

УДК 534.1 : 532.5

ГИДРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. М. РОСТОВЦЕВ

(Ленинград)

Рассмотрена задача об определении форм и частот свободных колебаний плавающей балки эллиптического поперечного сечения на основе совместного решения уравнения механических изгибных колебаний и уравнений гидродинамики. Оценена разница между формами колебаний балки в жидкости и в пустоте.

Пусть свободная поверхность жидкости совпадает с одной из осей эллипса, представляющего собой контур поперечного сечения балки.

Горизонтальная полуось эллипса $0.5B$, вертикальная T , длина балки L . Начало декартовой системы координат xuz расположено на левом конце, ось x направлена вдоль балки, ось z — вверх.

Деформациями сдвига, инерцией вращения масс балки, рассеянием энергии и изменением гидростатических сил будем пренебрегать. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, возмущения, вносимые колеблющейся балкой — малыми. При этих условиях колебания балки описываются уравнением [1]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} dy = 0 \quad (1)$$

где $w(x, t)$ — вертикальный прогиб; E, I — модуль нормальной упругости и момент инерции поперечного сечения балки; m — масса единицы длины; ρ — массовая плотность жидкости; l — контур поперечного сечения балки; $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал вызванных скоростей жидкости.

На концах балки прогиб должен удовлетворять условиям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (x = 0, \quad x = L) \quad (2)$$

Уравнение (1) и условия (2) определяют функцию $w(x, t)$ с точностью до смещений балки как жесткого целого. Поэтому должно быть добавлено требование равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на балку.

Функция $\Phi(x, y, z, t)$ должна удовлетворять следующим уравнениям для поля пространства вне балки и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (z < 0), \quad \Phi = 0 \quad (z = 0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} \cos(n, z), \quad z = S(y, t)$$

где $z = S(y, t)$ — уравнение движущейся поверхности балки; n — нормаль к поверхности $S(y, t)$. Асимптотические условия сводятся к требованию ограниченности производных Φ всюду в жидкости и стремления их к нулю на бесконечности.

Рассматриваются малые колебания, поэтому задача может быть линейаризована при удовлетворении граничного условия на поверхности $z = S_0(y)$, соответствующей среднему положению балки при вибрации.

В задаче о вибрации балки конечной длины не представляется возможным удовлетворить условию во всех точках свободной поверхности. Предполагая, что балка представляет собой весьма вытянутое тело ($L \gg B$), первое условие перепишем следующим образом [2]:

$$\Phi = 0 \text{ при } z = 0, |y| > 0.5B, x = 0, x = L \quad (4)$$

Иначе говоря, условие на свободной поверхности не выполняется на узкой полосе $|y| < 0.5B$ при $x < 0$ и $x > L$. Пусть балка совершает гармонические колебания

$$w(x, t) = r(x) e^{i\omega t} \quad (5)$$

очевидно, потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ — также гармоническая функция времени

$$\Phi(x, y, z, t) = i\omega\varphi(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (6)$$

Система уравнений и граничных условий для функций $r(x)$, $\varphi(x, y, z)$ следует из (1) — (6).

Решение задачи может быть найдено с помощью конечного синус-преобразования Фурье по переменной x .

Представив

$$r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \alpha_k x, \quad \varphi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(y, z) \sin \alpha_k x \quad (7)$$

$$(\alpha_k = k\pi / L)$$

найдем для определения функций $f_k(y, z)$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial z^2} - \alpha_k^2 f_k = 0 \quad (z < 0) \quad (8)$$

$$f_k = 0 \quad (z = 0, |y| > 0.5B), \quad \frac{\partial f_k}{\partial n} = \cos(n, z) \quad (z = S_0(y))$$

Однозначность решения обеспечивается подчинением функции f_k асимптотическим условиям [3]

$$\lim \sqrt{R} |f_k| = \text{const}, \quad \lim \sqrt{R} \left(\frac{\partial f_k}{\partial R} + i\alpha_k f_k \right) = 0 \quad (R = (y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty) \quad (9)$$

Пусть большая ось эллипса, представляющего собой поперечное сечение балки, расположена горизонтально ($0.5B > T$). Вводя эллиптические координаты ξ, η

$$y = -h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad \xi_0 \leq \xi < \infty \quad (10)$$

$$z = -h \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad h = (0.25B^2 - T^2)^{1/2}$$

найдем решение задачи, удовлетворяющее помимо (8), (9) условиям симметрии функции $f_k(\xi, \eta)$ относительно оси $\eta = \pi/2$, [4]

$$f_k(\xi, \eta) = -0.5B \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{1,k}^{2n+1} \frac{Gek_{2n+1}(\xi, -q_k)}{G'ek_{2n+1}(\xi_0, -q_k)} se_{2n+1}(\eta, -q_k) \quad (11)$$

где $q_k = 0.25\alpha_k^2 h^2$; $se_{2n+1}(\eta, -q_k)$ — периодическая функция Матье нечетного индекса; $Gek_{2n+1}(\xi, -q_k)$ — модифицированная функция Матье, $A_{1,k}^{2n+1}$ —

первый коэффициент Фурье для функции se_{2n+1} , определяемый на основании рекуррентных формул [4].

Гидродинамическая реакция на единицу длины балки равна

$$P(x, t) = -\rho \int_1^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dy = \rho \omega^2 e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k \sin \alpha_k x \quad (12)$$

$$p_k = \int_1^{\infty} f_k(y, z) dy \quad (13)$$

$$p_k = -0.125\pi\rho B^2 M(\xi_0 - q_k) \quad (14)$$

$$M(\xi_0, -q_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1,k}^{2n+1})^2 \frac{Gek_{2n+1}(\xi_0, -q_k)}{G'ek_{2n+1}(\xi_0, -q_k)} \quad (15)$$

Если большая ось эллипса перпендикулярна свободной поверхности воды ($0.5B < T$), гидродинамическое усилие определяется формулами (12) – (14.1) с заменой (14.2) на

$$M(\xi_0 - q_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_{1,k}^{2n+1})^2 \frac{Fek_{2n+1}(\xi_0 - q_k)}{F'ek_{2n+1}(\xi_0 - q_k)}$$

Коэффициент $B_{1,k}^{2n+1}$ и функции Fek_{2n+1} аналогичны $A_{1,k}^{2n+1}$ и Gek_{2n+1} . В случае вибрации круговой цилиндрической балки ($0.5B \rightarrow T$) обе функции (14) и (15) имеют в качестве предела одно и то же значение

$$\lim M = -\frac{0.5}{1 + 0.5\alpha_k BK_0(0.5\alpha_k B)/K_1(0.5\alpha_k B)} \quad (16)$$

где K_0, K_1 – функции Макдональда.

На фиг. 1 представлены графики функции $M(\xi_0 - q_k)$, вычисленные для ряда значений $T/B = 0.5 \text{ th } \xi_0$. Для вычислений использованы выражения модифицированных функций Матье в виде рядов по функциям Бесселя [4]. Во всех случаях трех членов ряда в (14) и (15) было достаточно для получения значения функции с ошибкой, не превышающей 0.5%.

Для исследования связанных гидроупругих колебаний форму упругих смещений балки представим в виде ряда по балочным функциям $\varphi_i(x)$

$$r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \quad (17)$$

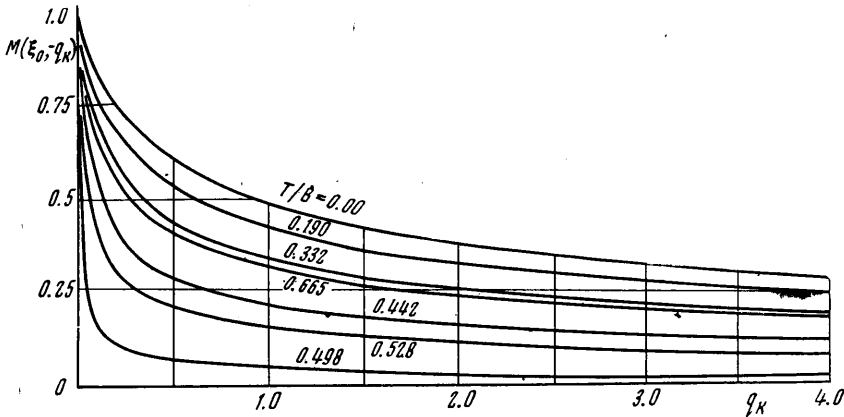
$$EI \frac{\partial^4 \varphi_i(x)}{\partial x^4} - \lambda_i^2 m \varphi_i(x) = 0 \quad (18)$$

где $\varphi_i(x)$ удовлетворяет кроме уравнения (18), граничным условиям (2) и условиям равенства нулю главного вектора и главного момента сил инерции. Здесь λ_i – собственные частоты вибрации балки в пустоте. Подставляя (5), (12), (14) и (17) в уравнение (1), получим

$$m \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\lambda_i^2 - \omega^2) \varphi_i - 0.125\pi\rho B^2 \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k M(\xi_0, -q_k) \sin \alpha_k x = 0 \quad (19)$$

Функции $\varphi_i(x)$ представляют собой формы свободных колебаний балки в пустоте. Для каждого значения собственной частоты плавающей балки

ω_j может быть найдено необходимое число коэффициентов c_i , которые удобно представить в виде N -мерного вектора $\{c\}_i$. При тождественности форм колебаний в жидкости и в воде все компоненты столбца $\{c\}_i$ должны быть равны нулю, за исключением j -го, который должен быть равен единице.



Фиг. 1

Сравнивая (17) и (7), учитывая ортогональность системы функций $\sin \alpha_k x$ и ограничиваясь некоторым конечным числом членов ряда S , найдем соотношение

$$\{a\}_j = [D] \{c\}_j \tag{20}$$

где $\{a\}_j$ — S -мерный вектор коэффициентов a_k ; $[D]$ — прямоугольная матрица порядка $S \times N$.

Компоненты матрицы $[D]$ вычисляются по следующему правилу:

$$D_{ki} = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi_i(x) \sin \alpha_k x \, dx \tag{21}$$

Домножив уравнение (21) на функции $\varphi_j(x)$ и проинтегрировав по длине балки (метод Бубнова — Галеркина), найдем следующую систему однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\{c\}_j$:

$$([\lambda^2][m] - \omega^2([m] + [m_1]))[c] = 0 \tag{22}$$

где $[\lambda^2]$ — диагональная $N \times N$ -матрица квадратов собственных частот; $[m]$ — диагональная матрица обобщенных масс; $[m_1]$ — квадратная матрица присоединенных масс; $[c]$ — матрица собственных векторов системы (22), которые в данном рассмотрении удобно нормализовать в соответствии с правилом $c_{jj} = 1$.

Компоненты матриц $[m]$, $[m_1]$ имеют следующий вид:

$$m_{jj} = m \int_0^L \varphi_j^2(x) \, dx, \quad m_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \tag{23}$$

$$[m_1] = \frac{1}{16} \pi \rho B^2 L [D]^T [M] [D] \tag{24}$$

где M — диагональная $S \times S$ -матрица значений функции $M(\xi_0, -q_k)$.

В качестве примера вычисления собственных чисел и векторов системы (22) были выполнены применительно к случаю балки, имеющей следующие размерности: $L = 120$ м, $B = 12$ м, $T = 4.0$ м, $I = 2.79$ м⁴. Погонная масса балки принята равной $0.125 \rho B^2$. Матрица собственных векторов, определенная при $N = 12$, $S = 20$, приведена ниже.

Матрица $[c]$ близка к единичной. Для двух первых форм колебаний поправка, вызванная влиянием жидкости, не превышает 1% максимального значения ординаты формы колебаний в пустоте. Поправки становятся более ощутимыми для высших тонов колебаний. Так, для 12-го тона разница между ординатами форм колебаний в пустоте и жидкости достигает 20% максимального значения.

Представляет интерес оценка ошибок в значениях частот свободных колебаний ω_j^* , найденных при отождествлении форм колебаний балки в пустоте и в жидкости по сравнению с ω_j , определенными для системы уравнений (22).

$$10^4[c] = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 927 & 0 & 693 & 0 & 543 & 0 & 452 & 0 & 401 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 718 & 0 & 570 & 0 & 451 & 0 & 386 & 0 & 349 \\ -33 & 0 & 10^4 & 0 & 777 & 0 & 560 & 0 & 462 & 0 & 409 & 0 \\ 0 & -69 & 0 & 10^4 & 0 & 688 & 0 & 478 & 0 & 398 & 0 & 358 \\ -34 & 0 & -130 & 0 & 10^4 & 0 & 668 & 0 & 479 & 0 & 411 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -171 & 0 & 10^4 & 0 & 591 & 0 & 421 & 0 & 365 \\ -1 & 0 & -25 & 0 & -198 & 0 & 10^4 & 0 & 625 & 0 & 443 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -35 & 0 & -209 & 0 & 10^4 & 0 & 577 & 0 & 407 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -51 & 0 & -251 & 0 & 10^4 & 0 & 616 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & 0 & -59 & 0 & -256 & 0 & 10^4 & 0 & 585 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -19 & 0 & -74 & 0 & -293 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -23 & 0 & -81 & 0 & -297 & 0 & 10^4 \end{bmatrix}$$

При приближенных вычислениях

$$(\omega_j^*)^2 = \lambda_j^2 \frac{1}{1 + m_{jj}^*/m_{jj}}$$

где m_{jj}^* — обобщенная присоединенная масса воды, соответствующая вибрации балки по форме $\varphi_i(x)$.

Как следует из (22), присоединенные массы m_{jj}^* являются компонентами матрицы $[m_i]$, стоящими на главной диагонали.

Расчеты, выполненные для балки, размеры которой указаны выше, показали, что собственные частоты, определенные по формуле (25), во всех случаях ниже значений, найденных на основе уравнений (22), но погрешность не превышает 2%.

Поступила 28 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрямов А. А. Вибрация корабля. М., Судпромгиз, 1961.
2. Kumai T. A method for evaluating the three-dimensional reduction factor of the virtual mass in the vertical vibration of ships. Japan Shipbuilding and Marine Engineering, July 1966.
3. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М., Гостехтеоретиздат, 1950.
4. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.