УДК 533.6.12

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ АЭРОМЕХАНИКИ

А. И. БУНИМОВИЧ, А. В. ДУБИНСКИЙ

(*Москва*)

Вариационные задачи аэродинамики, связанные с определением формы тел минимального сопротивления или минимального теплопотока (например, [1–6]) в большинстве случаев сводятся к исследованию на экстремум функционалов, представляющих собой сумму или произведение некоторых степеней интегралов от одной неизвестной функции. Аналогичные по методу решения задачи рассматриваются и в других областях механики сплошной среды (например, в теории движения грунта [7, 8]).

В данной работе исследуется вариационная задача для обобщенного класса функционалов вида

$$I = f(I_1, I_2, \ldots, I_n), \qquad I_k = \int\limits_{x_i}^{x_f} F(x, y, \dot{y})\, dx$$

включающего в себя, в частности, функционалы указанных выше типов. Получены необходимые условия экстремума и дан метод решения вариационной задачи для случая фиксированных и свободных концов.

В качестве примеров получено аналитическое решение представляющих самостоятельный интерес задач о форме неосесимметричных тел, воспринимающих минимальный теплопоток, и о форме тонких тел вращения, воспринимающих минимальный удельный теплопоток при гиперзвуковом обтекании потоком совершенного газа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим функционалы вида

$$I = f(I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n) \tag{1.1}$$

$$I_k = \int\limits_{x_i}^{x_f} F_k(x, y, \dot{y})\, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Функции f, F_k предполагаются достаточно гладкими [1].

Вариационная задача состоит в отыскании в классе допустимых функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_i) = y_i$, $y(x_f) = y_f$, такой функции, которая реализует минимум (максимум) функционала (1.1).

2. Необходимые условия экстремума в случае фиксированных значений x_i, y_i, x_f, y_f. Как известно [10–12], при сделанных выше допущениях условие экстремума функционала $I[y]$ можно записать в виде

$$\delta I = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} I[y + \alpha \delta y]\right)_{\alpha=0} = 0 \tag{2.1}$$

[1] Частный случай функционалов, представляющих собой произведение степеней интегралов, рассматривался А. Миеле [9].

а необходимое условие минимума (максимума) — соответственно в виде

$$\delta^2 I = \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} I[y + \alpha\delta y] \right)_{\alpha=0} \geqslant 0 \qquad (\leqslant 0) \tag{2.2}$$

Выведем необходимые условия минимума (максимума) для функционалов вида (1.1), принимая, что функция $y_0(x)$ реализует экстремум $I[y]$.

Условие (2.1) в рассматриваемом случае запишется в форме

$$\delta I = \left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha} f(I_1[y_0 + \alpha\delta y_0], \quad I_2[y_0 + \alpha\delta y_0], \ldots, I_n[y_0 + \alpha\delta y_0]) \right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial I_k} \right)_{\alpha=0} \left(\frac{\partial I_k}{\partial\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \tag{2.3}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta I_k = 0 \tag{2.4}$$

где введено обозначение

$$\lambda_k = \left(\frac{\partial f}{\partial I_k} \right)_{y=y_0} \tag{2.5}$$

Выражение (2.4) можно, очевидно, записать в виде

$$\delta \int_{x_i}^{x_f} F dx = 0 \tag{2.6}$$

где функция

$$F = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k \tag{2.7}$$

Из соотношения (2.6) следует уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0 \tag{2.8}$$

которое с учетом (2.7) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(F_{ky} - \frac{d}{dx} F_{k\dot{y}} \right) = 0$$

Вторая вариация функционала (1.1) запишется в форме

$$\delta^2 I = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I_i}{\partial\alpha} \frac{\partial I_k}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial I_k \partial I_i} \right)_{\alpha=0} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial I_i} \frac{\partial^2 I_i}{\partial\alpha^2} \right)_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \, \delta I_i \, \delta I_k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta^2 I_i \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$\lambda_{ik} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial I_i \, \partial I_k} \right)_{y=y_0} \tag{2.10}$$

Рассмотрим последовательность некоторых специально выбранных вариаций (фиг. 1). Первый член последовательности представлен ломаной линией $x_iAD_1C_1x_f$, где $A = x_0$ — некоторая фиксированная точка, $AC_1 \in (x_i, x_f)$, α, β_1 — малые углы, $D_1B_1 \perp 0x$; следующие члены последовательности $x_iAD_nC_nx_f$ строятся по закону (фиг. 1, пунктир)

$$AB_n = AB_1 / n^2, \quad B_nC_n = B_1C_1 / n, \quad AB_n\alpha = B_nC_n\beta_n \tag{2.11}$$

откуда

$$\beta_n = \beta_1 / n \tag{2.12}$$

На основании (2.1), (2.12) можно выписать оценки порядка величин ($n \to \infty$):

на интервалах (x_i, x_0) и (C_n, x_f)

$$\delta y = 0, \ \delta \dot{y} = 0$$

на интервале (x_0, B_n) длиной порядка n^{-2}

$$\delta y \sim n^{-2}, \ \delta \dot{y} \sim 1$$

на интервале (B_n, C_n) длиной порядка n^{-1}

$$\delta y \sim n^{-2}, \ \delta \dot{y} \sim n^{-1} \tag{2.13}$$

Вариации функционалов вида (1.2), как известно, можно записать в форме

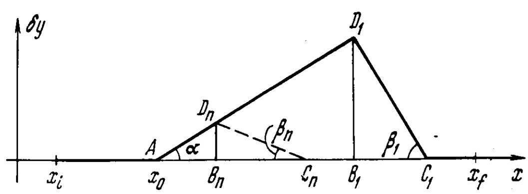
$$\delta I_k = \int_{x_i}^{x_f} \left(F_{ky} - \frac{d}{dx} F_{k\dot{y}} \right) \delta y \, dx \tag{2.14}$$

$$\delta^2 I_k = \int_{x_i}^{x_f} \left(F_{kyy} - \frac{d}{dx} F_{ky\dot{y}} \right) (\delta y)^2 dx + \int_{x_i}^{x_f} F_{k\dot{y}\dot{y}} (\delta \dot{y})^2 dx \tag{2.15}$$

Разбивая интервал интегрирования $[x_i, x_f]$ на отрезки $[x_i, x_0]$, $[x_0, B_n]$, $[B_n, C_n]$, $[C_n, x_f]$ и используя оценки (2.13), получим

$$\delta I_i \delta I_k = O\left(\frac{1}{n^5}\right), \quad \delta^2 I_k = \int_{x_0}^{B_n} F_{k\dot{y}\dot{y}} (\delta \dot{y})^2 dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\int_{x_0}^{B_n} F_{k\dot{y}\dot{y}} (\delta \dot{y})^2 dx \sim \frac{1}{n} \tag{2.16}$$



Фиг. 1

Выражение (2.9) можно с помощью (2.7), (2.16) переписать в виде

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{B_n} F_{\dot{y}\dot{y}} (\delta \dot{y})^2 dx + O\left(\int_{x_0}^{B_n} F_{\dot{y}\dot{y}} (\delta \dot{y})^2 dx \right) \tag{2.17}$$

Выражение для второй вариации получено в той же форме, что и при исследовании функционалов вида (1.2). Аналог условия Лежандра для минимума и максимума соответственно будет иметь вид

$$F_{\dot{y}\dot{y}} \geqslant 0, \quad F_{\dot{y}\dot{y}} \leqslant 0 \tag{2.18}$$

Это условие минимума (максимума) можно переписать и в другом виде

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_{k\dot{y}\dot{y}} \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \tag{2.19}$$

3. Необходимые условия экстремума в случае свободных x_i, y_i, x_f, y_f. Обозначим через dI_k такую вариацию функционала $I_k[y]$, когда изменение I_k возможно за счет изменения как y, так и x_i, y_i, x_f, y_f.

Тогда

$$dI_k = \int_{x_i}^{x_f} \delta F_k \, dx + F_k|_{x_f} dx_f - F_k|_{x_i} dx_i \tag{3.1}$$

Раскрывая δF_k и интегрируя по частям, получим

$$dI_k = \int_{x_i}^{x_f} \left(F_{ky} - \frac{d}{dx} F_{k\dot{y}}\right) \delta y \, dx + F_{k\dot{y}} \delta y \Big|_i^f + F_k \delta x \Big|_i^f$$

Условие $dI = 0$ приводит к равенству

$$\int_{x_i}^{x_f} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}}\right) \delta y \, dx + F_{\dot{y}} \delta y \Big|_i^f + F \delta x \Big|_i^f = 0 \tag{3.2}$$

Из (3.2), рассуждая, как при исследовании функционалов вида (1.2), получаем, что $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (2.8), а также соотношению

$$F_{\dot{y}} \delta y |_i^f + F \delta x |_i^f = 0 \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение величину $\delta' y$ — вариацию с учетом граничных условий

$$\delta' y = \delta y + \dot{y} \delta x \tag{3.4}$$

После подстановки δy из (3.4) в (3.3) получим условие трансверсальности в виде

$$[(F - \dot{y} F_{\dot{y}}) \delta x + F_{\dot{y}} \delta' y]_i^f = 0 \tag{3.5}$$

или

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (F_k - \dot{y} F_{k\dot{y}}) \delta x + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_{k\dot{y}} \delta' y\right]_i^f = 0$$

Очевидно, и в случае свободных концов имеет место условие Лежандра.

Условия Вейерштрасса — Эрдмана выводятся аналогично. Они принимают вид

$$\Delta (F - \dot{y} F_{\dot{y}}) \delta x + \Delta (F_{\dot{y}}) \delta' y = 0 \tag{3.6}$$

их можно записать, подставив F из (2.7).

Таким образом, предложено следующее правило нахождения функции $y_0(x)$, удовлетворяющей необходимым условиям экстремума функционала (1.1).

1. Вводится функция

$$F = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k$$

где λ_k — параметры.

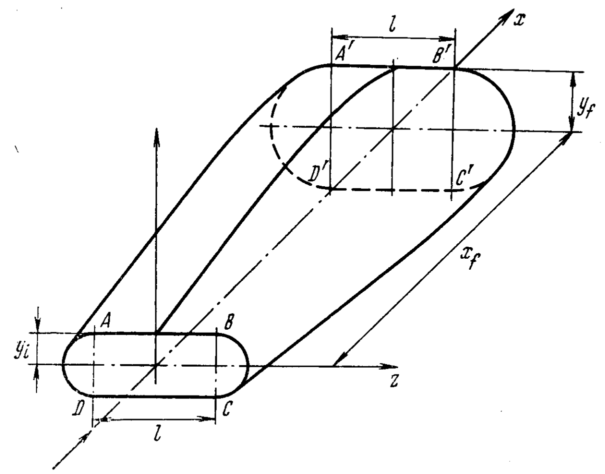
2. Ищется функция $y_0(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, для которой выполнены необходимые условия экстремума функционала

$$\int_{x_i}^{x_f} F dx$$

3. Значения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$(\partial f/\partial I_k)_{y=y_0(x,\lambda_1\lambda_2,\ldots,\lambda_n)} = \lambda_k \qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{3.7}$$

4. Неосесимметричные тела, воспринимающие минимальный теплопоток. Применим изложенный в п. 1—3 метод к решению задачи о нахождении формы неосесимметричного тела, воспринимающего минималь-



Фиг. 2

ный теплопоток при обтекании гиперзвуковым потоком совершенного газа. Задачу будем рассматривать в классе тел, изображенных на фиг. 2. Границей оснований тела являются кусочно-гладкие линии $ABCD$ (соответственно $A'B'C'D'$), состоящие из отрезков прямых $AB=CD$, $A'B'=C'D'$, полуокружностей BC и AD радиуса y_i и $B'C'$, $A'D'$ радиуса y_f.

Так как у всех сравниваемых тел форма оснований идентична ($x_i=0$, x_f, y_i, y_f фиксированы), то при обтекании потоком в направлении ox задача эквивалентна отысканию формы тела, воспринимающего минимальный теплопоток через боковую поверхность, образованную движением плоской гладкой кривой, опирающейся на контур оснований.

Теплопоток Q через боковую поверхность тупоносого тела определяется [13, 14] по формуле

$$Q = \pi^k A_0 \left[\int_{x_i}^{x_f} \frac{y^{2k}\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} dx\right]^{1/2} \tag{4.1}$$

где A_0 — функция параметров набегающего потока, $k=1$ для осесимметричного тела, $k=0$ для плоского тела.

Для рассматриваемого класса тел в предположении $\dot{y}^2 \ll 1$ задача сводится к минимизации функционала

$$I = \frac{Q}{\pi A_0} = \left(\int_0^{x_f} y^2 \dot{y}^2\, dx\right)^{1/2} + \frac{l}{\pi}\left(\int_0^{x_f} \dot{y}^2 dx\right)^{1/2} = I_1^{1/2} + r I_2^{1/2} \tag{4.2}$$

или в соответствии с результатами п. 1—3 к минимизации функционала

$$J = \int_0^{x_f} F dx = \int_0^{x_f} (\lambda_1 y^2 \dot{y}^2 + \lambda_2 \dot{y}^2)\, dx \tag{4.3}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2 I_1^{1/2}}, \qquad \lambda_2 = \frac{r}{2 I_2^{1/2}}, \qquad r = \frac{l}{\pi} \tag{4.4}$$

Условие Лежандра выполнено, так как

$$F_{\dot{y}\dot{y}} = 2(\lambda_1 y^2 + \lambda_2) > 0 \tag{4.5}$$

Условия Вейерштрасса — Эрдмана имеют вид

$$(\lambda_1 y^2 + \lambda_2)\Delta(\dot{y}^2) = 0, \qquad (\lambda_1 y^2 + \lambda_2)\Delta(\dot{y}) = 0 \tag{4.6}$$

Так как

$$\lambda_1 y^2 + \lambda_2 > 0$$

то (4.6) удовлетворяется лишь при $\Delta(\dot{y}) = 0$, откуда следует, что функция, реализующая экстремум, не может иметь разрывов производной.

Первый интеграл уравнения Эйлера

$$\lambda_1 y^2 \dot{y}^2 + \lambda_2 \dot{y}^2 = c \qquad (c = \mathrm{const}) \tag{4.7}$$

позволяет получить уравнение экстремали

$$x = \frac{1}{\alpha}\int_{y_i} \sqrt{y^2 + \mu^2}\, dy \tag{4.8}$$

$$\mu^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \qquad \alpha^2 = \frac{c}{\lambda_1} \tag{4.9}$$

Из (4.8), использовав граничные условия, найдем, что

$$x_f = \frac{1}{\alpha}\int_{y}^{y_f} \sqrt{y^2 + \mu^2}\, dy \tag{4.10}$$

Проинтегрировав (4.7) в пределах от 0 до x_f с учетом (4.9), (4.2) получим

$$I_1 + \mu^2 I_2 = \alpha^2 x_f \tag{4.11}$$

Интеграл I_1 на экстремали имеет вид

$$I_1 = \alpha \int_{y_i}^{y_f} \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + \mu^2}} \tag{4.12}$$

Таким образом, для определения величины c, α, μ, λ_1, λ_2, I_1, I_2 имеем замкнутую систему алгебраических уравнений (4.4) и (4.9)—(4.12). Из нее нетрудно получить уравнение для μ

$$\Phi(\mu) = \int_{x_i}^{x_f} (\mu^4 - r^2 y^2)(y^2 + \mu^2)^{-1/2} dy = 0 \tag{4.13}$$

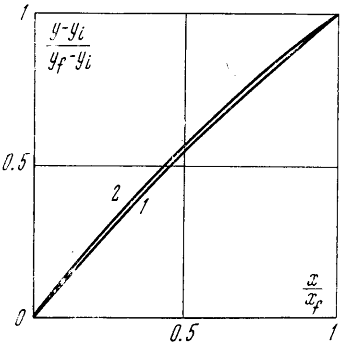
Так как функция $\Phi(\mu)$ возрастает при $x \in (0, \infty)$; $\Phi(0) < 0$, и при достаточно больших μ числитель $\mu^4 - r^2 y^2 > 0$ (а, следовательно, $\Phi(\mu) > 0$), то существует единственный корень уравнения (4.13). Уравнение образующей (4.8) можно переписать в другой форме, выразив α через μ и вычисляя интеграл в правой части

$$\frac{x}{x_f} = \frac{r^2}{2(r^2+\mu^2)\mu^2} \times \tag{4.14}$$

$$\times \frac{y(y^2+\mu^2)^{1/2} - y_i(y_i^2+\mu^2)^{1/2} + \mu^2 \ln[(y+\sqrt{y^2+\mu^2})(y_i+\sqrt{y_i^2+\mu^2})^{-1}]}{\ln[(y_f+\sqrt{y_f^2+\mu^2})(y_i+\sqrt{y_i^2+\mu^2})^{-1}]}$$

Параметр μ определяется из уравнения (4.13) или из выражения (4.14), если подставить $x = x_f$, $y = y_f$.

Оптимальные кривые представлены на фиг. 3. Кривая *1* соответствует значениям $y_i = 1$, $y_f = 2$, $l = 0$, кривая *2* — значениям $y_i = 1$, $y_f = 2$, $l = 2{,}1$.



Фиг. 3

5. Тонкие тела вращения, воспринимающие минимальный удельный теплопоток. Под удельным теплопотоком понимается средний тепловой поток на единицу смачиваемой боковой поверхности тела. При заданной длине x_f и максимальном радиусе y_f тела задача сводится к минимизации функционала

$$I = \frac{Q}{\pi A_0} = \left(\int_0^{x_f} y^2 \dot{y}^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^{x_f} y dx\right)^{-1} = I_1^{1/2} I_2^{-1} \tag{5.1}$$

или, в соответствии с результатами п. 1—3, функционала

$$J = \int_0^{x_f} (\lambda_1 y^2 \dot{y}^2 - \lambda_2 y) \, dx = \int_0^{x_f} F dx \tag{5.2}$$

$$\lambda_1 = {}^1/_2 I_1^{-1/2} I_2^{-1} \qquad \lambda_2 = I_1^{1/2} I_2^{-2} \tag{5.3}$$

Условие Лежандра выполнено, так как

$$F_{\dot{y}\dot{y}} = 2\lambda_1 y^2 \geqslant 0 \tag{5.4}$$

Из первого интеграла уравнения Эйлера

$$\lambda_1 y^2 \dot{y}^2 + \lambda_2 y = c \tag{5.5}$$

получим уравнение экстремали

$$x = \mu \int_0^y \frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - y}} dy \tag{5.6}$$

и с учетом граничных условий соотношение

$$x_f = \mu \int_0^{y_f} \frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - y}} dy \tag{5.7}$$

$$\mu^2 = \lambda_1 / \lambda_2, \qquad \alpha^2 = c / \lambda_2 \tag{5.8}$$

Интегрируя (5.5) по x от 0 до x_f, получим с учетом (5.3)

$$\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 = c x_f \tag{5.9}$$

Выражение для I_2 на экстремали имеет вид

$$I_2 = \mu \int\limits_0^{y_f} \frac{y^2 dy}{\sqrt{\alpha^2 - y}} \tag{5.10}$$

Из соотношений (5.10), (5.9), (5.8), (5.3), (5.7) между величинами c, α, μ, λ_1, λ_2, I_1, I_2 нетрудно получить уравнение для α в виде

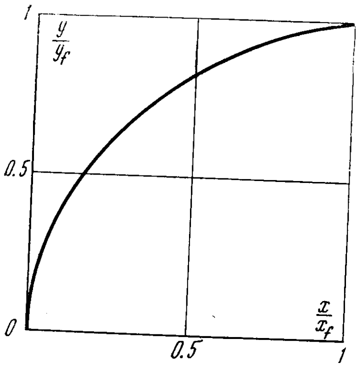
$$\int\limits_0^{y_f} \frac{y(3y - 2\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2 - y}} dy = 0 \tag{5.11}$$

Вычислив интеграл в (5.11) и сделав замену

$$\alpha = \sqrt{\frac{y_f}{1 - \beta^2}} \tag{5.12}$$

получим уравнение пятой степени для определения β

$$9\beta^5 - 20\beta^3 + 15\beta - 4 = 0 \tag{5.13}$$



Фиг. 4

Уравнение (5.13) имеет двукратный корень $\beta = 1$, поэтому задача сводится к отысканию на интервале (0, 1) корня уравнения

$$\Phi(\beta) = 9\beta^3 + 18\beta^2 + 7\beta - 4 = 0 \tag{5.14}$$

Так как $\Phi(0) < 0$, $\Phi(1) > 0$ и $\Phi(\beta)$ возрастает на (0.1), то искомый корень β_0 существует и единственный (равный ~ 0.30).

Из соотношений (5.7), (5.12), (5.6), вычислив соответствующие интегралы, нетрудно получить уравнение искомой образующей в следующей форме:

$$\frac{x}{x_f} = a_0 \left[1 - \sqrt{1 - 2b_0 \frac{y}{y_f} \left(1 + b_0 \frac{y}{y_f} \right)} \right]$$

$$\left(a_0 = \frac{2}{(1 - \beta_0)^2 (2 + \beta_0)}, \quad b_0 = \frac{1}{2} (1 - \beta_0^2) \right) \tag{5.15}$$

Соответствующий график представлен на фиг. 4.

Заметим, что, как следует из (5.5), $\dot{y}|_{x=y=0} = \infty$, т. е. тело тупоносое и использование исходной формулы (4.1) для теплопотока обосновано. Однако, строго говоря, не выполнено условие $\dot{y}^2 \ll 1$, т. е. условие о том, что тело тонкое. Можно показать, что соответствующим выбором граничных условий обеспечивается выполнение условия $\dot{y}^2 \ll 1$ везде, кроме сколь угодно малой окрестности критической точки. Отношение теплопотока через эту малую окрестность к суммарному теплопотоку пренебрежимо мало.

Поступила 14 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Theory of optimum aerodynamic shapes. New York — London, Acad. Press., 1965. (Рус. перев.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969).
2. Гонор А. Л., Крайко А. Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях. Приложение к книге [1].
3. Гродзовский Г. Л. О телах вращения с минимальным коэффициентом лобового сопротивления и малой теплопередачей при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МГЖ, 1968, № 5.
4. Белянин Н. М. Определение формы тела с минимальным тепловым потоком при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
5. Перминов В. Д. Осесимметричные тела минимального сопротивления в вязком гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
6. Перминов В. Д., Солодкин Е. Е. Осесимметричные тела минимального сопротивления и минимального потока к поверхности тела при различном характере течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
7. Гольдштейн М. Н. Вариационный метод решения задач об устойчивости грунтов. Вопросы геотехники, № 16, Киев, «Будивельник», 1969.
8. Дорфман А. Г. Методы решения вариационных задач и их применение в механике грунтов. Вопросы геотехники, № 16, Киев, «Будивельник», 1969.
9. Miele A. Drag minimization as the extremization of products of powers of integration. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», М., «Наука», 1969.
10. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., «Наука», 1970.
11. Шилов Г. Е. Математический анализ. М., Физматгиз, 1961.
12. Михлин С. Г. Курс математической физики. М., «Наука», 1968.
13. Aihara I. Optimum body geometries of minimum heat transfer at hypersonic speeds. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 11.
14. Lees L. Laminar heat transfer over blunt nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, vol. 26.