

УДК 533.6.01.5

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУЙ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СПУТНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

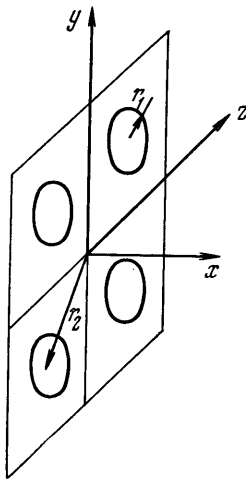
Е. Н. БОНДАРЕВ, Г. А. ГУЩИН

(Москва)

Разработан численный метод расчета пространственной ламинарной сверхзвуковой недорасширенной струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток. Используются упрощенные уравнения Навье — Стокса для стационарного пространственного течения.

Проведены численные расчеты нескольких случаев истечения струй из четырехсоплового блока в спутный сверхзвуковой поток и выявлены некоторые особенности такого пространственного течения.

1. Недорасширенная сверхзвуковая ламинарная струя, распространяющаяся в спутном сверхзвуковом потоке, индуцирует в нем возмущения поля давления. Если в спутном потоке распространяются несколько параллельных струй, то индуцированные поля давления взаимодействуют друг с другом, что приводит к возникновению некоторых эффектов, характерных для пространственных течений струй, истекающих из многосоловых блоков.



Фиг. 1

Течение пространственной сверхзвуковой струи вязкого газа при достаточно больших значениях числа Рейнольдса можно описать с помощью упрощенной системы уравнений Навье — Стокса, в которой сохранены члены, описывающие течение невязкого газа, и члены, описывающие течение в пограничном слое, как это было сделано для одиночной осесимметричной струи в работе [1]. Примем, что струи и спутный поток распространяются вдоль оси x , а оси y и z перпендикулярны потоку (фиг. 1). Тогда упрощенная система уравнений Навье — Стокса для ламинарного пространственного потока однородного по составу сжимаемого

газа в общепринятых обозначениях примет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4}{3} \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

$$\rho u C_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w C_p \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (1.5)$$

$$p = \rho RT \quad (1.6)$$

Предполагается, что взаимодействующие струи распространяются в безграничном однородном спутном потоке, а сопла расположены симметрично относительно оси x . Поэтому в качестве граничных условий на осях y и z могут быть заданы условия симметрии. На внешней границе струи должны быть поставлены асимптотические граничные условия. Как и в [1], предполагается, что асимптотические граничные условия с достаточной точностью удовлетворяются на некоторых конечных расстояниях y_2 и z_2 от оси x . В начальном сечении должны быть заданы профили $u(y, z)$, $v(y, z)$, $w(y, z)$, $T(y, z)$, $p(y, z)$.

Тогда принятую систему начальных и граничных условий можно записать так:

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= u(y, z), & T(0, y, z) &= T(y, z) \\ v(0, y, z) &= v(y, z), & p(0, y, z) &= p(y, z) \\ w(0, y, z) &= w(y, z), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, 0) = w(x, y, 0) = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, z) = v(x, 0, z) = 0 \quad (1.9)$$

Условия на внешней границе

$$u(x, y, z_2) = u(x, y_2, z) = u_2, \quad T(x, y, z_2) = T(x, y_2, z) = T_2 \quad (1.10)$$

$$v(x, y, z_2) = v(x, y_2, z) = v_2,$$

$$w(x, y, z_2) = w(x, y_2, z) = w_2, \quad p(x, y, z_2) = p(x, y_2, z) = p_2$$

2. Приведем систему (1.1)–(1.6) к безразмерному виду. Для этого отнесем все параметры к соответствующим значениям на оси одиночной струи в начальном сечении, а координаты x, y, z — к некоторому радиусу сопла r_1 .

Для улучшения использования разностной сетки введем переменный шаг по направлениям y и z . Для этого вводим новые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = k^{-1} \ln(1 + ky / \delta), \quad \zeta = k^{-1} \ln(1 + kz / \delta) \quad (2.1)$$

Здесь $\delta = f(x)$ — граница счетной области, которая задается некоторым полиномом

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{-1/3} + a_2 x^{-1/2} + a_3 x + a_4 x^2 \quad (2.2)$$

Коэффициенты этого полинома подбираются путем пробных расчетов таким образом, чтобы граница трехмерной струи всегда находилась внутри счетной области. Для этого предварительно по методу, изложенному в работе [1], определяем границу одиночной струи.

Одновременно вместо p и ρ также вводим новые переменные

$$\Pi = \ln p, \quad \varepsilon = \ln \rho \quad (2.3)$$

Полученная система уравнений близка по структуре к системе уравнений пограничного слоя и носит эволюционный характер, т. е. если известно решение в некотором сечении ξ_1 , то может быть построено решение в сечении $\xi_2 = \xi_1 + \Delta\xi$.

Для решения полученных уравнений использован метод переменных направлений, в основу которого положен принцип построения разностной схемы для многомерных уравнений из одномерных схем. Такой метод был использован в работах [2, 3]. Суть его заключается в том, что в сечении $(n+1)$ система сводится как бы к системе с двумя независимыми переменными ξ и η , а в сечении $(n+2)$ — к системе с независимыми переменными ξ и ζ . Для этого, как и в работе [1], представим в сечении $(n+1)$ каждое из уравнений (1.2) — (1.5) в виде

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(d_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + e_1 \quad (2.4)$$

В сечении $(n+2)$ эти же уравнения представим следующим образом:

$$a_2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(d_2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) + e_2 \quad (2.5)$$

В этих выражениях под f могут подразумеваться u, v, w, T , а коэффициенты при производных и e_1, e_2 будут известными функциями от ξ, η, ζ .

Для того чтобы уравнение неразрывности можно было представить в виде (2.4) или (2.5), добавим в его правую часть члены

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_\varepsilon d_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(q_\varepsilon d_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \right)$$

где коэффициент q_ε достаточно мал. Практически величина q_ε выбирается так, чтобы введение этих добавочных членов не влияло на решение в пределах заданной точности. Добавление в уравнения неразрывности этих членов аналогично введению регуляризации решения путем сглаживания рассчитанных функций плотности [4].

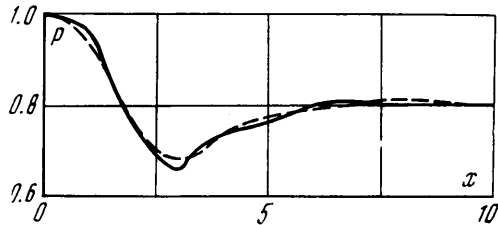
Для аппроксимации дифференциальных уравнений, представленных в виде (2.4) или (2.5), выбрана неявная разностная схема первого порядка по направлению ξ и второго — по направлению η и ζ .

Полученные системы линейных алгебраических уравнений для u, v, w, T, ε решались поочередно независимо одна от другой методом скалярной прогонки. Для уточнения решения могут быть сделаны итерации. Как правило, проводилось не более одной итерации. Поле течения в каждом сечении разбивалось в направлении η и ζ максимум на 35 отрезков, т. е. использовались расчетные сетки до размеров 36×36 . Все расчеты были проведены на ЭВМ БЭСМ-6.

3. Для проверки правильности изложенного метода по разработанной программе была посчитана круглая струя и проведено сравнение полученных результатов с расчетами осесимметричной вязкой струи по методу работы [1]. Расчет был проведен для струи с числом $M_1 = 2.5$ на оси в начальном сечении и с числом $M_2 = 2.0$ в невозмущенном спутном потоке

воздуха. Давление на оси струи p_1 в 1.25 раза больше, чем давление во внешнем спутном потоке p_2 . Число Рейнольдса $Re_1 = 0.95 \cdot 10^4$. В расчете было принято, что число Праудтля равно единице. Поперечные скорости v и w полагались равными нулю. Для осесимметричной струи поле течения в направлении y разбивалось на 127 отрезков, для трехмерной струи расчет велся с сеткой 24×24 , т. е. вдоль оси y число расчетных точек для трехмерной струи было в 5 раз меньше, чем для осесимметричной.

На фиг. 2 построено распределение давления вдоль оси одиночной струи, рассчитанное по методу данной работы (пунктирная линия), и распределение давления для аналогичной осесимметричной струи, рассчитанное по методу работы [1] (сплошная линия). Если учесть, что число расчетных точек в трехмерном случае невелико, то совпадение результатов можно считать удовлетворительным. В различных сечениях струи рассматривались линии изобар и изотерм и было найдено, что, несмотря на относительно редкую разностную сетку, круглая в начальном сечении струя остается в достаточной степени круглой на всем протяжении струи.



Фиг. 2

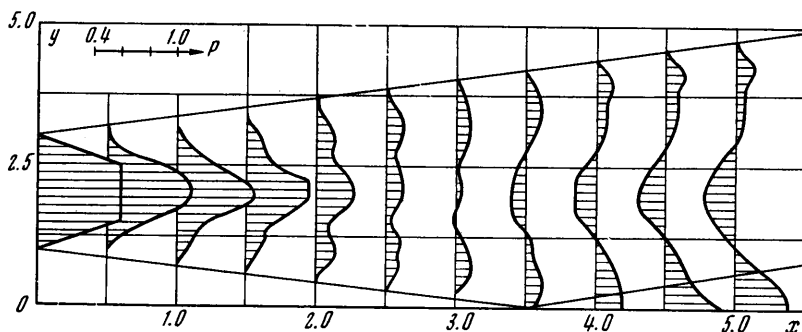
Для исследования особенностей пространственного течения струй были проведены численные расчеты распространения четырех симметрично расположенных струй в спутном сверхзвуковом потоке. Расчеты были проведены для нерасчетностей $n = 1.0, 1.25, 2.5, 5.0$ (здесь $n = p_1 / p_2$). Число M_1 на оси одиночной струи в начальном сечении было равно 2.5. Число M_2 во внешнем потоке было равно 2.0, число Рейнольдса $Re_1 = 0.35 \cdot 10^3$. Статистические температуры обоих потоков были приняты одинаковыми. Принято, что в начальном сечении в слое смешения между одиночной струей и спутным потоком давление изменяется линейно на протяжении семи точек сетки, а скорость в продольном направлении u — на четырех. Скорости в поперечных направлениях v и w полагались равными нулю по всему полю. Разнос сопл, который определялся отношением расстояния между осями сопл, расположенных по диагонали, к диаметру одиночного сопла, равнялся 2.83.

Для нерасчетности $n = 2.5$ на фиг. 3 представлены профили избыточного давления $\Delta p = p - p_2$ в различных сечениях пространственной вязкой струи в плоскости симметрии, проходящей через центры сопл. Видно, что по мере распространения одиночной струи вниз по потоку, в сторону внешнего спутного потока и в направлении к оси компоновки (т. е. в области с более низким давлением) начинают распространяться волны сжатия (на фиг. 3 они изображены сплошными линиями). На оси одиночной струи давление падает. В сечении $x = (x / r_1) = 3.5$ волна сжатия достигает оси компоновки и отражается в сторону внешнего потока. Давление вдоль оси компоновки начинает повышаться и растет примерно до $x = 5.5$. Далее давление вдоль оси падает, так как за отраженной волной сжатия следует волна разрежения. На фиг. 4 показана картина изобар в сечении $x = 5$. Хорошо видны все те волны разрежения и сжатия, которые уже наблюдались на фиг. 3.

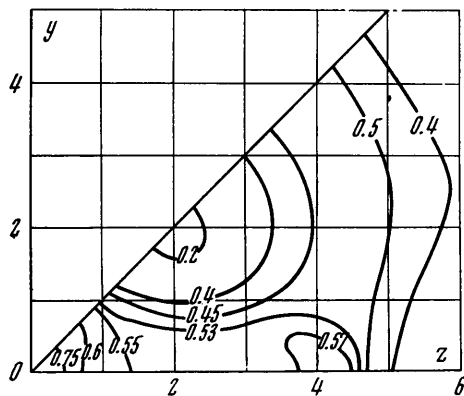
Рассмотрим изотермы температуры торможения T_0 . Так как статическая температура в начальном сечении была принята постоянной по всему полю, то изотермы T_0 в этом сечении представляют собой концентрические окружности с центром на оси одиночного сопла. На фиг. 5 представлены

изотермы T_0 для $n = 2.5$ в сечении $x = 10$. Отчетливо видно, что изотермы вытягиваются вдоль оси z .

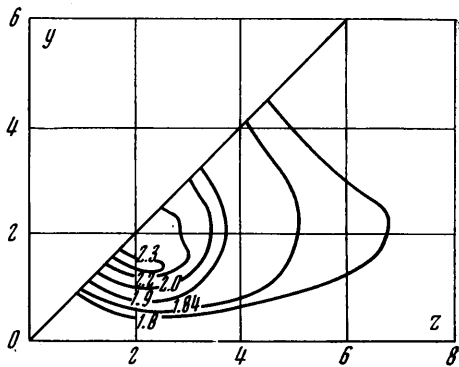
Отметим, что этот эффект выражен тем резче, чем больше нерасчетность одиночной струи, и его возникновение связано с взаимодействием полей давления между соседними струями. Впервые этот эффект был замечен, по-видимому, в экспериментах И. М. Карпмана.



Фиг. 3



Фиг. 4



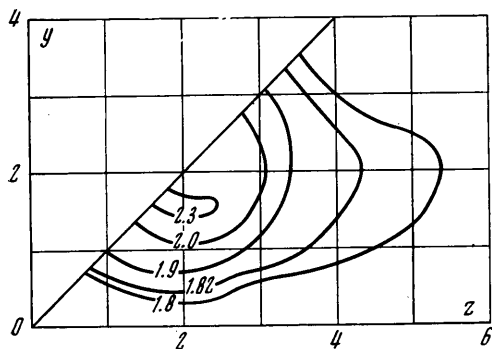
Фиг. 5

Следует отметить, что и при расчетном истечении ($n = 1$) вязких сверхзвуковых струй поля давления имеют сложный пространственный характер. При распаде тангенциального разрыва возмущения скорости и температуры переносятся под влиянием вязкости в поперечном направлении и вызывают возмущения давления. В результате поле давления первоначально изобарической струи ($n = 1$) становится таким же сложным, как и при $n > 1$, но возмущения давления значительно слабее. Однако и при $n = 1$ изотермы T_0 вытягиваются в направлениях y и z (между струями), но несколько слабее, чем при $n = 2.5$ (фиг. 6, $x = 10$).

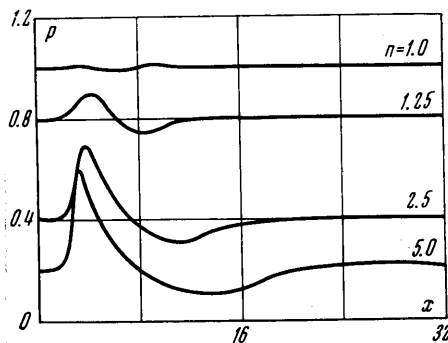
На фиг. 7 показаны рассчитанные распределения давления вдоль оси четырехсопловой компоновки для $n = 1.0, 1.25, 2.5, 5.0$. Видно, что в том месте, где струи сталкиваются, давление на оси имеет максимум, причем для рассмотренных нерасчетностей этот максимум находится примерно в одном и том же сечении ($x = 4$).

Проведенные расчеты показывают, что истечение недорасширенной струи из четырехсопловой блока в спутный сверхзвуковой поток имеет существенно пространственный характер не только на начальном, но и на основном участке струи, где течение почти изобарическое. Следует отме-

туть, что здесь рассматривался случай, когда скорости струи и спутного потока отличались мало. Поэтому следовало ожидать, что пространственный характер течения струи, истекающей из четырехсопловой блока, будет сохраняться достаточно долго даже при относительно небольших зна-



Фиг. 6



Фиг. 7

чений числа Рейнольдса. Все расчеты проводились только для случая полностью сверхзвукового течения как в струе, так и в спутном потоке, так как разностная схема неустойчива при дозвуковых скоростях течения.

Поступило 27 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев Е. Н., Горина А. Н. Решение задачи о сверхзвуковой ламинарной нерасчетной струе в спутном потоке разностным методом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
2. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, vol. 3, No. 1.
3. Douglas J. On the numerical integration of $Uxx + Uyy = Ut$ by implicit methods. Journal Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, vol. 3, No. 1.
4. Годунов С. К. Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Лекции для студентов НГУ. Новосибирск, 1962.