

неравенства

$$u_1 < a_{A1}, \quad u_2 > a_{A2} \quad (2)$$

Условиями существования однозначного решения для амплитуд остальных волн являются неравенства

$$u_2 < a_{-2}, \quad u_1 > a_{+1} \quad (3)$$

Так как всегда выполняется неравенство $a_A \leq a_+$, то неравенства (2) и (3) несовместимы, т. е. в случае B нет эволюционных ударных волн.

В заключение отметим, что в частном случае $B_n = 0$ имеем $a^* = a_A = a_- = 0$ и $a_+ \neq 0$. Здесь условия эволюционности

$$u_1 > a_{+1}, \quad u_2 < a_{+2} \quad (4)$$

Анализ частного случая $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n$ в случае A приводит к результатам, полученным в работе [10], в которой также получены условия эволюционности (4). Как сообщил И. С. Шикин, некоторые результаты настоящей работы могут быть обобщены для релятивистских уравнений ЧГЛ.

Поступило 16 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G., Goldberger M., Low F. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. Proc. Roy. Soc. Ser A, 1956, vol. 236, No. 1204.
2. Lunn Y. M. Discontinuities in an anisotropic plasma. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 10.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
4. Neuberger E. M. Jump relations for shocks in an anisotropic magnetized plasma. Z. phys., 1970, Bd 237, Nr 3.
5. Лонгмайр К. Физика плазмы. М., Атомиздат, 1966.
6. Ахизер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 3.
7. Сыроватский С. И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 6.
8. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma I. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 4.
9. Abraham Shr. Propagation of hydromagnetic waves through on anisotropic plasma. J. Plasma Phys., 1967, vol. 1, pt 3.
10. Morioka S., Spreiter J. Evolutionary conditions for shock waves in collisionless plasma and stability of associated flow. J. Plasma Phys., 1968, vol. 2, pt 2.

УДК 538.4:538.2

ДВИЖЕНИЕ НАМАГНИЧЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. Е. ТАРАПОВ

(Харьков)

Теоретическое и экспериментальное изучение сред, поляризуемых в электромагнитном поле [1-4], в последнее время стимулируется возможными техническими их применениями.

Рассмотрим стационарное плоское движение вязкой проводящей жидкости между двумя пластинами-электродами ($y = 0$ и $y = h$) в постоянном магнитном поле \mathbf{H}_0 , перпендикулярном к потоку.

Предположим, что изотропная намагничивающаяся жидкость с проводимостью σ , вязкостью μ и плотностью ρ находится в состоянии магнитного насыщения, т. е.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{M} = \rho K(\theta - T)\mathbf{H} / H \quad (\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн} \cdot \text{м}^{-1}) \quad (1)$$

где \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{M} — векторы поля, индукции и намагниченности θ — температура Кюри.

Заметим, что предположение о пропорциональности намагниченности ее плотности позволяет учесть магнитострикционные напряжения, причем уравнения движения, как было показано в [4], совпадают в этом случае с уравнениями, приведенными в [3].

Будем пренебрегать концевыми эффектами, считая $h/l_x \sim h/l_z \ll 1$ (l_x, l_z — размеры пластин по осям x и z соответственно), и индуцированным магнитным полем, считая $Re_m = \mu_0 \mu_e \sigma h v_0 \ll 1$ (v_0 — характерная скорость потока, $\mu_e = 1 + M_0/H_0$, M_0 — характерная намагниченность).

В этом случае основная система уравнений [3, 4] состоит из соотношений (1) и уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p &= \mu_0 M \nabla H + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T - \rho \mu_e K T \mathbf{v} \cdot \nabla H &= \lambda \nabla T + j^2 / \sigma + 1/2 \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \\ \mathbf{j} &= \sigma(-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_i \quad (\mathbf{H}_0 = \text{const}) \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_i &= -\operatorname{div} \mathbf{M}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_i = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{H}_i — поле, индуцируемое в жидкости за счет ее свойств как магнетика, находящегося во внешнем магнитном поле. В приближении $Re_m \ll 1$ это поле определяется так же, как и в случае непроводящего магнетика, а именно из последних двух уравнений системы (2), и, как известно [5], может быть представлено в виде

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{M}}{r^3} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{\Omega}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})}{r^3} dS_{\Omega} \quad (3)$$

Здесь вектор \mathbf{R} определяет точку, где ищется поле \mathbf{H}_i , а вектор $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ — переменную точку интегрирования по области Ω , занятой магнетиком, и по границе S_{Ω} этой области; \mathbf{n} — внешняя к Ω нормаль.

При этом на границе S_{Ω} выполнены условия равенства касательных компонент \mathbf{H}_i и нормальных компонент \mathbf{B} , так что $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ представляет собой скачок нормальных компонент \mathbf{H}_i при переходе через S_{Ω} .

Выражение (3) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно \mathbf{H}_i , так как в общем случае

$$M = M(\rho, T, |\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_i|), \quad \mathbf{M} \parallel (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_i)$$

Заметим, что $\mathbf{H}_i = 0$ может быть нетривиальным решением уравнения (3).

Будем определять \mathbf{H}_i из (3) при помощи следующего итерационного процесса

$$\mathbf{H}_i^{(n+1)} = \mathbf{L}(\mathbf{H}_i^{(n)}), \quad \mathbf{H}_i^{(0)} \equiv 0 \quad (4)$$

где через \mathbf{L} обозначена правая часть уравнения (3).

При этом предположим, что этот процесс для определенных $\mathbf{H}_0, \mathbf{M}(\rho, T, H_0)$ сходится к некоторой функции \mathbf{H}_i^{∞} , которую и будем принимать за решение уравнения (3).

Рассмотрим этот прием определения \mathbf{H}_i из (3) в данной задаче.

Вычисляя интегралы в (3) для очень сплюснутого параллелепипеда (h, l_x, l_z) и проводя ряд преобразований, позволяющих переходить к пределу под знаком интеграла при $h/l_x \rightarrow 0$ и $h/l_z \rightarrow 0$, получим, отбрасывая члены порядка h/l_x и h/l_z

$$\mathbf{H}_i = -i_y \frac{H_{0y}}{H_0} \left\{ \frac{\partial M}{\partial y} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{[M]_{y=h} + [M]_{y=0}}{2} \right\} \equiv -i_y M^{(1)} \quad (5)$$

Рассмотрим два случая внешнего поля \mathbf{H}_0 .

Пусть $\mathbf{H}_0 = i_y H_0$. Тогда из (3) и (4) в силу $M = M(\rho, T)$ получаем

$$\mathbf{H}_i^{(1)} = -i_y M^{(1)}, \quad \mathbf{H}_i^{(2)} = -i_y M^{(1)} \operatorname{sign}(H_0 - M^{(1)}), \dots$$

$$\mathbf{H}_i^{(n+1)} = \mathbf{H}_i^{(n)} \operatorname{sign}(H_0 - M^{(1)})$$

Таким образом, если $M^{(1)} < H_0$, итерационный процесс сходится и первая итерация является решением уравнения (4), так что

$$\mathbf{H}_i = -i_y M^{(1)}, \quad \mathbf{B} = (0, \mu_0(H_0 + M - M^{(1)}), 0)$$

Заметим, что если M является линейной функцией от y/h (например, в рассматриваемой задаче пренебрегают диссипативными процессами), то $M^{(1)} = M$, и тогда индуцируемое поле H_i , будучи направлено против намагниченности M , полностью нейтрализует эффект намагниченности. Из этого примера видно, что отбрасывание индуцированного в магнетике поля H_i , особенно в случае проводящего магнетика, иногда может привести к ошибочным результатам, поскольку H_i того же порядка, что и M .

При $M^{(1)} > H_0$ итерационный процесс (4) расходится и решение уравнения (3) следует искать другими методами.

Пусть теперь внешнее поле H_0 направлено по оси z , т. е. $H_0 = i_z H_0$; тогда из (5) получаем

$$H_i^{(1)} = 0; \dots H_i^{(n)} = 0$$

Таким образом, в этом случае

$$H_i = 0, \quad B = (0, 0, \mu_0(H_0 + M))$$

Ниже остановимся на рассмотрении именно этого случая внешнего поля. Теперь нетрудно видеть, что система (2) в этом случае сводится к уравнениям

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} - j_0 \mu_0 [H_0 + \rho K(\theta - T)] = 0$$

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{j_0^2}{\sigma} + \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = 0 \quad (6)$$

$$j_0 h = \sigma [\varphi(h) - \varphi(0)] + \sigma \mu_0 \int_0^h v_x [H_0 + \rho K(\theta - T)] dy \quad (7)$$

$$v = (v_x(y), 0, 0), \quad B = (0, 0, \mu_0(H_0 + M(y)))$$

$$j = (0, -j_0, 0), \quad T = T(y), \quad \varphi = \varphi(y)$$

$$dp/dx, H_0, j_0 = \text{const}$$

Будем считать, что имеется внешняя цепь с сопротивлением R , так что согласно закону Ома для этой цепи имеем

$$\varphi(0) - \varphi(h) = j_0 l_x l_z R \quad (8)$$

Вводя безразмерные переменные и параметры по формулам

$$\eta = y/h, \quad \tau(\eta) = T/\theta, \quad v(\eta) = v_x/v_0 = -v_x \left(\frac{h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \right)^{-1} \quad (9)$$

$$m = \rho K \theta H_0^{-1}, \quad Na = \mu_0 H_0 h \sqrt{\sigma/\mu}, \quad j = -j_0 \left(h \frac{dp}{dx} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \right)^{-1}$$

$$r = R l_x l_z \sigma h^{-1}, \quad \alpha = \frac{h_4}{\mu \lambda \theta} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 = \frac{\mu v_0^2}{\lambda \theta}, \quad v_0 = -\frac{h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (10)$$

из (6)–(8) получаем

$$v'' = -1 + j Na(1 + m - m\tau), \quad \tau'' = -\alpha((v')^2 + j^2) \quad (11)$$

$$1 + r = Na j^{-1} \int_0^1 v(1 + m - m\tau) d\eta \quad (12)$$

Нелинейная система (11) служит для определения функций скорости $v(\eta)$ и температуры $\tau(\eta)$ при заданных граничных условиях, а соотношение (12) связывает параметры j и r . Не уменьшая общности, в дальнейшем остановимся на граничных условиях вида

$$v(0) = v(1) = 0, \quad \tau(0) = \tau_0, \quad \tau(1) = \tau_1 \quad (13)$$

Параметр m определяет отношение величины намагниченности жидкости к величине внешнего поля; параметр α равен отношению тепла, диссипируемого в жидкости за счет вязкости, к теплу, поступающему в результате теплопроводности. При $m = 0$ или $\alpha = 0$ система (11) распадается на два легко интегрируемых уравнения.

Придерживаясь схемы, описанной в [6], остановимся на двух основных режимах работы устройства, в основу которого положена рассматриваемая задача.

1. Если внешняя цепь разомкнута ($j = 0$), то система (11) с граничными условиями (13) имеет решение

$$v = {}^{1/2}\eta(1 - \eta), \quad \tau = {}^{1/192}\alpha[1 - (2\eta - 1)^4] + \tau_0 + (\tau_1 - \tau_0)\eta \quad (14)$$

В этом случае на электродах возникает разность потенциалов, которая согласно (8) и (12) равна

$$U = (\varphi(0) - \varphi(h)) (\mu_0 H_0 v_0 h)^{-1} = \int_0^1 v(1 + m - m\tau) d\eta$$

Величина U называется чувствительностью расходомера. Подставляя сюда (14), получаем

$$U = {}^{1/12}[1 + m(1 - {}^{1/2}(\tau_0 + \tau_1) - \alpha/240)]$$

Если через k_U обозначить отношение чувствительностей расходомеров намагниченной и немагнитной жидкости, то при $\alpha \ll 1$

$$k_U = 1 + m(1 - {}^{1/2}(\tau_0 + \tau_1)) \quad (15)$$

Так как $\tau_0 < 1$, $\tau_1 < 1$, то отсюда видно, что чувствительность расходомера увеличивается с ростом намагниченности жидкости.

2. Для анализа режима, когда величина R конечна, введем, следуя [6], основные характеристики идеального генератора с рабочим телом в виде проводящего магнетика.

Поскольку в таком генераторе может возникнуть необходимость подводить извне тепло для усиления термомагнитного эффекта рабочего тела, то электрический к.п.д. генератора ζ следует определить так:

$$\zeta = (N - Q)A^{-1} \quad (16)$$

где N — отводимая от генератора электрическая мощность, Q — подводимое к генератору тепло, A — мощность, затрачиваемая рабочим телом при его движении на преодоление сил электромагнитного поля.

Если в генераторе не предусматривается использовать получаемое за счет диссипации тепло, то при $Q < 0$, как и для обычного генератора, следует писать $\zeta = NA^{-1}$.

Таким образом, для рассматриваемой схемы генератора получаем

$$\begin{aligned} N &= - \int_0^{l_x} \int_0^h \int_0^{l_z} E_y j_y dx dy dz = l_x l_z \mu v_0^2 h^{-1} r j^2 \\ Q &= - \int_0^{l_x} \int_0^h \int_0^{l_z} \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} dx dy dz = \lambda l_x l_z \theta h^{-1} [(\tau')_{\eta=0} - (\tau')_{\eta=1}] \\ A &= - \int_0^{l_x} \int_0^h \int_0^{l_z} j_y B_z v_x dx dy dz = l_x l_z \mu v_0^2 h^{-1} j^2 (r + 1) \\ \zeta &= \frac{r j^2 + \alpha^{-1} [(\tau')_{\eta=1} - (\tau')_{\eta=0}]}{j^2 (r + 1)} \end{aligned} \quad (17)$$

Электродвижущая сила генератора ε равна

$$\varepsilon = \int_0^h v_x B_z dy = v_0 \sqrt{\mu/\sigma} j (1 + r)^{-1} \quad (18)$$

так что полный ток I

$$I = l_x l_z j_0 = \varepsilon l_x l_z h^{-1} \sigma (1+r)^{-1} = \varepsilon (R_i + R)^{-1} \quad (R_i^{-1} = h(l_x l_z \sigma h)^{-1})$$

где R_i — внутреннее сопротивление генератора.

Полный анализ вышеприведенных характеристик генератора с магнетиком может быть проведен после численного интегрирования системы (11).

Однако при сравнении этих характеристик с аналогичными для обычных жидкометаллических генераторов достаточно рассмотреть случай, когда диссипацией тепла за счет вязкости можно пренебречь по сравнению с теплом, получаемым вследствие теплопроводности.

Действительно, в реальных схемах жидкометаллических генераторов $v_0 \sim 10$ м·сек⁻¹, $\mu \sim 10^{-3}$ кг·м⁻¹·сек⁻¹, $\lambda \sim 10$ вт·м⁻¹·град⁻¹, $\theta \sim 10^3$ град и, следовательно, $\alpha \sim 10^{-4}$. Кроме того, как это следует из (11), в режиме генератора $j \sim 1$, ибо всегда $\varepsilon > (\varphi(0) - \varphi(h))$.

Таким образом, полагая $\alpha = 0$ в системе (11), получаем ее решение в виде

$$\begin{aligned} v &= 1/2(j \text{Ha}(1+m-m\tau_0) - \\ &- 1)\eta(\eta-1) - 1/6mj \text{Ha} \times \\ &\times (\tau_1 - \tau_0)\eta(\eta^2 - 1) \\ \tau &= \tau_0 + (\tau_1 - \tau_0)\eta \quad (19) \end{aligned}$$

Заметим, что приближение $\alpha = 0$ не годится для случая, когда один электрод охлаждается (или нагревается), а на другом задана температура.

Теперь, подставляя (19) в (12), получаем значение тока в зависимости от числа Гартмана Ha , намагниченности и температуры электродов

$$j = f \text{Ha} [12(1+r) + \text{Ha}^2(f^2 + 1/60m^2(\tau_1 - \tau_0)^2)]^{-1} \quad (f \equiv 1 + m(1 - 1/2(\tau_0 + \tau_1))) \quad (20)$$

Сравним характеристики рассматриваемого генератора с аналогичными характеристиками генератора, в котором рабочее тело не может намагничиваться (отношение этих характеристик будем обозначать буквой k с соответствующими индексами подобно (15)).

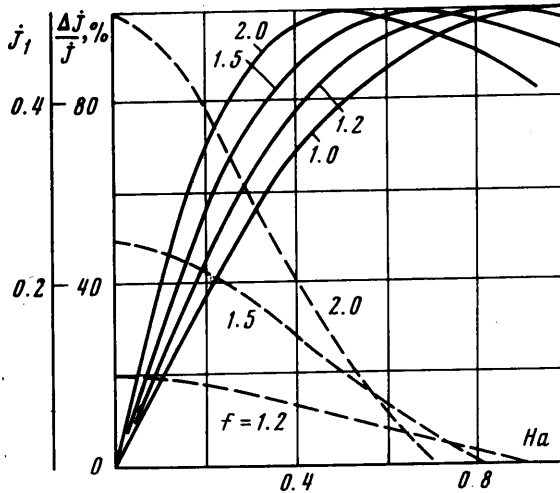
Параметр m может достигать значений порядка единицы; это подтверждается рядом экспериментов (см., например, [7], где описываются суспензии ингас-никель ($m = 0.86$) и олово-никель ($m = 1.1$)). Поскольку $\theta \sim 10^3$ град, то при обычных температурах слагаемое $1/60m^2(\tau_1 - \tau_0)^2$ остается малым по сравнению с единицей. Тогда, как следует из (17) и (20), все относительные характеристики генератора определяются значением параметра f .

Имеем

$$k_\varepsilon = k_I = k_j = f(12(1+r) + \text{Ha}^2)(12(1+r) + \text{Ha}^2 f^2)^{-1} \quad k_\tau = 1 \quad (21)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении ($\alpha = 0$) идеальный генератор с проводящим магнетиком имеет тот же электрический к.п.д., что и генератор с обычным проводником. Однако ток и э.д.с. генератора с магнетиком будет больше, если только $\text{Ha}^2 < 12(1+r)f^{-2}$.

На фигуре даны графики зависимости безразмерного тока $j_1 = j\sqrt{12(1+r)}$ от величины $\text{Ha}_1 = \text{Ha}[12(1+r)]^{-1/2}$ для разных значений f (кривая $f = 1$ соответствует генератору с немагнитным рабочим телом). При больших значениях r ток и напряжение увеличиваются в f раз. Пунктирными линиями дано увеличение тока в процентах от тока генератора с немагнитным рабочим телом.



Из (20) следует, что k_i приобретает максимум при

$$m = m^* \equiv a^{-1}(\sqrt{1 + a^2(1 - \text{Ha}_1^2)b^{-1}\text{Ha}_1^{-2}} - 1)$$

$$(a = 1 - 1/2(\tau_1 + \tau_0), \quad b = (1 - \tau_0)(1 - \tau_1) + 4/15(\tau_0 - \tau_1)^2)$$

Этот максимум существует лишь при $\text{Ha}_1 < 1$. При $\text{Ha}_1 > 1$ функция k_i убывает с ростом m . Таким образом, если задано число $\text{Ha} < \sqrt{12(1+r)}$, то наивыгоднейшим значением намагниченности является m^* . Так, например, при $\tau_0 = \tau_1$ имеем

$$m^* = (1 - \text{Ha}_1)(\text{Ha}(1 - \tau_0))^{-1}$$

Автор благодарен Г. А. Любимову за ценные замечания, сделанные при обсуждении данной статьи.

Поступило 14 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформации. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Бао-Те-Чу. Термодинамика электропроводных движущихся сред. Энергетическое соотношение в магнитной гидродинамике. Сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии», М., Атомиздат, 1962, стр. 62—83.
3. Neuringer F. L., Rosenzweig R. E. Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12, p. 1927.
4. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1, стр. 3.
5. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
6. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
7. Каган И. Я., Рыков В. Г., Янтовский Е. И. Ферромагнитные электропроводные жидкости. Магнитная гидродинамика, 1970, № 4, стр. 43.