

УДК 532. 517.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДАЛЬНЕГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА

Л. И. СКУРИН

(Ленинград)

Рассматривается осесимметричный дальний турбулентный след в совершенном газе. В п. 1 предложен интегральный метод расчета как первых моментов гидродинамических полей, так и интенсивности турбулентности и среднеквадратичных значений пульсаций энтальпии. (Вся система уравнений замкнута с помощью полуэмпирических гипотез.) В п. 2 в предположении отсутствия вязких градиентов получено приближенное аналитическое решение задачи, приведены асимптотические (при $x \rightarrow \infty$) выражения для всех названных величин. В п. 3 оцениваются численные значения опытных констант путем сравнения расчета с известными экспериментальными данными.

1. Предполагается, что первые моменты гидродинамических полей в дальнем следе для совершенного газа могут быть определены из системы уравнений пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x r}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_r r}{\partial r} &= 0 \\ \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} &= \rho_e v_e \frac{dv_e}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ \rho v_x \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial H}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\mu}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial H}{\partial r} + (\text{Pr} - 1) v_x \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] \right\} \\ \rho / \rho_e &= h_e / h, \quad H = h + v_x^2 / 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, r — отнесенные к линейному масштабу d соответственно продольная и радиальная координаты, v_x, v_r — отнесенные к v_∞ (индекс ∞ относится к условиям в невозмущенном потоке) составляющие вектора скорости; h, ρ — отнесенные соответственно к v_∞^2, ρ_∞ энтальпия, плотность; Pr — турбулентное число Прандтля; μ — отнесенный к $\rho_\infty v_\infty d$ коэффициент турбулентной вязкости; индекс e относится к внешней границе следа. Все параметры на внешней границе считаются заданными.

Известно, что турбулентная вязкость в осесимметричном следе стремится к нулю с увеличением продольной координаты. Поэтому, строго говоря, асимптотика при $x \rightarrow \infty$ осесимметричного следа для любого конечного числа Рейнольдса Re_∞ определяется молекулярной вязкостью. Однако для достаточно больших Re_∞ на таких расстояниях от тела, где параметры следа представляют практический интерес во многих задачах, молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной. В связи с этим уравнения (1.1) выписаны без учета молекулярной вязкости.

Уравнение баланса кинетической энергии турбулентности запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \langle \rho v_i'^2 \rangle v_j + \frac{1}{2} \langle \rho v_j' v_i'^2 \rangle + \langle p' v_j' \rangle - \langle v_i' \tau_{ij}' \rangle \right) = \quad (1.2)$$

$$= -\langle \rho v_j' v_i' \rangle \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left\langle \tau_{ij}' \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right\rangle - v_j \langle \rho v_i' \rangle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left\langle p' \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right\rangle$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

где τ_{ij} — тензор трения, штрих означает пульсацию, $\langle \rangle$ — осреднение (знак осреднения у первых моментов опущен), а по повторяющемуся индексу предполагается суммирование. В этом уравнении отбросим последний член слева, имеющий значение лишь вблизи твердых поверхностей. Учитывая относительную малость пульсаций давления [1], пренебрежем последним членом в правой части. Предпоследний член справа также отбрасывается. Численные оценки, проведенные в п. 3, показывают, что он мал по крайней мере при умеренных числах Маха.

Делая в (1.2) оценки типа оценок пограничного слоя и полагая

$$\langle \rho v_r' (v_r'^2 / 2 + p') \rangle = -\mu \partial E / \partial r, \quad \rho \varepsilon = \langle \tau_{ij}' \partial v_j' / \partial x_i \rangle = c \mu E / \Delta^2$$

$$\langle \rho v_r' v_x' \rangle = -\mu \partial v_x / \partial r, \quad E \equiv \langle v_i'^2 \rangle / 2 \approx \langle \rho v_i'^2 \rangle / 2\rho$$
(1.3)

получаем уравнение относительно E

$$\rho v_x \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \right)^2 - c \mu \frac{E}{\Delta^2}$$
(1.4)

Здесь c — эмпирическая постоянная, Δ — отнесенная к d преобразованная полуширина следа (см. ниже (1.7)), которая предполагается пропорциональной масштабу турбулентности.

Уравнение баланса среднеквадратичного значения пульсаций энтальпии $\theta \equiv \langle h'^2 \rangle / 2$ (теплоемкость предполагается постоянной) может быть получено обычным приемом [1] из уравнения энергии. Предполагая, как и при рассмотрении турбулентной энергии, что в этом уравнении важны лишь члены, учитывающие конвективный перенос, турбулентную диффузию, порождение и «диссипацию», и используя аналогичные (1.3) полуэмпирические соотношения

$$\langle \rho v_r' h'^2 / 2 \rangle = (\mu / \text{Pr}) \partial \theta / \partial r, \quad \rho \varepsilon_\theta = \langle \omega_i' \partial h' / \partial x_i \rangle = c_\theta \mu \theta / (\text{Pr} \Delta^2)$$

$$\langle \rho v_r' h' \rangle = -(\mu / \text{Pr}) \partial h / \partial r, \quad \theta \approx \langle \rho h'^2 \rangle / 2\rho$$

(ω_i — вектор теплового потока), можно найти, что в приближении пограничного слоя θ удовлетворяет уравнению (1.4), если заменить в нем μ на μ / Pr , c на c_θ и $(\partial v_x / \partial r)^2$ на $(\partial h / \partial r)^2$. В дальнейшем для сокращения записи уравнения для E и θ будем записывать в виде

$$\rho v_x \frac{\partial S_k}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial S_k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu}{\text{Pr}^{k-1}} \frac{\partial S_k}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\text{Pr}^{k-1}} \left(\frac{\partial w_k}{\partial r} \right)^2 - c_k \frac{\mu}{\text{Pr}^{k-1}} \frac{S_k}{\Delta^2}$$

$$(k = 1, 2), \quad S_1 \equiv E, \quad w_1 \equiv v_x, \quad c_1 \equiv c, \quad S_2 \equiv \theta, \quad w_2 \equiv h, \quad c_2 \equiv c_\theta$$
(1.5)

Граничные условия для системы (1.1), (1.5) имеют вид

$$x = x_H, \quad v_x = v_H(r), \quad h = h_H(r), \quad S_k = S_{kH}(r)$$

$$r = 0, \quad v_r = \partial v_x / \partial r = \partial h / \partial r = \partial S_k / \partial r = 0$$
(1.6)

$$r \rightarrow \infty, \quad v_x \rightarrow v_e, \quad h \rightarrow h_e, \quad S_k \rightarrow 0$$

(индекс H относится к начальному сечению). Профили гидродинамических параметров в начальном сечении могут быть определены из расчета вязкого ближнего следа, используя, например, методику, изложенную в работе [2].

Для решения задачи (1.4), (1.5), (1.6) воспользуемся методом интегральных соотношений. Положим

$$(v_e - v_x) / (v_e - v_0) = \exp [-(\eta / \Delta)^2 \ln 2] \quad (1.7)$$

$$(H_e - H) / v_e^2 = a_1(1 - v_x / v_e) + a_2(1 - v_x^2 / v_e^2) \quad (1.8)$$

$$S_k / S_{k0} = (1 + b_k \eta^2 / \Delta^2) \exp [-(\eta / \Delta)^2 \ln 2] \quad (b_k = \text{const}, k = 1, 2) \quad (1.9)$$

$$\eta^2 = 2 \int_0^r (\rho r / \rho_e) dr$$

индекс 0 относится к оси симметрии следа. Заметим, что представления (1.7)–(1.9) удовлетворяют всем накладываемым на соответствующие функции условиям при $r=0$ и $r \rightarrow \infty$. Неизвестные функции продольной координаты Δ , v_0 , a_1 , a_2 , S_{k0} ($k=1, 2$) определим, потребовав, чтобы удовлетворялись интегральные соотношения, полученные интегрированием поперек вязкого следа уравнений движения, энергии и уравнений (1.5), а также, чтобы уравнения движения и энергии удовлетворялись точно на оси следа.

Интегральные соотношения при учете выражений (1.7)–(1.9) записываются в виде

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_e v_e^2 \frac{\Delta^2}{4 \ln 2} \left(1 - \frac{v_0^2}{v_e^2} \right) \right] = -\rho_e v_e \frac{dv_e}{dx} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho v_x}{\rho_e v_e} \right) r dr \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \rho_e v_e^3 \left[\frac{\Delta^2 (1 - v_0^2 / v_e^2)}{4 \ln 2} a_1 + \frac{\Delta^2 (5 - 3v_0^2 / v_e^2 - 2v_0^3 / v_e^3)}{12 \ln 2} a_2 \right] \right\} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\rho_e v_e S_{k0} \frac{\Delta^2 g_k}{8 (\ln 2)^2} \right) = \frac{2\mu}{\text{Pr}^{k-1}} I_k - \frac{c_k S_{k0}}{v_e - v_0} \frac{\mu}{2 \ln 2} \left[\left(1 - \frac{v_0}{v_e} \right) \left(1 + \frac{b_k}{\ln 2} \right) - \frac{\alpha_1}{2} \left(1 - \frac{v_0}{v_e} \right)^2 \left(1 + \frac{b_k}{2 \ln 2} \right) + \frac{\alpha_2}{3} \left(1 - \frac{v_0}{v_e} \right)^3 \left(1 + \frac{b_k}{3 \ln 2} \right) \right] \quad (k=1, 2) \quad (1.12)$$

$$I_k \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{\partial w_k}{\partial r} \right)^2 r dr, \quad \alpha_1 \equiv \frac{v_e^2}{h_e} (a_1 + 2a_2 - 1), \quad \alpha_2 \equiv \frac{v_e^2}{h} \left(a_2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$g_k \equiv [2 \ln 2 + 3b_k + v_0(2 \ln 2 + b_k)] \Delta^2 / 8 (\ln 2)^2$$

где κ — показатель адиабаты, μ считается функцией лишь продольной координаты.

Пологая в уравнении движения и энергии $r=0$ и используя (1.7)–(1.9), имеем

$$\rho_0 v_0 \frac{dv_0}{dx} = \rho_e v_e \frac{dv_e}{dx} + \frac{4 \ln 2}{\Delta^2} \rho_0 (v_e - v_0) \mu \quad (1.13)$$

$$\frac{da_1}{dx} (v_e^2 - v_0 v_e) + \frac{da_2}{dx} (v_e^2 - v_0^2) = -a_1 \frac{d(v_e^2 - v_0 v_e)}{dx} - a_2 \frac{d(v_e^2 - v_0^2)}{dx} - \frac{4 \ln 2}{\Delta^2} \frac{v_e - v_0}{v_0} \left\{ \frac{\mu}{\rho_e \text{Pr}} [a_1 v_e + 2a_2 v_0 + (\text{Pr} - 1) v_0] \right\} \quad (1.14)$$

Система шести дифференциальных уравнений (1.10)–(1.14) служит для определения шести искомых функций. Начальные условия для этой

системы определяются с помощью аппроксимации заданных в начальном сечении функций соотношениями (1.7)–(1.9).

2. Пусть начальное сечение находится в области, где отсутствуют невязкие градиенты, так что $v_e \equiv \rho_e \equiv 1$ при $x > x_H$. Тогда соотношения (1.10), (1.11) дают

$$\Delta^2 = \frac{c_x \ln 2}{8u_0(1-u_0/2)}, \quad c_x \equiv 16 \int_0^{\infty} \rho v_x (1-v_x) r dr \quad (2.1)$$

$$a_1 = c_i/c_x - f(u_0)a_2, \quad c_i \equiv 16 \int_0^{\infty} \rho v_x (H_e - H) r dr \quad (2.2)$$

$$u_0 \equiv 1 - v_0, \quad f(u_0) \equiv (12 - 9u_0 + 2u_0^2) / (6 - 3u_0)$$

Переходя в уравнениях (1.12), (1.14) к новой независимой переменной u_0 с помощью выражения

$$\frac{du_0}{dx} = - \frac{32}{c_x} \frac{u_0^2(1-u_0/2)}{1-u_0} \mu \quad (2.3)$$

которое следует из (1.13) и (2.1), и используя (2.2), приходим к линейным уравнениям относительно a_2 и S_{k0}

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{du_0} - a_2 \frac{u_0 df/du_0 + (1/\text{Pr} - 1)(2 - 2u_0 - f)}{2u_0 - u_0^2 - u_0 f} &= \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{c_i/c_x - 1 + u_0}{2u_0 - u_0^2 - u_0 f} \\ \frac{dS_{k0}}{du_0} + S_{k0} \left\{ \frac{d \ln g_k}{du_0} - \frac{c_k c_x}{64 \ln 2 \text{Pr}^{k-1}} \frac{1-u_0}{1-u_0/2} \frac{1}{g_k u_0^3} \left[u_0 \left(1 + \frac{b_k}{\ln 2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_1}{2} u_0^2 \left(1 + \frac{b_k}{2 \ln 2} \right) + \frac{\alpha_2}{3} u_0^3 \left(1 + \frac{b_k}{3 \ln 2} \right) \right] \right\} &= - \frac{c_x}{16 g_k} \frac{1-u_0}{1-u_0/2} \frac{I_k}{u_0^2} \end{aligned}$$

так что могут быть выписаны зависимости $a_2(u_0)$, $S_{k0}(u_0)$ вида

$$y = \left[y_H + \int_{u_{0H}}^{u_0} Q \exp \left(\int_{u_{0H}}^{u_0} P du_0 \right) du_0 \right] \exp \left(- \int_{u_{0H}}^{u_0} P du_0 \right)$$

где y равно либо a_2 , либо S_{k0} , а P и Q — обозначения соответственно коэффициента при искомой функции и правой части уравнения. Эти зависимости, однако, будут содержать интегралы, не выражающиеся, вообще говоря, через элементарные функции. Ниже приводятся приближенные аналитические выражения, полученные путем представления функций P и Q в виде ряда по малому параметру u_{0H} . Для a_2 получаем разложение

$$\begin{aligned} a_2 = -2 \left(\frac{c_i}{c_x} - 1 \right) \frac{1}{u_{0H}} \left\{ \frac{1}{z} (1 - z^{\alpha+1}) \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr} - 3} - u_{0H} \left[\frac{a_{2H}}{2(c_i/c_x - 1)} z^\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr} - 3} \frac{2 + \text{Pr}}{6 \text{Pr}} (1 - z^{\alpha+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{c_i/c_x - 1} - \frac{\text{Pr} + 1}{3 \text{Pr}} \right) \frac{1 - \text{Pr}}{2 \text{Pr} - 3} (1 - z^\alpha) \right] + \dots \right\} \quad (2.4) \\ (z \equiv u_0 / u_{0H}, \quad \alpha \equiv 3 / \text{Pr} - 2) \end{aligned}$$

Для E_0 и θ_0 выпишем лишь первые члены разложений

$$E_0 \equiv S_{10} = \left[\frac{\ln 2}{4(\ln 2 + b)(c^* - 1)} (1 - z^{c^*-1}) + \frac{E_{0н}}{u_{0н}^2} z^{c^*-1} \right] u_{0н}^2 z^2 + \dots \quad (2.5)$$

$$\theta_0 \equiv S_{20} = \left\{ \frac{\ln 2}{4 \text{Pr}(\ln 2 + b_0)} \frac{4(2 \text{Pr}^2 - 6 \text{Pr} + 13)}{9(\text{Pr} - 13)^2} \left(\frac{c_t}{c_x} - 1 \right)^2 \left[\frac{1 - z^{c_\theta^*-1}}{c_\theta^* - 1} - \right. \right. \\ \left. \left. - z^{c_\theta^*-1} \left(\frac{(1 - \text{Pr})(3 \text{Pr} + 4)}{2 \text{Pr}^2 - 6 \text{Pr} + 13} \frac{z^{3/\text{Pr} - c_\theta^*} - 1}{3/\text{Pr} - c_\theta^*} + \right. \right. \quad (2.6) \\ \left. \left. + \frac{13}{4} \frac{(1 - \text{Pr})^2}{2 \text{Pr}^2 - 6 \text{Pr} + 13} \frac{z^{6/\text{Pr} - c_\theta^*} - 1}{6/\text{Pr} - c_\theta^* - 1} \right] \right\} + \frac{\theta_{0н}}{u_{0н}^2} z^{c_\theta^*-1} \left. \right\} z^2 u_{0н}^2 + \dots \\ (c^* \equiv c / 4 \ln 2, c_\theta^* \equiv c_\theta / 4 \text{Pr} \ln 2)$$

Используя разложения (2.4)–(2.6) и формулы (2.1), (2.2), (1.8), нетрудно получить асимптотические (при $u_0 \rightarrow 0$) выражения для иско- мых функций (считаем $c^* > 1$, $c_\theta^* > 1$, $\text{Pr} < 1$)

$$1/\rho - 1 = h_0/h_\infty - 1 \sim 2(3 - \text{Pr})^{-1}(\kappa - 1)M_\infty^2(1 - c_t/c_x)u_0 \quad (2.7)$$

$$\frac{E_0}{u_0^2} \sim \frac{(\ln 2)^2}{(\ln 2 + b)(c - 4 \ln 2)} \equiv \frac{1}{2\gamma} \quad (2.8)$$

$$\frac{\theta_0}{(h_0 - h_e)^2} \sim \frac{(\ln 2)^2}{(\ln 2 + b_\theta)(c_\theta - 4 \text{Pr} \ln 2)} \frac{2 \text{Pr}^2 - 6 \text{Pr} + 13}{9} \equiv \frac{1}{2\gamma_\theta} \quad (2.9)$$

Заметим, что поскольку в уравнениях движения и энергии не учиты- вается молекулярная вязкость, а турбулентная вязкость в осесимметрич- ном следе стремится к нулю с увеличением продольной координаты, то асимптотические соотношения справедливы, строго говоря, лишь в пре- деле при стремлении числа Рейнольдса, построенного по параметрам не- возмущенного потока, к бесконечности.

Функция $u_0(x)$ может быть найдена из уравнения (2.3), если указана связь коэффициента турбулентной вязкости с переменными задачами. Примем в качестве таковой связи соотношение

$$\mu = k\sqrt{2\gamma E_0}r_1, \rho(r_1)v_x(r_1) = 0.5(\rho_e v_e + \rho_0 v_0) \quad (2.10)$$

Введение в (2.10) в качестве масштаба размерности длины r_1 , а не Δ , как в (1.3), связано с тем, что такое предположение о μ дает, как пока- зывают расчеты, более близкое согласие с опытом на начальном участке следа. Отметим, что при стремлении числа Маха к нулю или при увели- чении продольной координаты, $r_1 \sim \Delta \sim \delta$, где δ — физическая полушири- на следа, которая, как известно, для несжимаемой жидкости пропорцио- нальна интегральному масштабу турбулентности.

Если считать, что $|2\gamma E_{0н}/u_{0н}^2 - 1|$ достаточно мало, можно найти приближенное аналитическое выражение для $u_0(x)$

$$12\sqrt{2 \ln 2} k(x - x_n)/\sqrt{c_x} \approx u_0^{-3/2} \left[1 - z^{3/2} + \frac{3}{4} \left(\frac{2\gamma E_{0н}}{u_{0н}^2} - 1 \right) z^{3/2} \frac{z^{c^*-5/2} - 1}{c^* - 5/2} \right]$$

откуда следует, что при $x \rightarrow \infty$ выполняется известный закон [10]

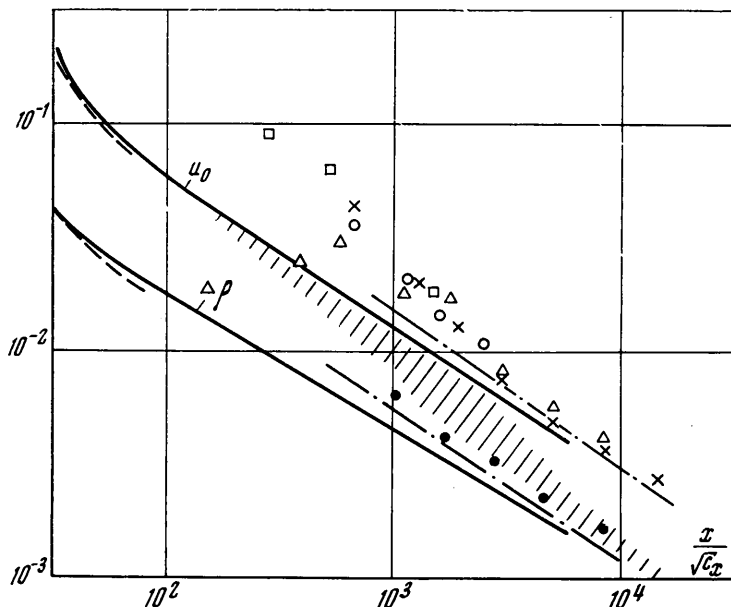
$$u_0 \sim (12\sqrt{2 \ln 2} kx / \sqrt{c_x})^{-2/3} \quad (2.11)$$

Выпишем еще асимптотические выражения для диссипаций ε , ε_θ , ко- торые следуют из принятых в п. 1 полуэмпирических соотношений для этих величин, а также из (2.1), (2.8)–(2.10)

$$\varepsilon_0 \sim \frac{ck}{2\gamma} \sqrt{\frac{8}{c_x \ln 2}} u_0^{1/2}, \quad \varepsilon_{00} \sim \frac{c_0 k}{2\gamma_0 \text{Pr}} \sqrt{\frac{8}{c_x \ln 2}} \left(1 - \frac{c_t}{c_x}\right)^2 \frac{4u_0^{1/2}}{(3 - \text{Pr})^2}$$

Численные значения констант, входящих в эти соотношения, оцениваются в следующем пункте.

3. Эмпирическую постоянную k определим, сравнивая зависимость (2.11) с опытными данными для сверхзвукового осесимметричного турбулентного следа, приведенными на фиг. 1. Здесь крестики и прямоугольники — данные работы [3] ($M_\infty = 5.3$), треугольники — [4] ($M_\infty = 5.3$), кружки — [5] ($M_\infty = 13.4$), заштрихованная область — [6] ($M_\infty = 17$). Принято $k = 0.04$ (штрих-пунктирная линия).



Фиг. 1

Постоянные b и b_0 оценим, сравнивая представления (1.9) с автомодельными профилями соответственно кинетической энергии турбулентности и среднеквадратичной пульсации энтальпии. Автомодельные профили описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_k}{d\zeta^2} + \frac{df_k}{d\zeta} \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \text{Pr}^{k-1} \right) + f_k \left(4 \text{Pr}^{k-1} - \frac{c_k}{2 \ln 2} \right) = \\ = -2\gamma_k \zeta^2 [2 - \text{Pr} - 2(1 - \text{Pr}) \exp(-\zeta^2/2)]^{2(k-1)} \exp(-\zeta^2) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(f_k \equiv S_k / S_{k0}, \quad \zeta \equiv 2\sqrt{2 \ln 2} r / \Delta)$$

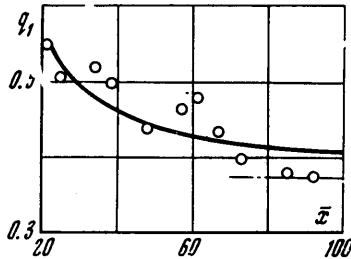
Эти уравнения могут быть получены из (1.5), если применить общепринятую для дальнейшей области следа линеаризацию, использовать в качестве профиля для v_x соотношения (1.7) и учесть, что вследствие (1.8), (2.2), (2.4) профиль энтальпии в автомодельной области (при $x \rightarrow \infty$) представляется в виде

$$\frac{h}{h_\infty} = 1 + (\alpha - 1) M_\infty^2 \left(1 - \frac{c_t}{c_x}\right) \frac{2 \text{Pr} - 4}{\text{Pr} - 3} (1 - v_x) \left(1 + \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr} - 2} \frac{1 - v_x}{u_0}\right)$$

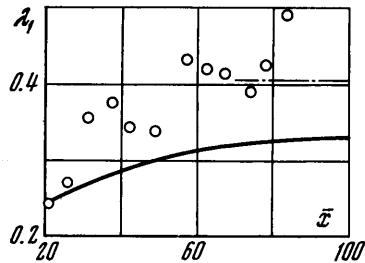
Профиль f_k должен удовлетворять условиям

$$f_k(0) = 1, \quad (df_k / d\xi) |_{\xi=0} = f_k(\infty) = 0 \quad (3.2)$$

Задача (3.1), (3.2) при задании c_k (или γ_k) определяет $f_k(\xi)$ и γ_k (или c_k). Соответствующие значения b_k могут быть найдены по формулам (2.8), (2.9).



Фиг. 2



Фиг. 3

Расчет параметров следа проводился по системе уравнений (1.10) — (1.14) с целью сравнения с опытными данными работ [7, 8] ($M_e = M_\infty = 3$). Система (1.10) — (1.14) интегрировалась на ЭЦВМ по методу Рунге — Кутты. При определении начальных значений использовались данные эксперимента в сечении $x = 20$, где турбулентность была полностью развита. При определении a_{1k} и a_{2k} , в частности, использовалось условие $c_t / c_x = -0.08$, которое можно найти из данных [7]. Во всех расчетах принято $Pr = 0.7$, $\kappa = 1.4$. Постоянная c подбиралась так, чтобы получить удовлетворительное описание опытного распределения величины $\sqrt{\langle v'^2(0) \rangle} / u_0 = q_1$, причем принято, что $\langle v_x'^2(0) \rangle \approx 2E_0 / 3$. Для приведенной на фиг. 2 расчетной кривой $2\gamma = 4.6$ $c = 5.4$. На всех фигурах сплошные линии — расчет, штрих-пунктирные — асимптотический закон. Кружками на фиг. 2, 4, 5 отмечены опытные данные [8]. Вдоль оси на этих фигурах отложена величина $\bar{x} = (x - 9)\sqrt{4/\pi c_x}$.

Распределение u_0 представлено на фиг. 1 (штриховая линия — эксперимент [7]).

Здесь же демонстрируется изменение вдоль продольной оси величины перепада поперек следа плотности $\Delta\rho = (1 - \rho_0) / M_\infty^2$. Зачерненными кружками отмечены опытные данные [3] ($M_\infty = 5.3$), штриховая линия — эксперимент [7], штрих-пунктирная — асимптота.

Среднеквадратичные значения пульсаций плотности, приведенные на фиг. 3, вычислялись по соотношению

$$\lambda_1 = \sqrt{\langle \rho'^2(0) \rangle} / (1 - \rho_0) = (\kappa - 1) M_e \rho_0^2 \sqrt{2\theta_0} / (1 - \rho_0)$$

которое может быть получено, если принять [1]

$$\rho' / \rho = -h' / h \quad (3.3)$$

Для определения γ_0 и c_0 принято предположение [3] о том, что при $x \rightarrow \infty$

$$\langle h'^2 \rangle = \langle v_x'^2 \rangle v_x^2 \quad (3.4)$$

Тогда из соотношений (2.7) — (2.9) имеем

$$2\gamma_0 = 24\gamma(1 - c_t / c_x)^2 / (3 - Pr)^2 \quad (3.5)$$

так что, считая $c_t / c_x = -0.08$, находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_2 = \sqrt{1/\gamma_0} \approx 0.4, \quad \lambda_2 = \sqrt{\langle h'^2(0) \rangle} / (h_0 - h_\infty)$$

Это значение близко к приведенным в работе [4] опытными значениям, относящимся к сечению $x = 840$ следа за тупым осесимметричным телом $\lambda_1 = 0.37$, $\lambda_2 = 0.39$. Отметим, что близкое значение получено и в опытах по определению пульсаций температуры в несжимаемой жидкости [9]: $\lambda_2 = 0.38$.

Решение задачи (3.1), (3.2), где $2\gamma_0$ вычислялось из (3.5), дает необходимые для расчета θ_0 значения $c_0 = 6.3$, $b_0 = 0.8$. Заметим, что можно добиться лучшего согласия с опытными данными [8] по пульсациям плотности, приняв меньшее значение для γ_0 , чем то, что дается формулой (3.5). Однако в этом случае получим большее расхождение с данными [4, 9]. Значения приведенных здесь опытных констант

следует считать, конечно, ориентировочными. Они могут быть уточнены при появлении более подробных опытных данных.

Наконец, на фиг. 4 приводится распределение среднеквадратичных значений пульсаций плотности импульса

$$q_2 = \sqrt{\langle (\rho v_x)^2(0) \rangle} / \rho_0 v_0$$

В пренебрежении третьими моментами имеем

$$\langle (\rho v_x)^2 \rangle \approx v_x^2 \langle \rho'^2 \rangle + 2v_x \rho \langle \rho' v_x' \rangle + \rho^2 \langle v_x'^2 \rangle$$

Взаимный момент пульсационных полей плотности и продольной составляющей скорости здесь определялся с помощью гипотезы (3.3) и опытного значения коэффициента корреляции пульсационных полей температуры и продольной скорости, равного -1 .

Расчетная формула имеет вид

$$\langle \rho' v' \rangle \approx 2\rho \sqrt{\theta E} / \sqrt{3h} \quad (3.6)$$

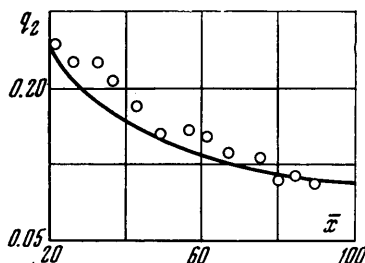
В заключение оценим значение предпоследнего члена справа в уравнении баланса турбулентной энергии (1.2). Используя предположение (3.6), имеем в приближении пограничного слоя

$$\begin{aligned} v_j \langle \rho' v_i' \rangle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &\approx \langle \rho' v_x' \rangle \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \approx \\ &\approx 2 \sqrt{E} \theta (\rho v_x \partial v_x / \partial x + \rho v_r \partial v_x / \partial r) / \sqrt{3h} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Предполагая, что (3.4) выполняется приближенно и при конечных x , и используя (1.3), (2.3) и (3.7), нетрудно найти отношение рассматриваемого члена к диссипативному члену при $r = 0$

$$[v_j \langle \rho v_i' \rangle \partial v_i / \partial x_j]_{r=0} / \langle \tau_{ij} \partial v_j' / \partial x_i \rangle \approx (8 \ln 2 / 3c) (\kappa - 1) M_0^2 u_0$$

Отсюда видно, что в уравнении баланса турбулентной энергии значение члена, связанного со средней плотностью импульса пульсационного



Фиг. 4

движения, возрастает с ростом числа Маха и быстро убывает вдоль продольной оси. В случае необходимости этот член может быть учтен в уравнении (1.4) с помощью соотношения (3.7).

Поступило 13 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
2. Гогиш Л. В., Соболева Т. С., Степанов Г. Ю. Взаимодействие турбулентного следа с внешним потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Witte A. B., Fox J., Rungaldier H. Localized measurements of wake density fluctuations using pulsed laser holographic interferometry. AIAA paper, 1970, No. 70—727.
4. Fox J., Rungaldier H. Anemometer measurements of velocity and density in projectile wakes. AIAA paper, 1968, No. 68—701.
5. Heckman D., Emond A., Sevigny L. Some results of electrostatic probe studies of turbulente hypersonic wake plasmas. AIAA paper, 1968, No. 68—689.
6. Herriman I., Slattery R. E., Clay W. Measured properties of the wakes of hypersonic cones. AIAA paper, 1968, No. 68—687.
7. Demetriades A. Mean-flow measurements in an axisymmetric compressible turbulent wake. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Измерение средних величин при течении в осесимметричном турбулентном следе сжимаемой жидкости. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 3.)
8. Demetriades A. Turbulence measurements in an axisymmetric compressible wake. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 9.
9. Gibson C. H., Chen C. C., Lin S. C. Measurements of turbulent velocity and temperature fluctuations in the wake of sphere. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 4. (Рус. перев.: Измерение турбулентных пульсаций скорости и температуры в следе за сферой. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 4.)
10. Таунсенд А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М. Изд-во иностр. лит., 1959.