

УДК 532.525.2+532.584.1

ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ С ТЯЖЕЛЫМИ ПРИМЕСЯМИ

Г. Н. АБРАМОВИЧ, В. И. БАЖАНОВ, Т. А. ГИРШОВИЧ

(Москва)

Методом интегральных соотношений решена задача о начальном и основном участках затопленной турбулентной струи, содержащей тяжелые примеси. Учитывается влияние примеси на турбулентную структуру струи. Результаты для скорости на оси струи и динамической границы струи согласуются с экспериментом.

В работе [1] рассматривается вопрос о влиянии примеси твердых частиц или пульсационных составляющих скорости турбулентной струи, содержащей тяжелые примеси. Ниже предлагается решение для начального и основного участков двухфазной струи, в котором используются результаты [1]. Теоретическое решение сравнивается с экспериментальными данными [2]; при этом учитывается начальная неравномерность полей скорости и концентрации. При решении задачи принимаются следующие допущения:

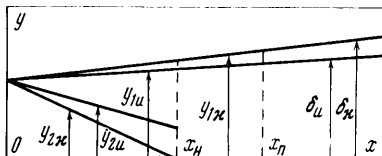
- 1) тяжелая примесь струи представляет собой сферические частицы одинаковых размеров;
- 2) диаметр твердой частицы или капли значительно меньше пути смещения l ;
- 3) обтекание частицы считается ламинарным и принимается, что коэффициент сопротивления частицы можно определять по формуле Стокса¹;
- 4) границы зон смещения по скорости и концентрации в начальном участке и, соответственно границы основного участка струи по скорости и концентрации не совпадают (см. фиг. 1);
- 5) принимается, что профили скорости и концентрации в пограничном слое струи подобны и описываются профилем Шлихтинга [2, 3];
- 6) дифференциальные уравнения пограничного слоя струи записываются в предположении, что тяжелая примесь непрерывно распределена в газе, образуя как бы «газ» частиц. Дискретность же частиц учитывается при рассмотрении механизма влияния примеси на турбулентную структуру струи.

Задача решается методом интегральных соотношений [4]. Два интегральных соотношения представляют собой условия постоянства импульса и постоянства расхода примеси в струе. Два других интегральных соотношения представляют собой соответственно интегральное соотношение энергии и его аналог для переноса примеси. Полученные уравнения вместе с формулой для касательных напряжений Прандтля и ее аналогом для переноса примеси позволяют решить поставленную задачу. Принимается, что начальный участок кончается там, где кончается ядро постоянных концентраций (или ядро постоянных скоростей, если оно кончается раньше). За начальным участком следует переходный участок струи. Абсцисса конца переходного участка определялась по методу [5].

1. Пусть струя, содержащая тяжелые примеси, вытекает из бесконечно тонкой щели или из точечного отверстия в пространство, затопленное той же жидкостью. Уравнения пограничного слоя такой струи будут иметь вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v_* \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \langle u'v' \rangle y^j)$$

¹ Это предположение не обязательно. В [1] рассматриваются случаи и других возможных режимов обтекания частицы.



Фиг. 1

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\kappa y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(v_*\kappa y^j) = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\langle v'\kappa' \rangle y^j}{1+\kappa} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_* y^j) = 0 \quad \left(v_* = v \left(1 + \frac{\langle \kappa' v' \rangle}{\rho v} \right) \right)$$

Здесь κ — весовая концентрация $\kappa = G_s / G_a$, G_s , G_a — весовой расход примеси и воздуха соответственно, ρ — плотность смеси ($\rho = \rho_a(1 + \kappa)$), u' , v' , κ' — пульсационные составляющие продольной и поперечной скоростей и концентрации, $j = 0$ соответствует случаю плоской струи, $j = 1$ — случаю осесимметричной струи.

Сделаем обычное предположение, что

$$\kappa' = l_\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial y} = \frac{l_u}{\alpha} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \quad \left(\alpha = \frac{l_u}{l_\kappa} \right) \quad (1.2)$$

Согласно [1] пульсационные составляющие скорости турбулентной струи с учетом влияния тяжелой примеси определяются выражением

$$\frac{u'}{u_0'} = \frac{v'}{v_0'} = \frac{1 + \kappa v_p' / v_0'}{1 + \kappa} \quad (v_p' = v' - v_p) \quad (1.3)$$

Здесь u_0' , v_0' — пульсационные скорости турбулентного моля без тяжелых примесей, v_p — пульсационная скорость тяжелой частицы. Относительно v_0' и u_0' делаем обычное предположение

$$u_0' \sim v_0' \sim l \partial u / \partial y \quad (1.4)$$

Величина v_p' / v_0' в случае предположения 3) определяется из соотношения

$$f\left(\frac{v_p'}{v_0'}\right) = \ln \frac{v_0'}{v_p'} + \frac{v_p'}{v_0'} - 1 = \frac{18\mu_a}{|v_0'| \rho_p D^2} (1 + \kappa)^2 l_u \quad (1.5)$$

Левая часть этого выражения достаточно просто аппроксимируется, и после некоторых преобразований получается следующая формула:

$$\frac{v_p'}{v_0'} = \frac{e^a - 0.807}{1.792} - \left[\left(\frac{e^a - 0.807}{1.792} \right)^2 - 1.133 \right]^{1/2}$$

$$a = 1 + \frac{18\mu_a}{|v_0'| \rho_p D^2} (1 + \kappa)^2 l_u \quad (1.6)$$

В соответствии с (1.2), (1.3) и (1.4) система (1.1) перепишется в виде

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v_* \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \rho l_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{1 + \kappa v_p' / v_0'}{1 + \kappa} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\kappa y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(v_*\kappa y^j) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \frac{l_u^2}{\alpha} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1 + \kappa v_p' / v_0'}{(1 + \kappa)^2} \right] \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho y^j u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_* y^j) = 0$$

Для решения задачи необходимо решить систему (1.7) при следующих граничных условиях:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y = \delta_u), \quad \kappa = 0, \quad \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 0 \quad (y = \delta_\kappa) \quad (1.8)$$

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u_m, \quad \kappa = \kappa_m, \quad \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 0 \quad (y = 0)$$

Согласно методу интегральных соотношений, запишем первое уравнение системы (1.7) при помощи третьего уравнения в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_* u y^j) = - \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \rho l_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{1 + \kappa v_p' / v_o'}{1 + \kappa} \right)^2 \right]$$

и проинтегрируем его от 0 до δ_u . С учетом (1.8) будем иметь

$$\int_0^{\delta_u} \rho u^2 y^j dy = \frac{I_0}{(2\pi)^j}$$

где I_0 — начальный импульс струи.

Переходя к безразмерной координате $\eta = y / \delta_u$, находим

$$u_m = \frac{I_0}{(2\pi)^j \delta_u^2 \rho_a (A_1 + A_2 \kappa_m)} \quad (1.9)$$

$$A_1 = \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 \frac{y^j}{\delta_u} d\eta, \quad A_2 = \int_0^1 \frac{\kappa}{\kappa_m} \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 \frac{y^j}{\delta_u} d\eta \quad (1.10)$$

Второе уравнение системы (1.7) проинтегрируем по y в пределах от 0 до δ_x . С учетом граничных условий (1.8) будем иметь

$$\int_0^{\delta_x} u \kappa y^j dy = \frac{G_0}{(2\pi)^j \rho_a}$$

Здесь G_0 — начальный расход примеси в струе. Переходя к безразмерной координате $\eta = y / \delta_u$, после несложных преобразований получаем

$$u_m = \frac{G_0}{(2\pi)^j \rho_a \delta_u^2 \kappa_m A_3} \quad (1.11)$$

$$A_3 = \int_0^{\eta_\Gamma} \frac{\kappa}{\kappa_m} \frac{u}{u_m} \frac{y^j}{\delta_u} d\eta, \quad \eta_\Gamma = \frac{\delta_x}{\delta_u} \quad (1.12)$$

Для получения третьего интегрального соотношения умножим первое уравнение системы (1.7) на u и перепишем его с помощью третьего в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^3 y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u^2 v_* u y^j) = - 2u \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \rho l_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{1 + \kappa v_p' / v_o'}{1 + \kappa} \right)^2 \right] \quad (1.13)$$

Проинтегрируем (1.13) по y от 0 до δ_u . Тогда с учетом (1.8) после несложных преобразований получим

$$\frac{d}{dx} [u_m^3 \delta_u^2 (B_1 + B_2 \kappa_m)] = 2\delta_u \left(\frac{l_u}{\delta_u} \right)^2 u_m^3 (B_3 + B_4 \kappa_m) \quad (1.14)$$

$$B_1 = \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m} \right)^3 \frac{y^j}{\delta_u} d\eta, \quad B_3 = \int_0^1 \frac{y^j}{\delta_u} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_m} \right) \right]^3 \left(\frac{1 + \kappa v_p' / v_o'}{1 + \kappa} \right)^2 d\eta \quad (1.15)$$

$$B_2 = \int_0^1 \frac{\kappa}{\kappa_m} \left(\frac{u}{u_m} \right)^3 \frac{y^j}{\delta_u} d\eta, \quad B_4 = \int_0^1 \frac{\kappa y^j}{\kappa_m \delta_u} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_m} \right) \right]^3 \left(\frac{1 + \kappa v_p' / v_o'}{1 + \kappa} \right)^2 d\eta$$

Для получения четвертого интегрального соотношения умножим второе уравнение системы (1.7) на объемную концентрацию $\gamma = \kappa (1 + \kappa)^{-1}$ и перепишем его с помощью третьего уравнения той же системы в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \gamma^2 y^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_* \gamma^2 y^j) = -2\gamma \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \frac{l_u^2}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \frac{1 + \kappa v_p' / v_o'}{(1 + \kappa)^2} \right] \quad (1.16)$$

Проинтегрируем (1.16) по y от 0 до δ_κ . Используя (1.8), находим

$$\frac{d}{dx} u_m \kappa_m^2 \delta_u^2 C_1 = 2 \left(\frac{l_u}{\delta_u} \right)^2 u_m \delta_u C_2 \kappa_m^2$$

$$C_1 = \int_0^{\eta_\Gamma} \frac{u}{\alpha_m} \left(\frac{\kappa}{\kappa_m} \right)^2 \frac{y^j}{\delta_u} \frac{d\eta}{1 + \kappa} \quad (1.17)$$

$$C_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\eta_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_m} \right) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\kappa}{\kappa_m} \right) \right]^2 \frac{y^j}{\delta_u} \frac{1 + \kappa v_p' / v_o'}{1 + \kappa} d\eta$$

Уравнения (1.9), (1.11), (1.14) и (1.17) — уравнения для определения неизвестных u_m , κ_m , δ_u и δ_κ .

Вычислим A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , определяемые выражениями (1.10), (1.12) и (1.15). Для этого будем считать, что относительный профиль скорости можно задать формулой Шлихтинга, т. е.

$$\frac{u}{u_m} = \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_u} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (0 \leq \eta \leq 1), \quad \frac{u}{u_m} = 0 \quad (\eta > 1) \quad (1.18)$$

Далее согласно предположениям 4) и 5) будем считать, что относительный профиль концентраций тоже задается уравнением Шлихтинга, но концентрационная граница отличается от динамической, т. е.

$$\frac{\kappa}{\kappa_m} = \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_\kappa} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (0 \leq \eta \leq \eta_\Gamma), \quad \frac{\kappa}{\kappa_m} = 0 \quad (\eta > \eta_\Gamma) \quad (1.19)$$

Подставляя (1.18) и (1.19) в (1.10), (1.12) и (1.15), находим для осесимметричной струи

$$A_1 = 0.0667$$

$$A_2 = \begin{cases} 0.1286\eta_\Gamma^2 + 0.1038\eta_\Gamma^5 + 0.0054\eta_\Gamma^8 - 0.1582\eta_\Gamma^{7/2} - 0.0364\eta_\Gamma^{13/2} & (\eta_\Gamma \leq 1) \\ 0.0067 - 0.0281\eta_\Gamma^{-3/2} + 0.0045\eta_\Gamma^{-3} & (\eta_\Gamma \geq 1) \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} 0.1286\eta_\Gamma^2 - 0.0791\eta_\Gamma^{7/2} + 0.0173\eta_\Gamma^5 & (\eta_\Gamma \leq 1) \\ 0.1286 - 0.0791\eta_\Gamma^{-3/2} + 0.0173\eta_\Gamma^{-3} & (\eta_\Gamma \geq 1) \end{cases} \quad (1.20)$$

$$B_1 = 0.0430$$

$$B_2 = \begin{cases} 0.0431 - 0.0139\eta_\Gamma^{-3/2} + 0.0017\eta_\Gamma^{-3} & (\eta_\Gamma \geq 1) \\ 0.1286 - 0.2374\eta_\Gamma^{7/2} + 0.2596\eta_\Gamma^5 - 0.1822\eta_\Gamma^{13/2} + \\ + 0.0807\eta_\Gamma^2 - 0.0207\eta_\Gamma^{19/2} + 0.0023\eta_\Gamma'' & (\eta_\Gamma \leq 1) \end{cases}$$

Аналогично получаются формулы для плоской струи, содержащей тяжелые примеси.

Так как на практике обычно очень трудно получить равномерное поле скоростей и концентраций на выходе из сопла, в расчетных формулах следует учесть неравномерность начальных полей скорости и расхода примеси. Эти неравномерности должны учитываться при расчете начального расхода примеси и импульса струи.

$$G_0 = 2F_0 g_{0m} \int_0^1 \frac{g_{n_0}}{g_{0m}} \bar{r} d\bar{r} \quad (1.21)$$

$$I_0 = \frac{2F_0}{g} u_{0m} g_{0m} \rho_B \int_0^1 \frac{u_0 g_{n_0}}{u_{0m} g_{0m}} \bar{r} d\bar{r} + 2F_0 u_{0m}^2 \rho_B \int_0^1 \left(\frac{u_0}{u_{0m}} \right)^2 \bar{r} d\bar{r} \quad (1.22)$$

Здесь g_{0m} , u_{0m} — расход примеси и скорость на оси среза сопла.

Подставляя (1.21) и (1.22) в (1.9) и (1.11) и решая эти уравнения относительно u_m и κ_m , находим

$$\frac{u_m}{u_{0m}} = \left[\frac{n_1 \kappa_{0m} + n_2}{\delta_u^2 (A_1 + A_2 \kappa_m)^2} \right]^{1/2}$$

$$\kappa_m = \frac{A_3 (\kappa_{0m} n_3)^2 + [A_2^2 (\kappa_{0m} n_3)^4 + 8(n_1 \kappa_{0m} + n_2) \kappa_{0m} n_3 A_1 A_3^2 \delta_u^2]^{1/2}}{4A_3^2 \delta_u^2 (n_1 \kappa_{0m} + n_2)} \quad (1.23)$$

$$n_1 = 2 \int_0^1 \frac{u_0 g_0}{u_{0m} g_{0m}} \bar{r} d\bar{r}, \quad n_2 = 2 \int_0^1 \left(\frac{u_0}{u_{0m}} \right)^2 \bar{r} d\bar{r}, \quad n_3 = 2 \int_0^1 \frac{g_0}{g_{0m}} \bar{r} d\bar{r}$$

Производя дифференцирование в уравнениях (1.14) и (1.17) и решая их относительно δ_u' и η_Γ' , получим

$$\delta_u' = \frac{\beta^2 [(B_3 + B_4 \kappa_m) - \kappa_m C_2 \varepsilon_2 / \varepsilon_5] (2A_1 + A_2 \kappa_m)}{F - \kappa_m \varepsilon_2 \varepsilon_4 / \varepsilon_5} \quad (1.24)$$

$$\eta_\Gamma' = \frac{2\beta^2 C_2 A_3 (2A_1 + A_2 \kappa_m) [F - (B_3 + B_4 \kappa_m) \varepsilon_4 / C_2]}{\delta_u \varepsilon_5 (F - \kappa_m \varepsilon_2 \varepsilon_4 / \varepsilon_5)} \quad (1.25)$$

$$F = B_1 A_2 \kappa_m - A_1 B_1 - 2A_1 B_2 \kappa_m$$

$$\varepsilon_2 = 3B_1 A_2 m_3 + B_2 A_2 m_3 \kappa_m - 3B_1 A_3 m_2 + A_3 m_4 (2A_1 + A_2 \kappa_m) - 2A_1 B_2 m_3, \quad \varepsilon_4 = (m_6 \kappa_m - c_1) (A_1 + A_2 \kappa_m)$$

$$\varepsilon_5 = -3C_1 m_3 A_2 \kappa_m + C_1 m_2 A_3 \kappa_m - 4C_1 A_1 m_3 + m_5 A_3 (2A_1 + A_2 \kappa_m) + 2m_3 m_6 \kappa_m (A_1 + A_2 \kappa_m) - m_6 A_3 m_2 \kappa_m^2$$

$$m_2 =$$

$$= \begin{cases} 0.2570 \eta_\Gamma + 0.5200 \eta_\Gamma^4 - 0.5537 \eta_\Gamma^{5/2} + 0.0430 \eta_\Gamma^7 - 0.2366 \eta_\Gamma^{11/2} & (\eta_\Gamma \leq 1) \\ 0.0421 \eta_\Gamma^{-5/2} - 0.0134 \eta_\Gamma^{-4} & (\eta_\Gamma \geq 1) \end{cases}$$

$$m_3 = \begin{cases} 0.2570 \eta_\Gamma - 0.2768 \eta_\Gamma^{5/2} + 0.0866 \eta_\Gamma^4 & (\eta_\Gamma \leq 1) \\ 0.1186 \eta_\Gamma^{-5/2} - 0.0520 \eta_\Gamma^{-4} & (\eta_\Gamma \geq 1) \end{cases}$$

$$m_4 = \begin{cases} -0.8309 \eta_\Gamma^{5/2} + 1.2980 \eta_\Gamma^4 - 1.1843 \eta_\Gamma^{11/2} + 0.6456 \eta_\Gamma^7 - \\ - 0.1966 \eta_\Gamma^{17/2} + 0.0253 \eta_\Gamma^{10} & (\eta_\Gamma \leq 1) \\ 0.0207 \eta_\Gamma^{-5/2} - 0.0051 \eta_\Gamma^{-4} & (\eta_\Gamma \geq 1) \end{cases}$$

$$m_5 = \int_0^{\eta_\Gamma} \frac{3(1 - \eta^{3/2}) \eta^{5/2} \eta_\Gamma^{-5/2} (1 - \eta^{3/2} \eta_\Gamma^{-3/2})^3 (2 + \kappa)}{(1 + \kappa)^2} d\eta$$

$$m_6 = \int_0^{\eta_\Gamma} \frac{(1 - \eta^{3/2})^2 (1 - \eta^{3/2} \eta_\Gamma^{-3/2})^6 \eta}{(1 + \kappa)^2} d\eta \quad (1.26)$$

Для интегрирования дифференциальных уравнений (1.24) и (1.25) требуются два условия. В конце переходного участка, с которого начина-

ется интегрирование этих уравнений, должны быть заданы ордината границы струи по скорости $(\delta_u)_n$ и величина η_r . Значение $(\delta_u)_n$ можно найти из условия, что в переходном сечении скорость на оси струи равна скорости на оси среза сопла, а величины η_r и абсциссы переходного сечения должны быть найдены из решения задачи для начального участка струи.

В случае отсутствия примеси из уравнений (1.23) ÷ (1.26) следует решение для обычной затопленной струи

$$\frac{u_m}{u_{0m}} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{n_2}{A_1} \right)^{1/2}, \quad \delta = -2\beta^2 \frac{B_3}{B_1} x = Cx \quad (1.27)$$

2. Для решения задачи о начальном участке струи, содержащей тяжелые примеси, требуется решить систему (1.7) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad (y = 0), \quad \kappa = 0, \quad \partial \kappa / \partial y = 0 \quad (y = y_{1\kappa}) \\ \kappa &= \kappa_0, \quad \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 0 \quad (y = y_{2\kappa}), \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y = y_{1u}) \\ u &= u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y = y_{2u}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так же как и в случае основного участка струи, будем считать, что относительные профили скорости и концентрации известны и описываются формулой Шлихтинга

$$\begin{aligned} \frac{u_0 - u}{u_0} &= \left[1 - \left(\frac{y_{1u} - y}{\delta_u} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (y_{2u} \leq y \leq y_{1u}), \quad \frac{u_0 - u}{u_0} = 1 \quad (y > y_{1u}) \\ \frac{\kappa_0 - \kappa}{\kappa_0} &= \left[1 - \left(\frac{y_{1\kappa} - y}{\delta_\kappa} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (y_{2\kappa} \leq y \leq y_{1\kappa}), \quad \frac{\kappa_0 - \kappa}{\kappa_0} = 1 \quad (y > y_{1\kappa}) \\ \delta_u &= y_{1u} - y_{2u}, \quad \delta_\kappa = y_{1\kappa} - y_{2\kappa} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этом случае неизвестными будут четыре границы зон смешения: две по скорости и две по концентрации. Четыре интегральных соотношения, используемые для их определения, находим аналогично тому, как это делалось в основном участке — путем интегрирования преобразованных соответствующим образом уравнений количества движения и расхода примеси поперек струи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{y_{1u}} \rho u^2 dy &= 0, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{y_{1\kappa}} u \kappa dy = 0 \\ \frac{d}{dx} \int_0^{y_{1u}} \rho u^3 dy &= 2 \int_0^{y_{1u}} \rho_B l_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 \frac{(1 + \kappa v_p' / v_0')^2}{1 + \kappa} dy \\ \frac{d}{dx} \int_0^{y_{1\kappa}} u \kappa^2 dy &= 2 \int_0^{y_{1\kappa}} \frac{l_u^2}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial y} \right)^2 (1 + \kappa v_p' / v_0') dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

Так как на границах зон смешения по скорости и концентрации условия постоянны, то можно ожидать, что решение задачи о начальном участке будет автомодельным. В случае очень мелкой примеси это действительно выполняется, так как частицы полностью увлекаются жидкостью при пульсационных движениях моля, и величина относительной разности скоростей частицы и моля v_p' / v_0' равна нулю. С увеличением диаметра частиц величина v_p' / v_0' становится отличной от нуля и будет существенно зависеть от x , так как путь, проходимый турбулентным молям, а значит и время, в течение которого частица воздействует на моль, растет с ростом x .

Тем не менее предварительные расчеты показали, что даже при сравнительно больших значениях концентрации параметры $\delta_u / \delta_x = a$ и $(y_{1x} - y_{2u}) / \delta_x = b$ остаются практически постоянными, что позволяет существенно упростить решение. Кроме того, оказалось, что внутренняя граница зоны смешения по концентрации ближе к оси струи, чем внутренняя граница зоны смешения по скорости; поэтому концом начального участка считалось сечение, в котором кончается ядро постоянной концентрации. Наружные границы зон смешения по скорости и концентрации, вообще говоря, могут меняться местами. При получении алгоритма задачи учитывались оба варианта расположения наружных границ зон смешения.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \int_k^1 \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 d\eta_u, & A_{12} &= \int_k^1 \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 \frac{\kappa}{\kappa_0} d\eta_u, & A_{13} &= \int_b^1 \frac{\kappa}{\kappa_0} d\eta_x \\
 A_{21} &= \int_k^1 \frac{u}{u_0} \frac{\kappa}{\kappa_0} d\eta_u, & A_{31} &= \int_k^1 \left(\frac{u}{u_0} \right)^3 d\eta_u, & A_{32} &= \int_0^1 \left(\frac{u}{u_0} \right)^3 \frac{\kappa}{\kappa_0} d\eta_u \\
 A_{41} &= \int_k^1 \frac{u}{u_0} \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^2 d\eta_u, & A_{43} &= \int_b^1 \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^2 d\eta_x \\
 E_3 &= \int_k^1 (\eta_u^{1/2} - \eta_u^2)^3 \frac{(1 + \kappa v_p' / v_0')^2}{1 + \kappa} d\eta_u + \int_0^1 (\eta_u^{1/2} - \eta_u^2)^3 d\eta_u \\
 E_4 &= \int_k^1 (\eta_u^{1/2} - \eta_u^2) (\eta_x^{1/2} - \eta_x^2)^2 \frac{1 + \kappa v_p' / v_0'}{1 + \kappa} d\eta_u
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $k = 0$ при $b > a$; $k = 1 - b/a$ при $b < a$. Уравнения (2.3) в предположении постоянства величин a и b и при использовании обозначений (2.4) примут вид

$$\begin{aligned}
 (A_{11} + \kappa_0 A_{12}) \delta_u' + y_{2u}' + A_{13} \kappa_0 \delta_x' + \kappa_0 y_{2x}' &= 0 \\
 A_{21} \delta_u' + A_{13} \delta_x' + y_{2x}' &= 0 \\
 (A_{31} + \kappa_0 A_{32}) \delta_u' + y_{2u}' + A_{13} \kappa_0 \delta_x' + \kappa_0 y_{2x}' &= -54 \beta^2 E_3 \\
 A_{41} \delta_u' + A_{43} \delta_x' + y_{2x}' &= -54 \frac{\beta^2}{a} \left(\frac{\delta_u}{\delta_x} \right)^2 E_4
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

После некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}
 \delta_u' &= \frac{54 \beta^2 E_3}{0.0695 + \kappa_0 (A_{12} - A_{13})} \\
 \delta_x' &= \frac{\delta_u'}{a} \frac{a^2 E_4 [0.0695 + \kappa_0 (A_{12} - A_{32})] - A_{21} + A_{41}}{E_3 (A_{13} - A_{43})} \\
 y_{2u}' &= -A_{11} \delta_u' - \kappa_0 (A_{12} - A_{21}) \delta_u' \\
 y_{2x}' &= -A_{21} \delta_u' - A_{13} \delta_x'
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, для решения задачи о начальном участке струи с тяжелыми примесями требуется проинтегрировать систему (2.6) при условиях

$$\delta_u = \delta_x = 0, \quad y_{2u} = y_{2x} = 1 \quad (x = 0) \tag{2.7}$$

Так как границы зон смешения, по существу, остаются линейными даже при сравнительно больших значениях концентрации, то для определения величин a и b отношения δ_u к δ_x и $y_{1x} - y_{2u}$ к δ_x можно заменить отношением их производных. При этом условии величина a найдется из уравнения

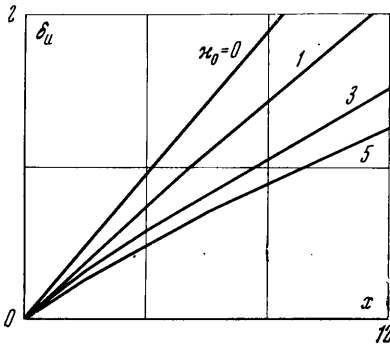
$$a^3 - \frac{E_3 \alpha [(A_{21} - A_{41})a + A_{13} - A_{43}]}{E_4 (0.00695 + \kappa_0 (A_{12} - A_{32}))} = 0 \quad (2.8)$$

а величина b — из уравнения

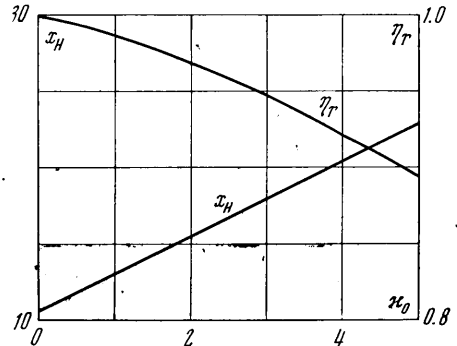
$$b = 1 - A_{13} + a[A_{11} + A_{12}\kappa_0 - A_{21}(1 + \kappa_0)] \quad (2.9)$$

Значения a и b в начальной точке расчета при $x=0$ находились из уравнений (2.8) и (2.9) методом последовательных приближений.

Решение уравнений (2.6) — (2.9) проводилось на ЭВМ. На фиг. 2 и 3 показано влияние начальной концентрации на ширину зоны смешения и длину начального участка. Расчет проводился для относительного диаметра частиц $D = 1.5 \cdot 10^{-3}$, скорости на срезе сопла $u_0 = 56$ м/сек и $\alpha = 1$. Все линейные размеры на графике отнесены к полуширине сопла. Как и следовало ожидать, с ростом начальной концентрации длина начального участка растет, а струя становится уже. Для оценки влияния относительного диаметра частиц был проведен расчет для трех относительных диа-



Фиг. 2



Фиг. 3

метров. Оказалось (см. фиг. 4), что с ростом относительного диаметра длина начального участка становится короче, а ширина зоны смешения растет, приближаясь к ширине струи без примеси. Это происходит из-за того, что чем крупнее частицы, тем слабее они увлекаются пульсационным движением молей и, следовательно, тем меньше влияние их на степень турбулентности струи.

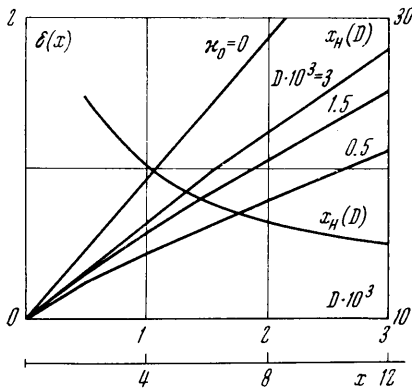
3. Теоретическое решение задачи сравнялось с экспериментальными данными [2]. Расчет проводился следующим образом. По формулам (1.23) определялись коэффициенты неравномерности начальных профилей расхода примеси и скорости. При этом начальные профили, полученные в эксперименте [2], аппроксимировались с помощью полиномов, коэффициенты которых определялись по методу наименьших квадратов. Средний диаметр частиц порошка, для которого проводилось сравнение расчета с экспериментом, определялся по кривой рассевки, которая строилась авторами [2] по количеству остатка на ситах, имеющих различный диаметр ячеек, т. е. по графику функции распределения

$$F(x) = p(X < x) \quad (0 \leq x \leq x_k) \quad (3.1)$$

Тогда средний диаметр частиц определялся как математическое ожидание по формуле

$$D_0 = \int_0^{x_k} xF'(x) dx = x_k - \int_0^{x_k} F(x) dx \quad (3.2)$$

В расчет начального участка закладывались истинные значения скорости и концентрации на оси среза сопла. Неравномерность полей расхода примеси и скорости на срезе сопла должна сказаться на длине начального участка [5]. Поэтому счита-



Фиг. 4

лось, что поля равномерны, но истечение происходит из сопла меньшей площади с радиусом $r_0 - \delta^{**}$. Величина δ^{**} определится по формуле

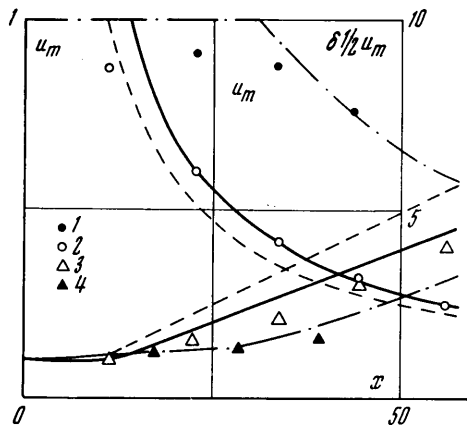
$$(\delta^{**})^2 = \int_0^{r_0} \frac{\rho u}{\rho_0 u_{0m}} \left(1 - \frac{u}{u_{0m}} \right) r dr \quad (3.3)$$

Из расчета определялась абсцисса переходного сечения и величина η_T , которая, как указывалось выше, для начального участка есть величина постоянная для заданной концентрации. Абсцисса переходного сечения определялась путем линейного продолжения границы струи, пока ее ширина не станет равной ширине в переходном сечении δ_T , определенной из расчета основного участка струи.

Интегрирование уравнений (1.24) и (1.25) от найденного таким образом переходного сечения проводилось на ЭЦВМ. Постоянная α , которая является аналогом числа Прандтля, принималась равной единице. На фиг. 5 проводится сравнение расчета u_m и δ_m с экспериментальными данными для двух значений начальной концентрации: $\kappa_{0m} = 6$ (штрих-пунктирные кривые) и $\kappa_{0m} = 0.34$ (сплошные кривые). Штриховой линией на графике показаны скорость на оси и граница струи без примеси. На графике u_m отнесено к значению скорости на оси среза сопла, а линейные размеры — к радиусу сопла. Из графика видно, что совпадение расчетных и экспериментальных данных в основном удовлетворительное. Расчет также показал, что теоретический относительный расход примеси при больших значениях концентрации не согласуется с экспериментальными данными. Это, видимо, объясняется тем, что число α , принятое в расчете, не соответствует истине.

Его можно найти из эксперимента, и тогда α будет второй эмпирической константой.

Экспериментальных данных по исследованию начального участка струи, содержащей тяжелые примеси, пока в литературе, по-видимому, нет. Поэтому не удается провести подробное сравнение с экспериментом теоретического решения задачи о начальном участке струи с тяжелыми примесями. Полученное решение качественно согласуется с имеющимися представлениями о влиянии тяжелой примеси на параметры начального участка струи.



Фиг. 5

Поступило 27 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. О влиянии примеси твердых частиц или капель на структуру турбулентной газовой струи. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 5.
2. Лаатс М. К., Фришман Ф. А. О допущениях, применяемых при расчете двухфазной струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
3. Голдшмидт, Эскинази. Двухфазное турбулентное течение в плоской струе. Прикл. механ., 1966, № 4.
4. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.