

УДК 532.5

УДАР ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ О ПОВЕРХНОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Г. АСРЯН, Л. А. ГАЛИН

(Москва)

Дано решение задачи об ударе тонкой цилиндрической оболочки о поверхность сжимаемой жидкости. Предполагается, что при установлении закона движения этой оболочки могут быть приняты во внимание только инерционные силы. Определены значения волнового потенциала, перемещения оболочки в рассматриваемом времени удара и изменение давления, действующего на оболочку.

Задача об ударе по твердому телу, ограниченному снизу плоскостью и находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости, была решена в [1]. Такая же задача, но при наличии на поверхности сжимаемой жидкости тонкой пластинки была решена в работе [2].

В этой работе рассматривается удар тонкой цилиндрической оболочки о поверхность сжимаемой жидкости. Предполагается, что оболочка достаточно тонкая, а давление, действующее на нее, велико, и поэтому в ней происходят пластические деформации. При этих условиях можно пренебречь прочностными свойствами и принять во внимание только инерционные силы. Подобное предположение было сделано в работе [3], где исследовался удар о несжимаемую жидкость.

Поставленная задача сводится к определению потенциала перемещений $\varphi(x, y, t)$ в области возмущенного движения Ω . Эта область отделена от невозмущенной области огибающей конусов Маха, исходящих из точек пересечения цилиндрической оболочки со свободной поверхностью жидкости. Это позволяет найти давление, действующее на оболочку.

Пусть цилиндрическая оболочка с образующими, перпендикулярными к плоскости движения, с радиусом R и со скоростью w ударяется о поверхность покоящейся сжимаемой жидкости. Скорость w меньше скорости звука c в рассматриваемой жидкости и направлена по внутренней нормали к горизонтальной свободной поверхности. Возьмем начало координат в точке соприкосновения поверхности оболочки со свободной поверхностью жидкости в момент удара $t = 0$ (фиг. 1). Горизонтальная ось x направлена вправо и совпадает с горизонтальной свободной поверхностью жидкости перед ударом; ось y направлена вертикально вниз.

При больших R скорость движения точек пересечения поверхности оболочки со свободной поверхностью жидкости, т. е. скорость точки A или B (фиг. 1), в начальный период удара будет больше скорости звука в данной жидкости до тех пор, пока будет выполняться условие

$$\alpha < \text{arc tg } (w / c) \quad (1)$$

где α — угол между касательной к оболочке в точке ее пересечения со свободной поверхностью жидкости и осью x .

Будем рассматривать начальный период удара, при котором выполняется условие (1). Конец этого периода соответствует моменту, когда $v_A = c$. Нетрудно показать, что при пренебрежении величинами второго порядка малости уравнение границы области s в плоскости xt , соответствующей изменению во времени линии контакта между оболочкой и жидкостью, будет

$$t_0 = \omega x_0^2, \quad \omega = (2Rc \sin \text{arc tg } w / c)^{-1}$$

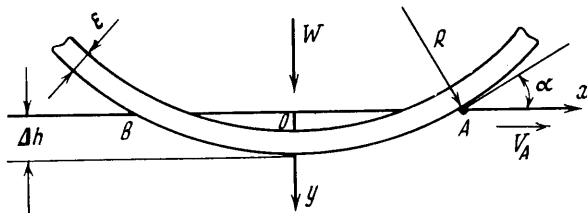
Координаты точки A , соответствующей концу удара

$$x_c = R \sin \text{arc tg } (w / c), \quad t_c = (R / 2c) \sin \text{arc tg } (w / c)$$

Вводим в рассмотрение потенциал перемещений $\varphi(x, y, t)$, который будет удовлетворять волновому уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

где ρ — плотность жидкости, λ — постоянная Ляме.



Фиг. 1

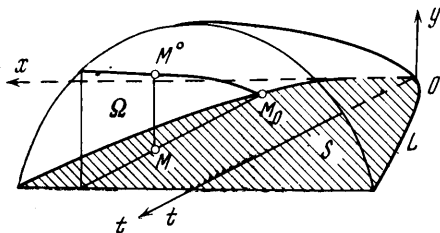
Установим граничные условия для определения функции $\varphi(x, y, t)$. Напишем уравнение движения элемента цилиндрической оболочки после удара

$$\varepsilon \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -p \quad (3)$$

Здесь u_1 — перемещение элемента оболочки по направлению оси y , p — давление жидкости на оболочку по направлению оси y , ε — толщина стенки оболочки, ρ_0 — плотность материала оболочки.

Из общих уравнений упругой среды, принимая модуль сдвига $\mu = 0$, можно получить следующие выражения для давления p и перемещения сжимаемой среды u [4]:

$$p = -\lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4)$$



Фиг. 2

На смоченной части поверхности оболочки перемещение элемента тела по оси y должно равняться перемещению частицы жидкости, прилегающей к этому элементу по той же оси

$$u_1 = u = \partial \varphi / \partial y \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим следующее граничное условие на смоченной части оболочки:

$$\varepsilon \rho_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

или, имея в виду уравнение (2)

$$\varepsilon \rho_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial y} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (6)$$

Рассмотрим начальный период удара, при котором глубина проникновения оболочки в жидкость Δh будет мала и граничное условие (6) можно перенести на плоскость $y = 0$. Вне области s жидкость покоится, следо-

вательно, для точек $M(x, t)$, не принадлежащих области s , выполняется условие $\varphi = 0$ (фиг. 2).

Таким образом на плоскости xt для волнового потенциала φ будем иметь следующие граничные условия:

$$\varphi(x, y, t) = 0 \quad M \in s \quad (y = 0) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho \varphi \right) = 0 \quad M \in s$$

Потенциал перемещений $\varphi(x, y, t)$ и потенциал скоростей $\partial \varphi / \partial t$ — непрерывные функции, которые на фронте волны, в частности на параболе L (фиг. 2), должны равняться нулю

$$\varphi = (\partial \varphi / \partial t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (8)$$

Необходимо найти решение волнового уравнения (2) при граничных и начальных условиях (7) и (8). На фиг. 2 показан возмущенный объем Ω , где необходимо определить функцию $\varphi(x, y, t)$. Этот объем ограничен областью s и огибающими конусов Маха, вершины которых находятся на параболе $t_0 = \omega x_0^2$, а оси конусов параллельны оси t . В точке $M_0(x_0, t_0)$, лежащей на параболе L , выполняются следующие граничные условия:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = w \quad (9)$$

Используя условия (8) и (9), интегрируем второе уравнение из граничных условий (7) дважды по времени от точки $M_0(x_0, t_0)$ до некоторой точки области s , $M(x = x_0, t)$, т. е. интегрирование ведется по направлению M_0M , параллельному оси t

$$\int_{M_0}^M \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial y} - k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dt = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} - k \frac{\partial \varphi}{\partial t} - w = 0$$

$$\int_{M_0}^M \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} - k \frac{\partial \varphi}{\partial t} - w \right) dt = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - k \varphi - w(t - t_0) = 0$$

Подставляя $t_0 = \omega x_0^2 = \omega x^2$, получим

$$\partial \varphi / \partial y - k \varphi = w(t - \omega x^2), \quad k = \rho / \varepsilon \rho_0$$

Для твердого тела $k \rightarrow 0$. Следовательно, будем иметь обычное условие для твердого тела при ударе

$$u = \partial \varphi / \partial y = w(t - t_0)$$

Для функции φ при деформируемом теле получим следующие граничные условия:

$$\varphi(x, y, t) = 0 \quad M \in s \quad (y = 0)$$

$$\partial \varphi / \partial y - k \varphi = w(t - \omega x^2) \quad M \in s$$

Вводим новую функцию

$$\psi(x, y, t) \equiv \partial \varphi / \partial y - k \varphi$$

которая также представляет собой потенциал и удовлетворяет волновому уравнению, аналогичному (2), и граничным условиям

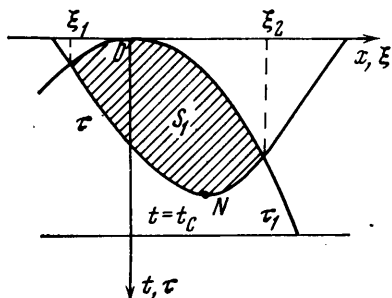
$$\psi(x, y, t) = 0 \quad M \in s \quad (y=0) \quad (10)$$

$$\psi(x, y, t) = w(t - \omega x^2) \quad M \in s$$

Значение функции $\psi(x, y, t)$, удовлетворяющее волновому уравнению (2) и граничным условиям (10), находится с помощью потенциала двойного слоя, как это сделано, например, в [5]

$$\psi(x, y, t) = -\frac{c}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{s_1} \frac{w(\tau - \omega \xi^2) d\tau d\xi}{[c^2(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{1/2}} \quad (11)$$

где s_1 — область, отсекаемая конусом Маха от области s , вершина которого находится в точке (x, y, t) , принадлежащей пространству Ω , а ось конуса параллельна оси t (фиг. 3). При этом за линию пересечения берется ветвь гиперболы



Фиг. 3

$$\tau = t - (1/c) [(\xi - x)^2 + y^2]^{1/2} \quad (12)$$

вершина которой находится в точке $N(t - y/c, x)$.

Пределы интегрирования в поверхностном интеграле (11) следующие:

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad \omega \xi^2 \leq \tau \leq t - (1/c) \times [(\xi - x)^2 + y^2]^{1/2}$$

где ξ_1 и ξ_2 — абсциссы пересечения точек параболы $\tau_1 = \omega \xi^2$ с ветвью гиперболы (12), они являются наименьшими по абсолютной величине действительными корнями уравнения

$$P_1 \xi^4 + P_2 \xi^2 + P_3 \xi + P_4 = 0 \quad (13)$$

$$P_1 = \omega^2 c^2, \quad P_2 = -(1 + 2\omega c^2 t), \quad P_3 = 2x, \quad P_4 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 \quad (14)$$

Решая уравнение (13), получим $\xi_1 = f_1(x, y, t)$, $\xi_2 = f_2(x, y, t)$, где (x, y, t) — точка пространства Ω

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= -\frac{c}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{\omega \xi^2}^{t - (1/c)[(\xi - x)^2 + y^2]^{1/2}} \frac{w(\tau - \omega \xi^2) d\tau}{[c^2(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{w}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ (1/c) [c^2(t - \omega \xi^2)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + (t - \omega \xi^2) \ln \frac{[(\xi - x)^2 + y^2]^{1/2}}{c(t - \omega \xi^2) + [c^2(t - \omega \xi^2)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{1/2}} \right\} d\xi \end{aligned}$$

Теперь для нахождения функции $\varphi(x, y, t)$ необходимо решить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$d\varphi / dy - k\varphi = \psi(x, y, t) \quad (15)$$

с граничным условием $\varphi(x, y, t) = 0$ при $y = y_0$, где y_0 — ордината точки M^0 , находящейся на поверхности фронта волны.

Применяя метод вариации произвольной постоянной, найдем решение уравнения (15); интегрирование ведется по направлению MM , перпендикулярному плоскости xt

$$\varphi(x, y, t) = \exp[k(y - y_0)] \int_{y_0}^y \psi(x, \eta, t) \exp[-k(\eta - y_0)] d\eta \quad (16)$$

Интегрируя (16) по частям, получим окончательно

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & \frac{w}{\pi} \left\{ F(x, y, t) - F(x, y_0, t) \exp[k(y - y_0)] + \right. \\ & \left. + k \exp[k(y - y_0)] \int_{y_0}^y F(x, \eta, t) \exp[-k(\eta - y_0)] d\eta \right\} \\ F(x, y, t) = & \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ c^{-1} [c^2(t - \omega\xi^2)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{1/2} + \right. \\ & \left. + (t - \omega\xi^2) \ln \frac{[(\xi - x)^2 + y^2]^{1/2}}{c(t - \omega\xi^2) + [c^2(t - \omega\xi^2)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{1/2}} \right\} d\xi \end{aligned}$$

Выражение (17) будет решением волнового уравнения (2) в объеме Ω , где имеет место движение жидкости при граничных и начальных условиях (7) и (8). Нетрудно заметить, что на фронте волны (при $y = y_0$) потенциал перемещений $\varphi(x, y, t)$ превращается в нуль. После определения функции φ можно найти перемещение оболочки в каждый момент времени, следовательно, и форму деформированной поверхности

$$u_1 = (\partial\varphi / \partial y) = w(t - \omega x^2) + k\varphi \quad (y = 0)$$

Давление, действующее со стороны жидкости на оболочку

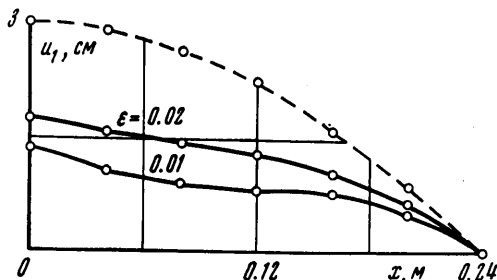
$$p = -\varepsilon \rho_0 \partial^2 u_1 / \partial t^2$$

Значения функции $\varphi(x, y, t)$, на основании которой могут быть найдены перемещения оболочки и давление, действующее на нее, определены численным методом [6]. На основании симметрии задачи относительно оси t половина области s была разбита в сетку и вычислялись значения функции φ при $y = 0$ в 67 точках, при этом

$$\begin{aligned} \xi_1 = f_1(x, t) &= \frac{1 - [1 - 4\omega c(x - ct)]^{1/2}}{2\omega c} \\ \xi_2 = f_2(x, t) &= \frac{-1 + [1 - 4\omega c(x + ct)]^{1/2}}{2\omega c} \end{aligned}$$

где (x, t) — точка области s .

Уравнение поверхности фронта волны $y_0 = f(x, t)$ на основании обычных методов дифференциальной геометрии.



Фиг. 4

В качестве примера рассмотрим случай, когда скорость цилиндрической оболочки при ударе $w = 500$ м/сек; внешний радиус оболочки $R = 1$ м, плотность материала $\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³. Рассматриваемая жидкость — вода, плотность которой $\rho = 10^3$ кг/м³; скорость звука в воде $c = 1450$ м/сек.

Вычисления дают

$$\alpha = 19^\circ, \quad \omega = 107 \cdot 10^{-5} \text{ сек} \cdot \text{м}^{-2}, \quad x_c = 0.326 \text{ м}, \quad t_c = 112 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$$

На фиг. 4 приводится график изменения перемещения оболочки в зависимости от x в момент $t = 60$ мксек для двух случаев толщины оболочки ($\varepsilon = 0.01$ и 0.02 м). На той же фигуре пунктирной линией показано перемещение, когда тело твердое. Кружками обозначены точки, полученные вычислением.

На основании этих значений перемещения u , после двукратного дифференцирования по времени были определены давления в разных точках оболочки и на основании этого суммарная сила, действующая на нее. При данных значениях параметров оболочки эта сила меняется по закону, близкому к линейному.

Поступило 10 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1947, т. 2, вып. 5.
2. Афанасьев Е. В. Удар тела о тонкую пластину, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. Лотов А. В. Об ударе упругой пластинки о поверхность жидкости. Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 152.
4. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. 12. (Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний.) М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, т. 1, Л.—М., Гостехтеоретиздат, 1934.
6. Жарков Г. М., Рыжов А. Б. Программирование для цифровой вычислительной машины «Наиря». М., Ин-т механ. МГУ, 1969.