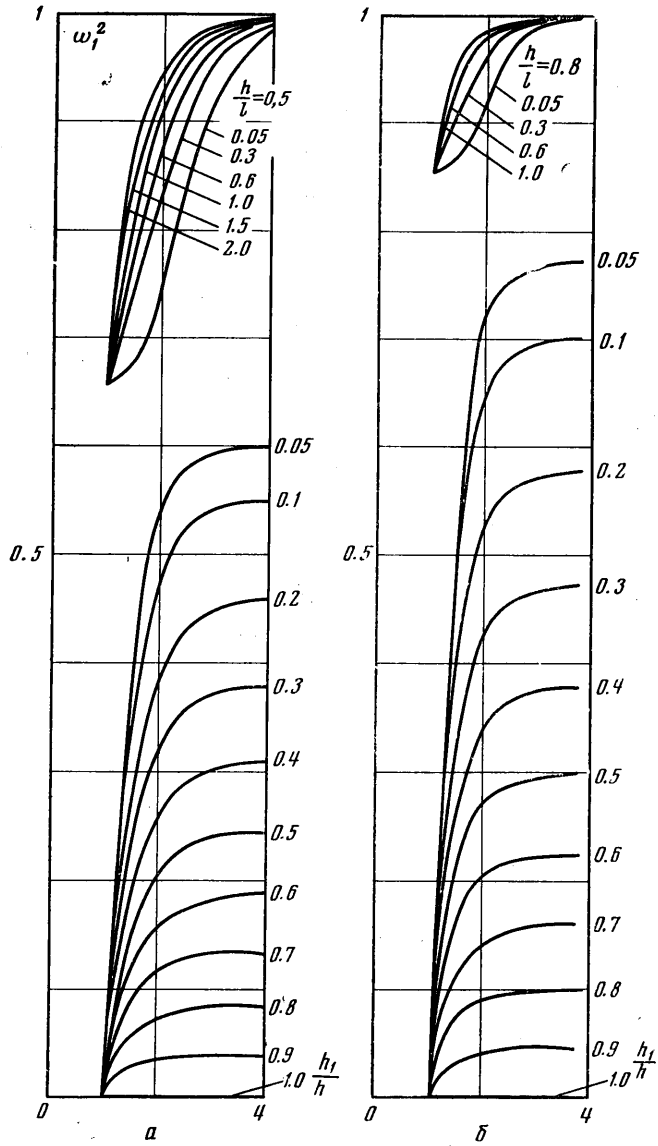
Элементы частотного определителя

$$c_{11} = -\omega_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \operatorname{cth} kh + 1 - \frac{\rho_1}{\rho},$$

$$c_{12} = -\omega_1^2 \operatorname{cth}^2 kh + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \operatorname{cth} kh + \omega_1^2 \frac{\rho_1}{\rho}, \quad c_{1j} = 0, \quad (j = 3, 4, \dots, 2n-2),$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$c_{21} = -\omega_1^2 \operatorname{cth} kh_1, \quad c_{22} = -\omega_1^2, \quad c_{23} = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} + \omega_1^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{cth} kh_1$$

$$c_{24} = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{cth} kh_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega_1^2, \quad c_{2j} = 0 \quad (j = 5, 6, \dots, 2n-2)$$

$$c_{31} = 1, \quad c_{32} = \operatorname{cth} kh_1, \quad c_{33} = -1, \quad c_{34} = -\operatorname{cth} kh_1$$

$$c_{3j} = 0, \quad j = 5, 6, \dots, 2n-2, \quad c_{j, 2n-6} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, 2n-6)$$

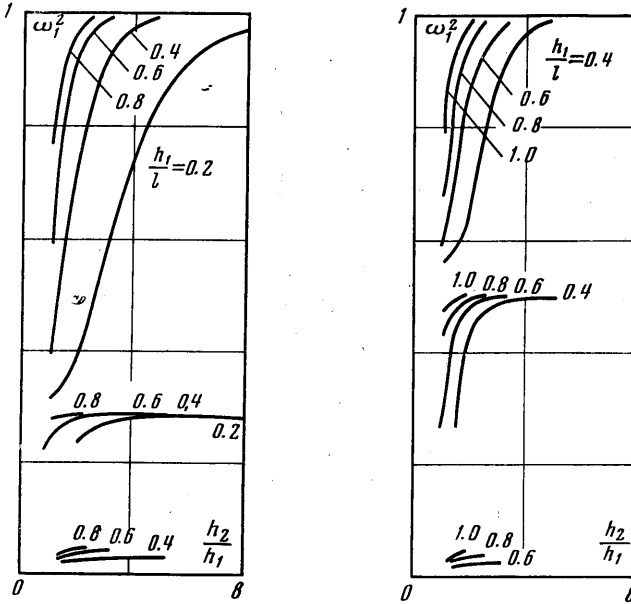
$$c_{2n-5, 2n-4} = -\omega_1^2 \operatorname{cth} kh_{n-2}, \quad c_{2n-4, 2n-4} = -\omega_1^2$$

$$c_{2n-3, 2n-4} = 1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} + \omega_1^2 \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} \operatorname{cth} kh_{n-2}$$

$$c_{2n-2, 2n-4} = -\frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} \operatorname{cth} kh_{n-2} + \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} \omega_1^2$$

$$\begin{aligned}
 c_{j, 2n-3} &= 0 & (j = 1, 2, \dots, 2n-6) \\
 c_{2n-5, 2n-3} &= 1, & c_{2n-4, 2n-3} = \operatorname{cth} kh_{n-2}, & c_{2n-3, 2n-3} = -1 \\
 c_{2n-2, 2n-3} &= -\operatorname{cth} kh_{n-2}, & c_{j, 2n-2} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n-4) \\
 c_{2n-3, 2n-2} &= \omega_1^2 \operatorname{cth} kh_1 - 1, & c_{2n-2, 2n-2} &= \omega_1^2 - \operatorname{cth} kh_1.
 \end{aligned}$$

В случае, когда справедливо приближение мелкой воды, в этом определителе целесообразно избавиться от величин, содержащих $\operatorname{th} kh_i$ в знаменателе, путем



Фиг. 3

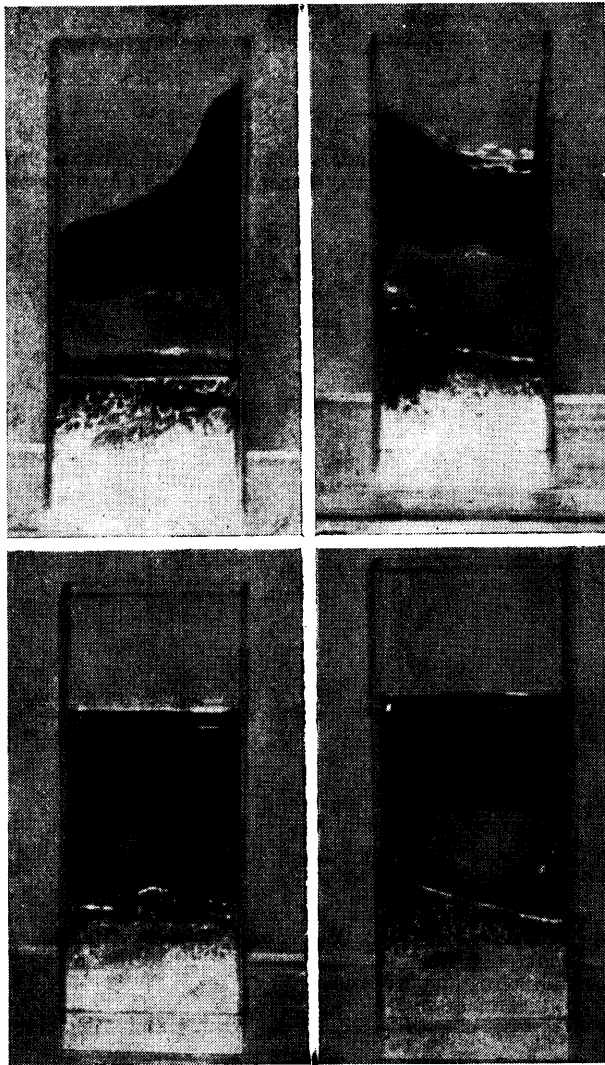
умножения строчек определителя на $\operatorname{th}^2 kh_i$. Здесь $\omega_i^2 = \sigma^2 / gk$, ρ_i — плотность жидкости в слое с номером $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, h_i — толщина i -го слоя. Другие обозначения приведены на фиг. 1.

В случае трехслойной жидкости имеем

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \omega_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \operatorname{cth} kh + 1 - \frac{\rho_1}{\rho}, \\
 c_{12} &= -\omega_1^2 \operatorname{cth}^2 kh + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \operatorname{cth} kh + \omega_1^2 \frac{\rho_1}{\rho}, & c_{13} &= c_{14} = 0 \\
 c_{21} &= -\omega_1^2 \operatorname{cth} kh_1, & c_{22} &= -\omega_1^2 \\
 c_{23} &= 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} + \omega_1^2 \frac{\rho_2}{\rho} \operatorname{cth} kh_1, & c_{24} &= 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{cth} kh_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega_1^2 \\
 c_{31} &= 1, & c_{32} &= \operatorname{cth} kh_1, & c_{33} &= -1, & c_{34} &= -\operatorname{cth} kh_1 \\
 c_{41} &= c_{42} = 0, & c_{43} &= \omega_1^2 \operatorname{cth} kh_2 - 1, & c_{44} &= \omega_1^2 - \operatorname{cth} kh_2
 \end{aligned} \tag{7}$$

Для двухслойной жидкости имеем

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \omega_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \operatorname{cth} kh + 1 - \frac{\rho_1}{\rho}, \\
 c_{12} &= -\omega_1^2 \operatorname{cth}^2 kh + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \operatorname{cth} kh + \omega_1^2 \frac{\rho_1}{\rho}, & c_{21} &= \omega_1^2 \operatorname{cth} kh_1 - 1 \\
 c_{22} &= -\operatorname{cth} kh_1 + \omega_1^2
 \end{aligned} \tag{8}$$



Фиг. 4

Отсюда

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a+b}{1+abc} \pm \left[\left(\frac{a+b}{1+abc} \right)^2 - 4 \frac{(1-c)ab}{1+abc} \right]^{1/2} \right\}$$

$$a = \text{th } kh, \quad b = \text{th } (h_1 - h)k, \quad c = \rho_1 / \rho \quad (9)$$

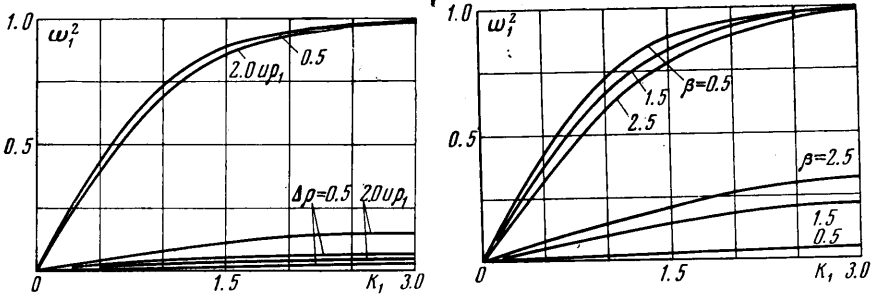
причем для глубокой воды

$$\omega_1^2 = \frac{1}{1+c} \pm \left[\frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1-c}{1+c} \right]^{1/2} \quad (10)$$

По формулам (9), (10) определяются частоты собственных колебаний свободной поверхности и поверхности раздела слоев. Зависимость частот собственных колебаний жидкости от соотношения плотностей и геометрических размеров слоев исследована при помощи ЭВМ «Урал-2». Некоторые результаты этих расчетов приведены на фиг. 2 для двухслойной жидкости и на фиг. 3 для трехслойной. Из этих данных можно видеть, например, что по мере увеличения глубины жидкости влияние изменения отношения плотности слоев увеличивается. Для случая, приведен-

ного на фиг. 3, а, $\rho_1 / \rho = 0.075$; $\rho_0 / \rho_1 = 0.9$, $h / l = 0.2$, фиг. 3, б — $\rho_1 / \rho = 0.075$, $\rho_2 / \rho_1 = 0.9$, $h / l = 0.4$.

При помощи установки, упомянутой в работе [4], частоты и формы собственных колебаний слоистой жидкости были исследованы экспериментально. В качестве исследуемых жидкостей были использованы ртуть, вода и трансформаторное масло. Совпадение теоретических и экспериментальных значений частот является удовлетворительным (см. [4]). На фиг. 4 приведены фотографии некоторых форм колебаний свободной поверхности и поверхностей раздела слоев, в частности форм колебаний, для которых свободная поверхность жидкости остается неподвижной.



Фиг. 5

Когда плотность жидкости менялась с глубиной непрерывно, уравнение колебаний получено в работе [1]. В безразмерных координатах уравнение колебаний жидкости имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dz_1^2} - k_1^2\psi + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz_1} \left(\frac{d\psi}{dz_1} - \frac{k_1}{\omega_1^2} \psi \right) = 0, \quad z_1 = \frac{z}{h}, \quad k_1 = \frac{n\pi h}{l} \quad (11)$$

Краевые условия

$$\frac{d\psi}{dz_1} = \frac{k_1}{\omega_1^2} \psi \quad (z_1 = 0), \quad \psi = 0 \quad (z_1 = -1)$$

Простейшим законом стратификации, допускающим аналитическое решение, будет закон $\rho = \rho_0 e^{-\beta z_1}$. Этот случай для бесконечной жидкости рассмотрен в работе [1]. Для первой формы колебаний имеем

$$\psi = ce^{1/2\beta z_1} \text{sh } m(z_1 + 1) \frac{\sin k_1 x}{\cos k_1 x}$$

частотное уравнение имеет вид

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 \text{th } m}{m + 1/2\beta \text{th } m}, \quad m = \left\{ \frac{1}{4} \beta^2 - k_1 \left(\frac{1}{\omega_1^2} \beta - k_1 \right) \right\}^{1/2} \quad (12)$$

Для высших форм

$$\psi = ce^{1/2\beta z_1} \sin m(z_1 + 1) \frac{\sin k_1 x}{\cos k_1 x}$$

частотное уравнение

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 \text{tg } m}{m + 1/2\beta \text{tg } m}, \quad m = \left\{ k_1 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - k_1 \right) - \frac{1}{4} \beta^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

В реальных случаях закон стратификации жидкости приходится определять эмпирически, как, например, закон стратификации некоторых районов мирового океана в [2] и т. п. В данной работе уравнение колебаний интегрируется численно, и поэтому закон стратификации $\rho(z)$ предполагается произвольным.

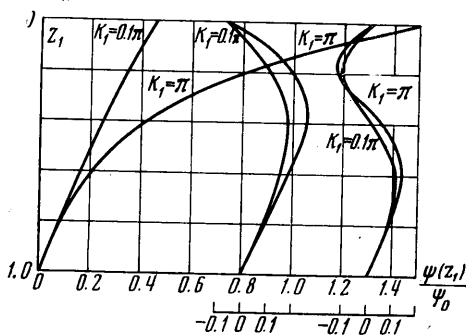
В дальнейшем рассмотрено два закона: закон $\rho = \rho_0 e^{-\beta z_1}$ для контроля точности численного интегрирования и закон

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho \sin \pi z / 2h$$

который имеет место при стратификации суспензий. Например, для глинистого раствора

$$\rho_0 \approx 1.2, \quad \Delta\rho \approx 2.3$$

Результаты численного определения собственных частот и функций тока ψ на ЭВМ «Урал-2» методом Адамса приведены на фиг. 5, 6, причем графики частоты для экспоненциального закона распределения плотности совпадают с результатами расчетов по точным формулам (12), (13). В предельном случае однородной жидкости графики фиг. 5 совпадают с результатами расчетов по соответствующим точным формулам (см., например, [1]). Из результатов расчета видно также, что неоднородность жидкости относительно мало влияет на частоту колебаний в первой форме. Высшие формы колебаний жидкости возможны при всех значениях параметра k_1 , если только жидкость становится неоднородной. Увеличение степени неоднородности ведет к увеличению частот внутренних волн. Частоты, соответствующие высшим формам колебаний, быстро убывают, и поэтому на фиг. 5, 6 приведены значения функции тока, соответствующие первым двум — трем частотам. Относительные значения функции тока, приведенные на фиг. 6 (для $\rho = 1.0 - 1.5 \sin \pi z_1 / 2$) определяют форму колебаний жидкости



Фиг. 6

с точностью до постоянного множителя. Очевидно, при колебаниях жидкости в высших формах, как и в случае слоистой жидкости, имеют место внутренние волны. Однако здесь вследствие незначительной частоты и трудностей визуализации экспериментально получить внутренние волны затруднительно.

Поступила 7 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
2. Краус В. Внутренние волны. Л., Гидрометеиздат, 1968.
3. Yih C.—S. Dynamics of nonhomogeneous fluids. Macmillan, 1965.
4. Гонтькевич В. С., Ищенко Л. А. Собственные колебания жидкости в сферическом сосуде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.

УДК 532.501.32

О СВЯЗЯХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

З. Ф. КАРПЫЧЕВА

(Москва)

В статье устанавливается связь между автомодельными решениями двух одномерных потоков — прямолинейно-параллельного и плоскорадиального, а также характеристическими функциями для этих потоков [1].

Основные автомодельные задачи теории упругого режима обладают геометрической симметрией.

Решение автомодельных задач связано с переводом дифференциального уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение. Такой перевод достигается различными приемами: либо с помощью теории размерностей [1, 2], либо с помощью теории групп [3], либо подбором автомодельной переменной [4, 5].

Полное исследование автомодельного решения для уравнения пьезоупругости

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (1)$$

было проведено в работе [5]. Уравнение (1) встречается также в теории турбулентности, в динамике вязкой жидкости, в термодинамике пластовых систем.

Согласно [3] решением обыкновенного дифференциального уравнения в этом случае является вырожденная гипергеометрическая функция Ψ .