

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СФЕРЕ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

П. И. ЦОЙ

(Тула)

Обсуждается задача о дифракции сферических звуковых волн на сфере в вязкой среде. Применяя метод разделения переменных, были получены точные формулы для гидродинамических элементов поля в среде с малой вязкостью. Далее, применяя метод Морса [1, 2] и Ватсона [3] к точным формулам, определяются асимптотические формулы для тех же величин в случае распространения длинных и коротких волн.

1. Постановка задачи и ее решение. Пусть сферические звуковые волны с постоянной амплитудой, исходящие от точечного источника E , распространяются в вязкой среде и встречаются на своем пути проникаемую или пульсирующую сферу радиуса a , центр которой отстоит на расстоянии b от источника звука E . В случае установившегося движения (с временным множителем $e^{-\sigma t}$) задача об определении акустического поля вязкой среды приводится к решению двух уравнений Гельмгольца [4], удовлетворяющему граничным условиям на поверхности проникаемой или пульсирующей сферы в виде

$$v_r = U(\theta)e^{-\sigma t}, \quad v_\theta = V(\theta)e^{-\sigma t}, \quad v_\psi = 0 \quad (1.1)$$

где σ — частота колебаний, r, θ, ψ — сферические координаты, v_r, v_θ, v_ψ — проекции скорости точки на оси сферических координат.

Граничные условия (1.1) в сферических координатах примут вид [5]

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi) \right]_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n (2n+1) P_n(\cos \theta)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi) \right]_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n (2n+1) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \quad (1.2)$$

где U_n, V_n — коэффициенты разложения $U(\theta)$ и $V(\theta)$ в ряды по функциям Лежандра [6], т. е.

$$U(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n (2n+1) P_n(\cos \theta)$$

$$V(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n (2n+1) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \quad (1.3)$$

$$U_n = -\frac{1}{2} \int_0^\pi U(\theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

$$V_n = \frac{1}{2n(n+1)} \int_0^\pi V(\theta) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta}$$

где $P_n(\cos \theta)$ — функция Лежандра первого рода n -го порядка.
Будем искать решение первого из уравнений [4] в виде

$$\varphi = A \frac{e^{-ik_1 r'}}{r'} + \chi \quad (1.4)$$

где первый член правой части формулы (1.4) представляет собой скалярный потенциал скоростей расходящихся сферических волн с амплитудой A в вязкой среде, а второй член — функция возмущения, вызванного отраженными сферическими волнами от поверхности сферы, A — постоянная величина, а r' — расстояние точки M наблюдения от источника E .

При помощи разложения [7] можно написать решение уравнений [4] с учетом (1.4) и временного множителя $e^{-\sigma t i}$ в виде

$$\varphi = Ai \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \psi_n(k_1 b) \zeta_n^{(2)}(k_1 r) P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i} +$$

$$+ i \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) \psi_n(k_1 b) \zeta_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i} \quad (r > b) \quad (1.5)$$

$$\Phi = i \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2n+1) \psi_n(k_2 b) \zeta_n(k_2 r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i}$$

$$\varphi = Ai \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n^{(2)}(k_1 b) \psi_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i} +$$

$$+ i \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) \zeta_n^{(2)}(k_1 b) \zeta_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i} \quad (b > r) \quad (1.6)$$

$$\Phi = i \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2n+1) \zeta_n^{(2)}(k_2 b) \zeta_n(k_2 r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i}$$

где $\zeta_n(z)$, $\zeta_n^{(2)}(z)$, $\psi_n(z)$ — первая и вторая сферические функции Ханкеля n -го порядка и сферическая бесселева функция первого рода n -го порядка, а A_n и B_n — постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий (1.2) в виде

$$A_n = -A \frac{n \zeta_{n-1}^{(2)}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}^{(2)}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)}{n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)} +$$

$$+ \frac{i[(n+1)(U_n - nV_n) \zeta_{n-1}(\omega_2) - n\{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_2)]}{k_1 \psi_n(k_1 b) [n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)]} \quad (r > b) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= A \frac{k_1 \psi_n(k_1 b) [\zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}^{(2)}(\omega_1) - \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}^{(2)}(\omega_1)]}{k_2 \psi_n(k_2 b) [n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)]} + \\
 &+ \frac{i[(U_n - nV_n) \zeta_{n-1}(\omega_1) + \{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_1)]}{k_2 \psi_n(k_2 b) [n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)]} \\
 A_n &= -A \frac{n \psi_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \psi_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)}{n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)} + \\
 &+ \frac{i[(n+1)(U_n - nV_n) \zeta_{n-1}(\omega_2) - n\{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_2)]}{k_1 \zeta_n^{(2)}(k_1 b) [n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)]} \quad (1.8) \\
 & \quad (b > r) \\
 B_n &= A \frac{k_1 \zeta_n^{(2)}(k_1 b) [\zeta_{n+1}(\omega_1) \psi_{n-1}(\omega_1) - \zeta_{n-1}(\omega_1) \psi_{n+1}(\omega_1)]}{k_2 \zeta_n^{(2)}(k_2 b) [n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)]} + \\
 &+ i \frac{(U_n - nV_n) \zeta_{n-1}(\omega_1) + \{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_1)}{k_2 \zeta_n^{(2)}(k_2 b) [n \zeta_{n-1}(\omega_1) \zeta_{n+1}(\omega_2) + (n+1) \zeta_{n+1}(\omega_1) \zeta_{n-1}(\omega_2)]}
 \end{aligned}$$

При написании формул (1.7) и (1.8) использовали и будем использовать в дальнейшем свойства сферических цилиндрических функций [8]. Таким образом, поставленная задача решена точными формулами (1.5) — (1.8).

Зная φ и Φ , находим давление и скорость точки (r, θ, ψ) в виде

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 + \rho_0 \sigma i (1 + v^* \sigma^{-1} k_1^2 i) \varphi \\
 v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi), \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Phi)}{\partial r} \\
 v_\psi &= 0
 \end{aligned} \quad (1.9)$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность среды в невозмущенном состоянии.

2. Случай малой вязкости. Метод Морса. Рассмотрим случай малой вязкости, т. е. когда $v', v, \sigma a^2$ (при конечном a). В этом случае

$$\begin{aligned}
 k_1' &= \frac{\sigma}{c}, \quad k_1'' = \frac{v^* \sigma^2}{2c^3}, \quad k_1 = \frac{\sigma}{c} e^{\epsilon i} = 1 + \frac{v^* \sigma}{2c^3} \\
 k_1' a &= \sigma a c^{-1} = \omega, \quad \exp(-k_1'' a) \gg \exp(-k_2'' a)
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тогда формулы (1.5) — (1.8) на основании (2.1) и свойства сферических цилиндрических функций [8] после несложного преобразования примут вид

$$\begin{aligned}
 \varphi &= A i e^{-\sigma t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \psi_n(k_1 b) \left[\zeta_n^{(2)}(k_1 r) - \frac{\zeta_n^{(2)' }(\omega_1)}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n(k_1 r) \right] P_n(\cos \theta) - \\
 &- \frac{e^{-\sigma t}}{k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) U_n}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) \quad (r > b) \\
 \Phi &= \frac{2A}{k_1^2 k_2 a^2 r} \exp \left[i \left\{ k_2 (r - a) - \sigma t + \frac{\pi}{2} \right\} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \psi_n(k_1 b)}{\zeta_n'(\omega_1)} \times
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) - \frac{a}{k_2 r} \exp \left[i \left\{ k_2(r-a) - \sigma t + \frac{\pi}{2} \right\} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n'(\omega_1)} \times \\
& \times [(U_n - nV_n) \zeta_{n-1}(\omega_1) + \{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_1)] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta). \\
& \zeta_n^{(j)'}(z) = \frac{d}{dz} \zeta_n^{(j)}(z) \quad (j = 1, 2) \\
\varphi = & \frac{Ai}{2} e^{-\sigma t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n^{(2)}(k_1 b) \left[\zeta_n^{(2)}(k_1 r) - \frac{\zeta_n^{(2)'}}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n(k_1 r) \right] \times \\
& \times P_n(\cos \theta) + \frac{k_2 ai}{k} e^{-\sigma t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) U_n \zeta_n(k_1 r)}{r'(\omega_1)} \exp \left(-\frac{\pi \pi i}{2} \right) P_n(\cos \theta) \\
& (b > r) \tag{2.3} \\
\Phi = & \frac{A}{k_1^2 k_2 a^2 r} \exp \left[i \left\{ k_2(r-a) - \sigma t + \frac{\pi}{2} \right\} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \zeta_n^{(2)}(k_1 b)}{\zeta_n'(\omega_1)} \times \\
& \times \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) - \frac{a}{k_2 r} \exp \left[i \left\{ k_2(r-a) - \sigma t + \frac{\pi}{2} \right\} \right] \times \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n'(\omega_1)} [(U_n - nV_n) \zeta_{n-1}(\omega_1) + \{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_1)] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\
& + \{U_n + (n+1)V_n\} \zeta_{n+1}(\omega_1) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta)
\end{aligned}$$

На больших расстояниях r от сферы (в дальней зоне поля) в силу (1.9) и (2.2) получим для давления и скорости рассеянной волны в точке (r, θ, ψ) следующие выражения:

$$\begin{aligned}
p_s = & \frac{\rho_0 c}{r} e^{-k_1' r} \exp \left\{ i \left(k_1' r - \sigma t - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \left[A e^{\varepsilon i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \zeta_n^{(2)'}}{\zeta_n'(\omega_1)} \times \right. \\
& \times \exp \left(-\frac{n \pi i}{2} \right) \psi_n(k_1 b) + \frac{a^2}{\omega} e^{-2\varepsilon i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) U_n}{\zeta_n'(\omega_1)} \exp \left(-\frac{n \pi i}{2} \right) \left. \right] P_n(\cos \theta) \\
& \tag{2.4} \\
v_{rs} = & \frac{1}{r} e^{-k_1' r} \exp \left\{ i \left(k_1' r - \sigma t - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \left[A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \zeta_n^{(2)'}}{\zeta_n'(\omega_1)} \times \right. \\
& \times \exp \left(-\frac{n \pi i}{2} \right) \psi_n(k_1 b) + \frac{a^2}{\omega} e^{-\varepsilon i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) U_n}{\zeta_n'(\omega_1)} \exp \left(-\frac{n \pi i}{2} \right) \left. \right] P_n(\cos \theta) \\
v_{\theta s} = & 0, \quad v_{\psi s} = 0
\end{aligned}$$

Здесь члены, удержанные в (2.4), имеют один и тот же порядок, между тем как отброшенные члены малы по сравнению с удержанными.

Далее, следуя Морсу [1, 2], применим, как в работе [4], обозначения

$$\zeta_n'(z) = i D_n^* e^{i \delta_n^*}, \quad \zeta_n^{(2)'}(z) = i X_n e^{i \chi_n}, \quad \psi_n(z_1) = Y_n e^{i \eta_n} \tag{2.5}$$

Предельные значения амплитуд D_n^* , X_n , Y_n и фазовых углов δ_n^* , κ_n , η_n определяются следующими приближенными формулами:

при $\omega = 2\pi a \lambda^{-1} \gg n + 1/2$

$$\begin{aligned} \bar{D}_n^* &= \omega^{-1} e^{-k_1'' a} = D_n e^{-k_1'' a}, & \delta_n^* &= \omega - \varepsilon_1 - 1/2(n+1)\pi = \delta_n - \varepsilon_1 \\ X_n &= \omega^{-1} e^{-k_1'' a} = D_n e^{-k_1'' a}, & \kappa_n &= -\omega - \varepsilon_1 + 1/2(n+1)\pi = -\delta_n - \varepsilon_1 \\ Y_n &= |z_1|^{-1} \text{ch}(\text{Im } z_1), & \eta_n &= -\{\text{Re } z_1 - 1/2(n+1)\pi\} - \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

при $\omega = 2\pi a \lambda^{-1} \ll n + 1/2$

$$\begin{aligned} \bar{D}_0^* &= \omega^{-2} = D_0, & \delta_0^* &= 1/3 \omega^3 \cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 = -\delta_0 \cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 \\ X_0 &= \omega^{-2} = D_0, & \kappa_0 &= -1/3 \omega^3 \cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 = -\delta_0 \cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$D_n^* = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(n+1)}{\omega^{n+2}} = D_n,$$

$$\begin{aligned} \delta_n^* &= -\frac{n\omega^{2n+1} \cos[(2n+1)\varepsilon_1]}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2 (2n+1)(n+1)} - (n+2)\varepsilon_1 = \\ &= \delta_n \cos[(2n+1)\varepsilon_1] - (n+2)\varepsilon_1 \quad (n \neq 0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} X_n &= D_n, & \kappa_n &= -\delta_n \cos[(2n+1)\varepsilon_1] - (n+2)\varepsilon_1 \quad (n \neq 0) \\ Y_n &= [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)]^{-1} |z_1|^n, & \eta_n &= n \arg z_1 \end{aligned}$$

где $|z_1|$ может принимать значение $|k_1 b|$, а D_n и δ_n , зависящие от ω , определяются из таблиц [1, 2].

Тогда формулы (2.4) на основании (2.5) примут вид

$$\begin{aligned} p_s &= A\rho_0 \sigma r^{-1} e^{-k_1'' r} \exp\{i(k_1' r - \sigma t + \pi + \varepsilon_1)\} F_r(\theta) + \\ &+ \rho_0 a c r^{-1} e^{-k_1'' r} \exp\{i(k_1' r - \sigma t)\} F_r(\theta) \end{aligned}$$

$$F_r(\theta) = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{D_n^*} X_n Y_n \exp\left\{i\left(\kappa_n - \delta_n^* + \eta_n - \frac{n\pi}{2}\right)\right\} P_n(\cos \theta) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} F_r(\theta) &= \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{D_n^*} U_n \exp\left\{-i\left(\delta_n^* + \frac{n\pi}{2}\right)\right\} P_n(\cos \theta) \\ v_{rs} &= A a \sigma c^{-1} r^{-1} e^{-k_1'' r} \exp\{i(k_1' r - \sigma t + \pi)\} F_r(\theta) + \\ &+ a r^{-1} e^{-k_1'' r} \exp\{i(k_1' r - \sigma t - \varepsilon_1)\} F_r(\theta) \end{aligned}$$

Далее, для интенсивности рассеянной волны в точке (r, θ, ψ) и полной рассеянной мощности в дальней зоне поля ($r \rightarrow \infty$) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{A^2 \rho_0 a^2 \sigma^2}{2cr^2} e^{-2k_1'' r} \cos \varepsilon_1 [F_r(\theta)]^2 + \frac{\rho_0 a^2 c}{2r^2} e^{-2k_1'' r} \cos \varepsilon_1 [F_r(\theta)]^2 \\ \Pi_s &= 2\pi A^2 \rho_0 c e^{-2k_1'' r} \cos \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{D_n^*{}^2} X_n^2 Y_n^2 + \\ &+ \frac{2\pi \rho_0 a^2 c}{\omega^2} e^{-2k_1'' r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{D_n^*{}^2} U_n^2 \cos \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

При очень низких частотах (для длинных волн) только волны, соответствующие $n = 0$ и $n = 1$, существенны для учета рассеянной волны. В этом случае интенсивность и полная мощность рассеянной волны в дальней зоне поля вязкой среды будут соответственно равны

$$I_s = \frac{A^2 \rho_0 c}{2r^2} e^{-2k_1' r} (1 - k_1' b \cos \theta)^2 + \frac{\rho_0 c^3}{2\sigma^2 r^2} U_0^2 e^{-2k_1' r} \left[1 - \frac{3U_1}{2U_0} \omega \cos \theta \right]^2$$

$$P_s = 2\pi A^2 \rho_0 c e^{-2k_1' r} \left(1 + \frac{k_1'^2 b^2}{3} \right) + 2\pi \rho_0 \sigma^{-2} c^3 U_0^2 e^{-2k_1' r} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{U_1}{U_0} \right)^2 \omega^2 \right], \quad \sin(\varepsilon_1 + \omega^3 \cos \varepsilon_1) \approx 1, \quad \cos \varepsilon_1 \approx 1 \quad (2.10)$$

При отсутствии вязкости ($\nu' = 0, \nu = 0$) формулы (2.10) примут вид

$$I_s = \frac{A^2 \rho_0 c}{2r^2} (1 - kb \cos \theta)^2 + \frac{\rho_0 c^3}{2\sigma^2 r^2} U_0^2 \left[1 - \frac{3U_1}{2U_0} \omega \cos \theta \right]^2$$

$$P_s = 2\pi A^2 \rho_0 c \left(1 + \frac{k^2 b^2}{3} \right) + 2\pi \rho_0 \sigma^{-2} c^3 U_0^2 \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{U_1}{U_0} \right)^2 \omega^2 \right] \quad (2.11)$$

Если длина волны очень мала по сравнению с радиусом сферы (для коротких волн), то при $\omega \gg 1$ потребуется большое число членов рядов (2.9), чтобы уяснить физическую картину поля рассеянной волны. Поэтому обсуждение результатов этого пункта для коротких волн будет рассмотрено другим методом.

Следует отметить, что если поверхность сферы одновременно является источником звуковых волн, то легко можно определить величины U_n [4] в следующем виде:

а) в случае равномерного излучения сферы

$$U_n = \begin{cases} U, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

б) в случае дипольного сферического источника

$$U_n = \begin{cases} 1/3 U, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

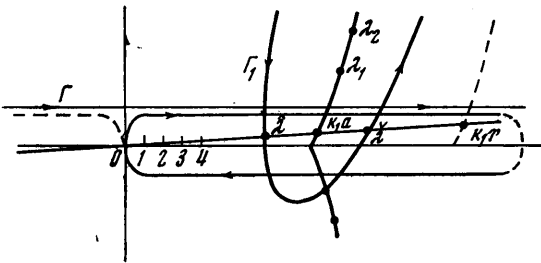
в) в случае излучения точечного источника, расположенного на поверхности сферы в полусе $\theta = 0$

$$U_n = 1/4 (\Delta / a)^2 U = \text{const} \quad (2.14)$$

г) в случае излучения поршня, расположенного на сфере

$$U_n = \frac{U}{2(2n+1)} [P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0)] \quad (2.15)$$

где θ_0 — малый угол.



Фиг. 1

е) в случае сложного сферического источника

$$U_n = 1/2 \int_0^\pi U(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.16)$$

3. Обсуждение результатов для коротких волн. В случае дифракции сферических звуковых волн (коротких) асимптотические формулы (2.8) — (2.10) не пригодны для выяснения физической картины поля рассеянной волны. Поэтому, когда $|\omega_1| \gg 1$, используем преобразование Ватсона [3].

Преобразование Ватсона заключается в том, что бесконечный ряд вида

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(\cos \theta) \quad (3.1)$$

преобразуется в интеграл

$$U = \frac{i}{2} \oint \frac{P_\lambda(-\cos \theta)}{\sin \lambda \pi} E_\lambda d\lambda \quad (3.2)$$

причем контур интегрирования по комплексной плоскости λ охватывает положительную вещественную ось, как показано на фиг. 1. Действительно, если величина E_λ не имеет полюсов на вещественной оси, то интеграл (3.2) в силу теоремы Коши равен сумме (3.1), так как множитель E_λ имеет в точках $\lambda = n$ (где n — целое) полюсы первого порядка с вычетами

$$\text{Res} \left\{ \frac{P_\lambda(-\cos \theta)}{\sin \lambda \pi} \right\} = \frac{P_n(-\cos \theta)}{\pi \cos n\pi} = \frac{1}{\pi} P_n(\cos \theta)$$

Далее, из формул (2.2) вытекает, что на больших расстояниях r от сферы (при $r \gg b > a$) получим для давления и скорости рассеянной волны в точке (r, θ, ψ) следующие выражения:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= A \rho_0 \sigma \exp\{i(\pi + 2\varepsilon_1 - \sigma t)\} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \psi_n(k_1 b) \times \\ &\times \left[\zeta_n^{(2)}(k_1 r) - \frac{\zeta_n^{(2)'(\omega_1)}}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n(k_1 r) \right] P_n(\cos \theta) + \rho_0 c \times \\ &\times \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \sigma t \right) \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) U_n}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) \\ v_\psi &= \frac{A \sigma}{c} \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \sigma t \right) \right\} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \psi_n(k_1 b) \left[\zeta_n^{(2)'(k_1 r)} - \right. \\ &\left. - \frac{\zeta_n^{(2)'(\omega_1)}}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n'(k_1 r) \right] P_n(\cos \theta) + \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) U_n}{\zeta_n'(\omega_1)} \zeta_n'(k_1 r) P_n(\cos \theta) \\ v_\rho &= 0, \quad v_\psi = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь к правой части каждой из формул (3.3) при условии (2.14), (2.15) применим преобразование Ватсона (3.2). Тогда

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{A\rho_0\sigma i}{2} \exp\{i(\pi - \sigma t + 2\varepsilon_1)\} \int_r \frac{(2\lambda + 1)\psi_\lambda(k_1 b)}{\sin \lambda\pi} \times \\
 &\times \left[\zeta_\lambda^{(2)}(k_1 r) - \frac{\zeta_\lambda^{(2)'}(\omega_1)}{\zeta_\lambda'(\omega_1)} \zeta_\lambda(k_1 r) \right] P_\lambda(-\cos \theta) d\lambda + \frac{\rho_0\sigma i}{2k_1'} \times \\
 &\times \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \sigma t\right)\right\} \int_r \frac{(2\lambda + 1)U_\lambda}{\sin \lambda\pi \zeta_\lambda'(\omega_1)} \zeta_\lambda(k_1 r) P_\lambda(-\cos \theta) d\lambda \\
 v_r &= \frac{A\sigma i}{2c} \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma t + \varepsilon_1\right)\right\} \int_r \frac{(2\lambda + 1)\psi_\lambda(k_1 b)}{\sin \lambda\pi} \times \\
 &\times \left[\zeta_\lambda^{(2)'}(k_1 r) - \frac{\zeta_\lambda^{(2)'(\omega_1)}(\omega_1)}{\zeta_\lambda'(\omega_1)} \zeta_\lambda(k_1 r) \right] P_\lambda(-\cos \theta) d\lambda + \\
 &+ \frac{i}{2} \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\} \int_r \frac{(2\lambda + 1)U_\lambda}{\sin \lambda\pi \zeta_\lambda'(\omega_1)} \zeta_\lambda'(k_1 r) P_\lambda(-\cos \theta) d\lambda \\
 v_\theta &= 0, \quad v_\phi = 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Так как подынтегральные функции в (3.4) — нечетные функции от $\lambda + 1/2$, то в качестве контура интегрирования можно взять прямую, параллельную вещественной оси и лежащую в верхней полуплоскости λ (фиг. 1). Это утверждение вытекает из свойства сферических бесселевых функций и функции Лежандра, а также из соотношений (2.14) — (2.16).

В работе [9] подробно исследуются интегралы типа (3.4) при $r \rightarrow \infty$ (вдали от сферы). Применяя к интегралам (3.4) теоремы о вычетах, как и в работе [9], получим для p и v_r следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 p &= -\pi A\rho_0\sigma \exp\{i(2\varepsilon_1 - \sigma t)\} \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1)\zeta_{\lambda_m}^{(2)'}(\omega_1)}{\sin \lambda_m\pi} \times \\
 &\times \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_\lambda'(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \psi_{\lambda_m}(k_1 b) \zeta_{\lambda_m}(k_1 r) P_{\lambda_m}(-\cos \theta) - \pi\rho_0\sigma i \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\} \times \\
 &\times \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1)U_{\lambda_m}\zeta_{\lambda_m}(k_1 r)}{\sin \lambda_m\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_\lambda'(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} P_{\lambda_m}(-\cos \theta) \\
 v_r &= \frac{\pi A\sigma i}{c} \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\} \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1)\zeta_{\lambda_m}^{(2)'}(\omega_1)\psi_{\lambda_m}(k_1 b)}{\sin \lambda_m\pi} \times \\
 &\times \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_\lambda'(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \zeta_{\lambda_m}'(k_1 r) P_{\lambda_m}(-\cos \theta) - \pi \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\} \times \\
 &\times \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1)U_{\lambda_m}}{\sin \lambda_m\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_\lambda'(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \zeta_{\lambda_m}'(k_1 r) P_{\lambda_m}(-\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где λ_m — корни уравнения

$$\zeta_\lambda'(\omega_1) = 0 \tag{3.6}$$

в комплексной плоскости λ , которые можно определить по Дебаю [10], при помощи функции Эйри — Фока [11] или по Францу [12].

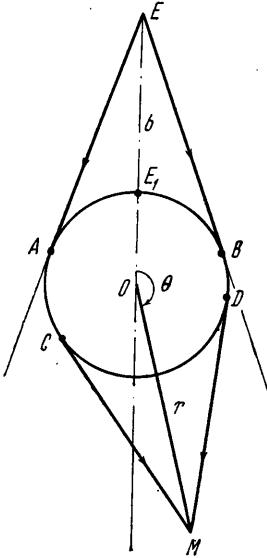
4. Асимптотическое решение для области тени. Ряды (3.5) при $|\omega_1| \gg 1$ сходятся очень быстро. Чтобы показать это, необходимо получить подходящие представления отдельных множителей в (3.5). Применяя асимптотические выражения сферических бesselевых функций [8] и функций Лежандра [6] и учтя приближения [9], можно написать формулы (3.5) в виде

$$\begin{aligned}
 p = & \frac{A\rho_0 a c \exp\{-k_1''(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2})\}}{\omega^{1/6} \sqrt{2br} \sin \theta [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{1/4}} \exp \left[i \left\{ k_1'(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sigma t + \frac{\pi}{3} + \frac{5\varepsilon_1}{6} \right\} \right] \sum_m \frac{C_m}{1 + e^{2um\pi i}} \left(1 + \frac{q_m}{2} e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3} \right) \times \\
 & \times \left[\exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right) - \frac{\pi i}{4} \right\} + \right. \\
 & \left. + \exp \left\{ u_m i \left(\theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right) + \frac{\pi i}{4} \right\} \right] + \\
 & + \frac{\pi \rho_0 a^2 \sigma \exp(-k_1'' \sqrt{r^2 - a^2})}{\sqrt{r} \sin \theta \sqrt{r^2 - a^2}} \exp \left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + 2\varepsilon_1 + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \times \\
 & \times \sum_m \frac{U_{\lambda_m} (1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3})}{q_m A(q_m) (1 + e^{2um\pi i})} \left[\exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \theta - \arccos \frac{a}{r} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\pi i}{4} \right\} + \exp \left\{ u_m i \left(\theta - \arccos \frac{a}{r} \right) + \frac{\pi i}{4} \right\} \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_r = & \frac{A a r^{1/2} \exp\{-k_1''(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2})\}}{\omega^{1/6} \sqrt{2b} (r^2 - a^2) \sin \theta [(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)]^{1/4}} \exp \left[i \left\{ k_1'(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sigma t + \frac{\pi}{3} - \frac{\varepsilon_1}{6} \right\} \right] \sum_m \frac{C_m}{1 + e^{2um\pi i}} [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3}] \times \\
 & \times \left[\exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right) - \frac{\pi i}{4} \right\} + \right. \\
 & \left. + \exp \left\{ u_m i \left(\theta - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right) + \frac{\pi i}{4} \right\} \right] + \\
 & + \frac{\pi a^2 \sigma r^{1/2} \exp(-k_1'' \sqrt{r^2 - a^2})}{c \sqrt{(r^2 - a^2)} \sin \theta (r^2 - a^2)^{1/4}} \exp \left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + 2\varepsilon_1 + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \times \\
 & \times \sum_m \frac{U_{\lambda_m} (1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3})}{q_m A(q_m) (1 + e^{2um\pi i})} \left[\exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \theta - \arccos \frac{a}{r} \right) - \frac{\pi i}{4} \right\} + \right. \\
 & \left. + \exp \left\{ u_m i \left(\theta - \arccos \frac{a}{r} \right) + \frac{\pi i}{4} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Физически эти формулы можно интерпретировать совершенно так же, как соответствующие формулы в случае дифракции плоских звуковых волн в идеальной среде [9], т. е. говорить о «ползущих» волнах, огибающих сферу. Действительно, если проведем из сферического источника E звука касательные линии к сферической поверхности, то эти касательные образуют коническую поверхность (круговую), которая делит пространство (поле среды) на три области: теневую область II — область, заключенную между поверхностью сферы и внутренней областью ко-

нуса, и освещенные области I и III — остальная часть пространства (без теневой области). В области II возьмем произвольную точку M наблюдения и через точки M, E, O проведем плоскость, которая пересекает сферическую поверхность по большому кругу (фиг. 2). Из фиг. 2 видно, что длины дуг AC, BD, E_1AC, E_1BD равны соответственно



Фиг. 2

$$a(2\pi - \theta - \arccos a/b - \arccos a/r) = \cup AC \quad (4.2)$$

$$a(\theta - \arccos a/b - \arccos a/r) = \cup BD$$

$$a(2\pi - \theta - \arccos a/r) = \cup E_1AC$$

$$a(\theta - \arccos a/r) = \cup E_1BD$$

Это — дуги большого круга сферы, вдоль которых идут по поверхности сферы (по дугам большого круга) два «луча», приходящие из сферического источника E звука по касательным к большому кругу сферы (по отрезкам EA и EB) и отрывающиеся от него в точках касания касательных, которые проходят через точку M наблюдения, и движущиеся затем по прямолинейным отрезкам касательных (CM и DM) до точки наблюдения M ; и еще две волны (в случае точечного источника E , расположенного в полюсе $\theta = 0$ (2.14)), исходящие от точечного источника E , огибающие сферу по дугам $\cup E_1AC$ и E_1BD большого круга, а затем идущие по тем же отрезкам касательных до точки M наблюдения. Но в показателе экспоненты входит вместо a выражение $a + 2^{-1}(6^{-1}ac^2\sigma^{-2})^{1/2}q_m$ и потому вышеуказанные волны не идут непосредственно вдоль поверхности сферы, а проходят на некотором расстоянии $2^{-1}(6^{-1}ac^2\sigma^{-2})^{1/2}q_m$ от нее. Таким образом, до точки M наблюдения доходят четыре затухающие «ползущие» волны, огибающие сферу. Ввиду того, что мнимая часть u_m больше нуля, с увеличением m ряды сходятся очень быстро и для практического приложения достаточно вычислить не более пяти членов рядов (4.1).

Если величина U_n определяется по формулам (2.12) или (2.13), то вместо вторых членов в (4.1) нужно взять следующие выражения:

$$\frac{U\rho_0c \exp\{i(t/2\pi + \varepsilon_1 - \sigma t)\}}{\zeta_1(\omega_1)} \zeta_0(k_1r) \quad \text{и} \quad \frac{U \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\}}{\zeta_1(\omega_1)} \zeta_1(k_1r) \quad (4.3)$$

в случае (2.13)

$$\frac{U\rho_0c \exp\{i(t/2\pi + \varepsilon_1 - \sigma t)\}}{\zeta_1'(\omega_1)} \zeta_1(k_1r) \psi_1(k_1b) \cos \theta \quad (4.4)$$

$$\frac{U \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\}}{\zeta_1'(\omega_1)} \zeta_1'(k_1r) \psi_1(k_1b) \cos \theta$$

Если величина U_n определяется по формуле (2.15), то в (4.1) вместо U_{λ_m} нужно подставить выражение

$$(8\pi\omega^3)^{-1/2}U(\sin \theta_0)^{1/2} \exp\left\{-i\left(\frac{3\varepsilon_1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \left[\exp\left\{i\left(u_m\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{4} - u_m\theta\right)\right\} \right] \quad (4.5)$$

Формулы (4.1) не применимы при $\theta = \pi$. В этом случае, учтя [13]

$$P_{\lambda_m}(-\cos \theta) = J_0\{u_m(\pi - \theta)\} \quad (4.6)$$

в окрестности $\theta = \pi$ (где не выполнено условие $|u_m \sin \theta| \gg 1$) можно написать для p и v , следующие выражения:

$$p = \frac{A\rho_0ac\pi^{1/2}\omega^{1/2}}{(br)^{1/2}[(b^2 - a^2)(r^2 - a^2)]^{1/4}} \exp\{-k_1''(\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2})\} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left[i \left\{ k_1' (\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \sigma t + \frac{\pi}{3} + \frac{4\varepsilon_1}{3} \right\} \right] \times \\
 & \times \sum_m \frac{C_m [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} (k_1 a)^{-2/3}]}{1 + \exp(2u_m \pi i)} \exp \left\{ u_m i \left(\pi - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right) \right\} \times \\
 & \times J_0 \{ u_m (\pi - \theta) \} + \frac{(2\pi\omega)^{1/2} \pi \rho_0 a^2 \sigma}{r^{1/2} (r^2 - a^2)^{1/4}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2 - a^2}} \exp \left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + \frac{\pi}{4} + \frac{5\varepsilon_1}{2} \right) \right\} \times \\
 & \times \sum_m \frac{U_{\lambda_m} [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} (k_1 a)^{-2/3}]}{q_m A(q_m) [1 + \exp(2u_m \pi i)]} \exp \left\{ u_m i \left(\pi - \arccos \frac{a}{r} \right) \right\} J_0 \{ u_m (\pi - \theta) \} \\
 & v_r = \frac{A a (\pi r)^{1/2} \omega^{1/2}}{[b^2 (b^2 - a^2) (r^2 - a^2)^3]^{1/4}} \exp \{ -k_1'' (\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2}) \} \times \\
 & \times \exp \left[i \left\{ k_1' (\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \sigma t + \frac{\pi}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} \right\} \right] \times \\
 & \times \sum_m \frac{C_m [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} (k_1 a)^{-2/3}]}{1 + \exp(2u_m \pi i)} \exp \left\{ u_m i \left(\pi - \arccos \frac{a}{b} - \arccos \frac{a}{r} \right) \right\} \times \\
 & \times J_0 \{ u_m (\pi - \theta) \} + \frac{(2\pi\omega r)^{1/2} \pi a^2 \sigma}{c (r^2 - a^2)^{1/4}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2 - a^2}} \exp \left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + \frac{\pi}{4} + \frac{5\varepsilon_1}{2} \right) \right\} \times \\
 & \times \sum_m \frac{U_{\lambda_m} [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} (k_1 a)^{-2/3}]}{q_m A(q_m) [1 + \exp(2u_m \pi i)]} \exp \left\{ u_m i \left(\pi - \arccos \frac{a}{r} \right) \right\} J_0 \{ u_m (\pi - \theta) \}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

5. Асимптотическое решение для освещенной области. Пусть теперь точка наблюдения M лежит вне геометрической тени (в области I или III). В этом случае, подставив в (3.4) вместо $P_\lambda(-\cos \theta)$ ее выражение [9] через функцию Лежандра второго рода $Q_\lambda(\cos \theta)$, получим, как и в работе [9], выражения

$$\begin{aligned}
 p &= p_g + \pi A \rho_0 \sigma \exp \{ i(\pi + 2\varepsilon_1 - \sigma t) \} \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1) \psi_{\lambda_m}(k_1 b) \zeta_{\lambda_m}^{(2)'}(\omega_1)}{\sin \lambda_m \pi} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_{\lambda'}(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \exp(\lambda_m \pi i) \zeta_{\lambda_m}(k_1 r) P_{\lambda_m}(\cos \theta) - \\
 & - \rho_0 c \exp \{ i(1/2\pi + \varepsilon_1 - \sigma t) \} \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1) \exp(\lambda_m \pi i) U_{\lambda_m}}{\sin \lambda_m \pi} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_{\lambda'}(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \zeta_{\lambda_m}(k_1 r) P_{\lambda_m}(\cos \theta) \\
 & v_r = v_{rg} + \frac{\pi A \sigma}{c} \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \sigma t \right) \right\} \times \\
 & \times \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1) \psi_{\lambda_m}(k_1 b) \zeta_{\lambda_m}^{(2)'}(\omega_1) \exp(\lambda_m \pi i)}{\sin \lambda_m \pi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_{\lambda'}(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \times \\
 & \times \zeta_{\lambda_m}'(k_1 r) P_{\lambda_m}(\cos \theta) - \exp \{ i(\varepsilon_1 - \sigma t) \} \sum_m \frac{(2\lambda_m + 1) \exp(\lambda_m \pi i) U_{\lambda_m}}{\sin \lambda_m \pi} \times \\
 & \times \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_{\lambda'}(\omega_1) \right]_{\lambda=\lambda_m}^{-1} \zeta_{\lambda_m}'(k_1 r) P_{\lambda_m}(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$p_g = A\rho_0\sigma \exp\{i(2\varepsilon_1 - \sigma t)\} \int_{\Gamma_1} \frac{(2\lambda + 1)\Psi_\lambda(k_1 b)\zeta_{\lambda^{(2)'}}(\omega_1)}{\zeta_{\lambda'}(\omega_1)} \times \\ \times \zeta_\lambda(k_1 r) Q_\lambda(\cos \theta) d\lambda + \rho_0 c \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - \sigma t\right)\right\} \times \\ \times \int_{\Gamma_1} \frac{(2\lambda + 1)U_\lambda}{\zeta_{\lambda'}(\omega_1)} \zeta_\lambda(k_1 r) Q_\lambda(\cos \theta) d\lambda \quad (5.2)$$

$$v_{rg} = \frac{A\sigma}{c} \exp\left\{-i\left(\sigma t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right)\right\} \int_{\Gamma_1} \frac{(2\lambda + 1)\Psi_\lambda(k_1 b)\zeta_{\lambda^{(2)'}}(\omega_1)}{\zeta_{\lambda'}(\omega_1)} \zeta_{\lambda'}(k_1 r) \times \\ \times Q_\lambda(\cos \theta) d\lambda + \exp\{i(\varepsilon_1 - \sigma t)\} \int_{\Gamma_1} \frac{(2\lambda + 1)U_\lambda}{\zeta_{\lambda'}(\omega_1)} \zeta_{\lambda'}(k_1 r) Q_\lambda(\cos \theta) d\lambda \quad (5.3)$$

где контур интегрирования Γ_1 на комплексной плоскости λ охватывает полюсы λ_m (или u_m), определяемые как корни уравнения (3.6). Контур интегрирования Γ_1 получается путем деформации Γ в петлю, охватывающую полюсы λ_m (фиг. 1).

Далее, применяя к интегралам (5.1)–(5.3) опять асимптотические представления сферических цилиндрических функций (с учетом различных выражений слева и справа от линии нулей λ_m), и функций Лежандра [14]

$$Q_{\lambda_m}(\cos \theta) = \begin{cases} J_0(u_m \theta), & \theta \sim 0 \\ \frac{\exp\{i(u_m \theta - 1/4\pi)\}}{\sqrt{2\pi\lambda_m \sin \theta}}, & |\lambda_m \sin \theta| \gg 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

и метод перевала к интегралам (5.2) и (5.3), получим для p_s и v_{rs} рассеянной волны в точке (r, θ, ψ) вдали от сферы (в дальней зоне поля $r \rightarrow \infty$) следующие выражения:

$$p_s = -\frac{A\rho_0\sigma i}{R_0 + r_0} p^\circ e^{-k_1''(R_0+r_0)} \exp\{i\{k_1'(R_0 + r_0) - \sigma t\}\} \left[1 - i \frac{1 + 2 \cos^2 \theta/2}{2k_1 a \cos^3 \theta/2} \right] + \\ + \frac{A\rho_0\sigma \omega^{5/6} \exp\{-k_1''(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2})\}}{(2br \sin \theta)^{1/2} (b^2 - a^2)^{1/4} (r^2 - a^2)^{1/4}} \exp\left[i \left\{ k_1'(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma t - \frac{\pi}{6} + \frac{11\varepsilon_1}{6} \right\} \right] \sum_m \frac{C_m(1 + 2^{-1}q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3})}{1 + \exp(2u_m \pi i)} \left[\exp\left\{ i \left(u_m \alpha_1(r, \theta) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \right. \\ \left. + \exp\left\{ i \left(u_m \alpha_2(r, \theta) + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] - \tau \frac{2\rho_0 a^2 \sigma i}{r''} (U_\lambda)_0 e^{-k_1'' r''} \exp\{i(k_1' r'' - \sigma t + 2\varepsilon_1)\} + \\ + \frac{\rho_0 a \sigma}{r^{1/2} (r^2 - a^2)^{1/4}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2 - a^2}} \exp\left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + 2\varepsilon_1 + \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \times \\ \times \sum_m \frac{U_{\lambda_m} [1 + 2^{-1}q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3}]}{q_m A(q_m) [1 + \exp(2u_m \pi i)]} \left[\exp\left\{ i \left(u_m \beta_1(r, \theta) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \right. \\ \left. + \exp\left\{ i \left(u_m \beta_2(r, \theta) + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right] \quad (5.5) \\ v_{rs} = -\frac{A(r_0 + a \cos \theta/2) k_1 i}{r(R_0 + r_0)} p^\circ \exp\{i\{k_1(R_0 + r_0) - \sigma t\}\} \left[1 - i \frac{1 + 2 \cos^2 \theta/2}{2k_1 a \cos^3 \theta/2} \right] + \\ + \frac{A(r^2 - a^2)^{1/4} \omega^{5/6}}{(2br \sin \theta)^{1/2} (b^2 - a^2)^{1/4}} \exp\{-k_1''(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2})\} \times$$

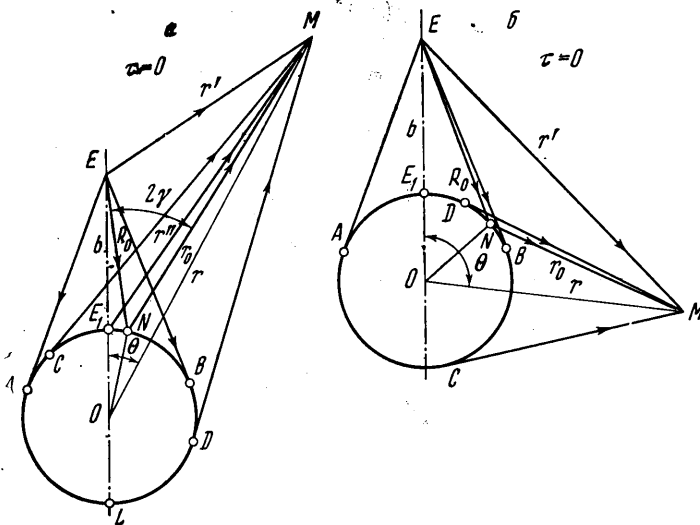
$$\begin{aligned} & \times \exp \left[i \left\{ k_1' (\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \sigma t + \frac{5\varepsilon_1}{6} - \frac{\pi}{6} \right\} \right] \times \\ & \times \sum_m \frac{C_m [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-1/3}]}{1 + \exp(2u_m \pi i)} \left[\exp \left(\left\{ u_m \alpha_1(r, \theta) - \frac{\pi}{4} \right\} i \right) + \right. \\ & + \exp \left(\left\{ u_m \alpha_2(r, \theta) + \frac{\pi}{4} \right\} i \right) \right] - \tau \frac{2(r_0 + a \cos \theta/2) k_1 a^2 i}{rr'} (U_\lambda)_0 \exp \{ i(k_1 r' - \sigma t + \varepsilon_1) \} + \\ & + \frac{\omega a (r^2 - a^2)^{1/4}}{(r)^{3/2}} e^{-R_0 \sqrt{r^2 - a^2}} \exp \{ i(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + \varepsilon_1 + 3/4\pi) \} \times \\ & \times \sum_m \frac{U_{\lambda m} [1 + 2^{-1} q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-1/3}]}{q_m A(q_m) [1 + \exp(2u_m \pi i)]} \left[\exp \{ (u_m \beta_1(r, \theta) - 1/4\pi) i \} + \exp \{ (u_m \beta_2(r, \theta) + 1/4\pi) i \} \right] \\ & \alpha_1(r, \theta) = 2\pi + \theta - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{b}, \quad \beta_1(r, \theta) = 2\pi + \theta - \arccos \frac{a}{r} \\ & \alpha_2(r, \theta) = 2\pi - \theta - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{b}, \quad \beta_2(r, \theta) = 2\pi - \theta - \arccos \frac{a}{r} \end{aligned}$$

где p° определяется по формуле [14, 15], $\tau = 0$ (фиг. 3, а), $\tau = 1$ (фиг. 3, б).

$$p^\circ = (\sin \alpha)^{1/2} \left(\sin \alpha + \frac{2R_0 r_0}{a(R_0 + r_0)} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{2R_0 r_0}{a(R_0 + r_0)} \sin \alpha \right)^{-1/2} \quad (5.6)$$

$$\alpha = 1/2\pi - \gamma, \quad \gamma \rightarrow 1/2\theta, \quad r \rightarrow \infty$$

Эти формулы можно интерпретировать совершенно так же, как и формулы (4.1), с геометрической точки зрения. До точки M доходит от сферического источника E падающая (по EM), отраженная (по ENM) и две ползущие волны (по $EALDM$ и



Фиг. 3

$E_1 B D L A C M$ или по $E A C M$ и $E B C A D M$), а от источника E_1 — падающая (по $E_1 M$) (только для $\tau = 1$) и две ползущие волны (по $E_1 C A L D M$ и $E_1 B D L A C M$ или по $E_1 A C M$ и $E_1 B C A D M$) (фиг. 3). Ряды (5.5) весьма быстро сходятся во всех точках геометрической тени. В окрестности отраженного луча $\theta = 0$ вместо (5.5) получим другие формулы

$$p_s = - \frac{A \rho_0 \sigma i}{R_0 + r_0} p^\circ \exp [i \{ k_1 (R_0 + r_0) - \sigma t \}] \left[1 - i \frac{1 + 2 \cos^2 \theta/2}{2 \omega_1 \cos^3 \theta/2} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{A\pi^{1/2}\rho_0\omega^{1/3}}{(br)^{1/2}(b^2-a^2)^{1/4}(r^2-a^2)^{1/4}} \exp \left[i \left\{ k_1(\sqrt{r^2-a^2} + \sqrt{b^2-a^2}) - \sigma t + \frac{7\varepsilon_1}{2} - \frac{\pi}{6} \right\} \right] \times \\
& \quad \times \sum_m \frac{1 + 2^{-1}q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3}}{1 + \exp(2u_m \pi i)} \exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{b} \right) \right\} \times \\
& \quad \times J_0(u_m \theta) - \tau \frac{2\rho_0 a^2 \sigma i}{r''} (U_\lambda)_0 \exp \{ i(k_1 r'' - \sigma t + 2\varepsilon_1) \} + \frac{(2\pi\omega)^{1/2} \rho_0 \omega a c}{r^{1/2}(r^2-a^2)^{1/4}} e^{-k_1'' \sqrt{r^2-a^2}} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2-a^2} - \sigma t + \frac{5\varepsilon_1}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \sum_m \frac{U_{\lambda m} [1 + 2^{-1}q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3}]}{q_m A(q_m) [1 + \exp(2u_m \pi i)]} \times \\
& \quad \times \exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{b} \right) \right\} J_0(u_m \theta) \\
v_{rs} = & - \frac{iAk_1(r_0 + a \cos \theta/2)}{r(R_0 + r_0)} p^0 \exp \{ i[k_1(R_0 + r_0 - \sigma t)] \} \left[1 - i \frac{1 + 2 \cos^2 \theta/2}{2\omega_1 \cos^3 \theta/2} \right] + \\
& + \frac{A(\pi b^{-1} r^{-3})^{1/2} \omega^{1/3} (r^2 - a^2)^{1/4}}{(b^2 - a^2)^{1/4}} \exp \left[i \left\{ k_1(\sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}) - \sigma t + \frac{4}{3} \varepsilon_1 - \frac{\pi}{6} \right\} \right] \times \\
& \quad \times \sum_m \frac{C_m [1 + 2^{-1}q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3}]}{1 + \exp(2u_m \pi i)} \exp \left\{ u_m i \left(2\pi - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{b} \right) \right\} \times \\
& \quad \times J_0(u_m \theta) + 2\tau a^2 k_1 (r r'')^{-1} (r_0 + a \cos \theta/2) (U_\lambda)_0 \exp \{ i(k_1 r'' - \sigma t + 2\varepsilon_1 + \pi/2) \} + \\
& + (2\pi\omega r^{-3})^{1/2} (r^2 - a^2)^{1/4} a \omega \exp \left\{ i \left(k_1' \sqrt{r^2 - a^2} - \sigma t + \frac{3\varepsilon_1}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) - k_1'' \sqrt{r^2 - a^2} \right\} \times \\
& \quad \times \sum_m \frac{U_{\lambda m} [1 + 2^{-1}q_m e^{\pi i/3} \omega_1^{-2/3}]}{q_m A(q_m) [1 + \exp(2u_m \pi i)]} \exp \{ u_m i (2\pi - \arccos a/r - \arccos a/b) \} J_0(u_m \theta)
\end{aligned}$$

Таким образом, получены асимптотические формулы для давления и скорости рассеянной волны в точке (r, θ, ψ) вдали от сферы. Зная давление и скорость точки, без труда можно определить другие гидродинамические и акустические элементы поля.

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 5 II 1969

1. Морс Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
2. Морс Ф., Фешбах Г. Методы математической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Watson G. N. The diffraction of electric waves by the earth. Proc. Roy. Soc., A. 95, 1918, 83—89.
4. Цой П. И. Излучение пульсирующей сферы в вязкой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, стр. 170—177.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963.
7. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. М., Физматгиз, 1958.
8. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит. 1949.
9. Хёнл Х., Мауэ М., Вестфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
10. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, Гостехиздат, 1937.
11. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1946.
12. Franz W. Über die Greenschen Funktionen des Zylinder und Kugel. Z. Naturforsch. 1954, 9a, S. 705—713.
13. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2, Aufl., Berlin, 1948.
14. Цой П. И. Дифракция звуковых волн (коротких) относительно препятствия (цилиндра, сферы, конуса и плоскости). ПММ, 1961, вып. 2, стр. 365—369.
15. Poincaré H. Oeuvres, t. X. P. 94—203 Gauthier — Villars, Paris, 1954.