

12. Chin J. H. Radiation transport for stagnation flows including effects of lines and ablation layer. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7. (Рус. перев.: Перенос излучения при течи в окрестности передней критической точки с учетом влияния излучения в линиях и слоях продуктов абляции. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 7.)
13. Фэй Д., Ридделл Ф. Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом. В сб.: «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций», М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 190—224.
14. Стулов В. П., Шапиро Е. Г. Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом. Изв. АН СССР, МЖТ, 1970, № 1.

УДК 533.6.011.55 : 536.7

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АППРОКСИМАЦИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

В. Г. ПАВЛОВ

(Москва)

При исследовании гиперзвуковых течений модель совершенного газа с постоянными теплоемкостями становится непригодной. Вместо простого уравнения состояния совершенного газа к газодинамической системе уравнений приходится добавлять в этом случае систему уравнений, описывающую физико-химические процессы, происходящие в газе при высокой температуре (возбуждение внутренних степеней свободы молекул, диссоциацию молекул, ионизацию атомов и т. д.).

В предположении равновесности протекающих физико-химических процессов добавляемая система уравнений является независимой от газодинамической и ее можно решать отдельно, а затем уже, используя полученное решение, определять необходимые связи между термодинамическими параметрами.

Однако получаемые при этом термодинамические функции могут быть представлены лишь в виде очень громоздких таблиц, для воздуха, например, они занимают более 800 страниц трех книг достаточно большого формата [1-3]. Такие таблицы крайне неудобны для использования при проведении расчетов на быстродействующих вычислительных машинах. Поэтому для этих целей необходимые термодинамические зависимости обычно аппроксимируют каким-либо образом. Аппроксимации выполняются с некоторыми погрешностями, которые как-то влияют на точность проводимых расчетов.

В данной работе рассматривается вопрос о влиянии указанных погрешностей на примере решения Прандтля — Майера и на примере расчета сверхзвуковой области течения около затупленных конусов.

1. Для расчета газодинамических течений методом, предложенным в работе [4], необходимо иметь термодинамические зависимости для скорости звука и плотности

$$a = a(p, i), \quad \rho = \rho(p, i) \quad (1.1)$$

где a , ρ , p , i — скорость звука, плотность, давление и энтальпия соответственно.

Для равновесно диссоциирующего воздуха указанные функции, представляющие собой аппроксимации табличных данных, могут содержать некоторые погрешности. Чтобы выяснить влияние этих погрешностей, поступим следующим образом. Выберем некоторое уравнение состояния за истинное (пусть ему соответствуют функции $\rho^*(p, i)$, $a^*(p, i)$), и будем вносить в эти функции заранее известные относительные ошибки

$$\rho = \rho^* \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho} \right), \quad a = a^* \left(1 + \frac{\delta a}{a} \right) \quad (1.2)$$

Варируя величины $\delta\rho/\rho$, $\delta a/a$ и моделируя тем самым различные по величине и знаку погрешности аппроксимации, исследуем их влияние на результаты расчетов.

Остановимся сначала на простом случае течения — течения Прандтля — Майера. Оно описывается системой уравнений

$$dp = \frac{p}{B} d\theta, \quad di = \frac{dp}{\rho}, \quad B = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2} \frac{p}{\rho a^2} \quad (1.3)$$

где θ — угол наклона скорости к некоторому заданному направлению, M — местное число Маха.

Для совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей γ из второго уравнения (1.3) следует:

$$\frac{di}{i} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p}, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p}, \quad \frac{da}{a} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.4)$$

Величина B слабо зависит от давления. Действительно, дифференцируя выражение для B и используя (1.4), получим

$$\frac{dB}{B} = \frac{M^2 + 2}{M^2 - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} - \frac{(\gamma - 1)^2}{M^2 \gamma} \right) \frac{dp}{p} \quad (1.5)$$

$$(\gamma = 1.4, \quad dB/B \approx 0.1 dp/p)$$

Пренебрегая зависимостью B от давления, из первого уравнения (1.3) получим

$$p = p_0 \exp \left(\frac{\theta - \theta_0}{B} \right) \quad (1.6)$$

где p_0, θ_0 — давление и угол наклона скорости в начальный момент.

Обозначим приращение коэффициента B , обусловленное погрешностями аппроксимации $\delta\rho$ и δa , через δB , тогда из выражения для B следует:

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\delta a}{a} - 2 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (1.7)$$

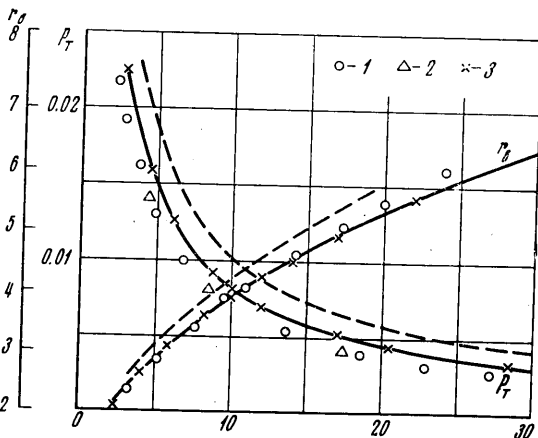
Так как величина $(M^2 - 2)/(M^2 - 1)$ для немалых чисел M порядка единицы, то

$$\frac{\delta B}{B} \approx - \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (1.8)$$

Пусть суммарная погрешность аппроксимации скорости звука и плотности

$$\varepsilon = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta \rho}{\rho}$$

будет постоянна по величине и знаку. Тогда $\delta B = -\varepsilon B$ и обозначая через p_ε решение (1.6) при суммарной погрешности ε , а через p_T — решение при $\varepsilon = 0$, получим



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \frac{p_\varepsilon}{p_T} &= \exp \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{\theta - \theta_0}{B} \right) = \\ &= 1 + \varepsilon \frac{\theta - \theta_0}{B} + O(\varepsilon^2) \quad (1.9) \end{aligned}$$

Таким образом, относительная ошибка в величине давления в течении Прандтля — Майера пропорциональна суммарной погрешности аппроксимации ε углу разворота потока $\theta - \theta_0$ и растет с увеличением числа Маха $M(B^{-1} \sim M^2(M^2 - 1)^{-1/2})$. При небольших $(\theta - \theta_0)$ эта ошибка также мала, однако при $(\theta - \theta_0) \sim 1$ она может превышать погрешность аппроксимации в несколько раз (например, при $\gamma = 1.4, M \approx 3$ более чем в 4 раза). И при расчете других более

сложных течений возможно аналогичное накапливание погрешности, если рассчитываются области с сильно изменяющимися параметрами.

На фиг. 1 приведены результаты расчетов (распределение давления по боковой поверхности p_T и формы ударных волн r_b) обтекания цилиндра при $\gamma = 1.4, M_\infty = \infty$ и при различных значениях $\delta\rho/\rho$ и $\delta a/a$. Кривой 1 соответствуют $\delta a/a = 0.005, \delta\rho/\rho = 0.025$, кривой 2 — $\delta a/a = 0.025, \delta\rho/\rho = 0$, сплошным линиям — $\delta a/a = 0, \delta\rho/\rho = 0$, пунктирным — $\delta a/a = -0.05, \delta\rho/\rho = 0$. В этих расчетах

в качестве истинного уравнения состояния было выбрано уравнение состояния совершенного газа, поскольку многочисленные расчеты показали, что не существенно, какое уравнение состояния выбрать за истинное.

Расчеты проводились на ЭЦВМ методом характеристик, предложенным в работе [4].

Из фиг. 1 видно, что, так же как и в течении Прандтля — Майера, возмущения, вносимые в решение погрешностями аппроксимации постоянного знака, не затухают, а наоборот растут по мере увеличения расчетной области. Например, погрешность в скорости звука на 5% приводит к изменению давления на цилиндре на расстоянии в 10 калибров от носка на 25%, а на расстоянии в 30 калибров уже на 45%.

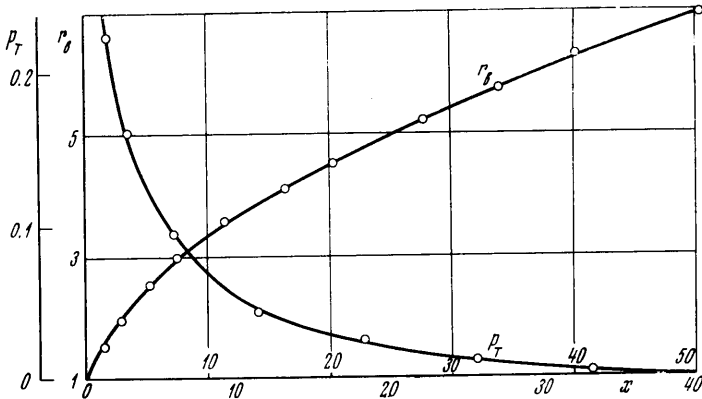
2. Термодинамические функции (1.1) не являются независимыми, поэтому их можно выразить через одну функцию. Выберем в качестве таковой функцию $Z(p, i) = i\rho / p$. Тогда будем иметь

$$\rho(p, i) = \frac{p}{i} Z(p, i) \tag{2.1}$$

Используя уравнение адиабаты, легко получить

$$a = \left[\frac{Z-1}{Z} \frac{\rho}{p} \left(1 + \frac{\partial Z}{\partial \ln p} + \frac{1}{Z(Z-1)} \frac{\partial Z}{\partial \ln i} \right) \right]^{-1/2} \tag{2.2}$$

Выбирая в качестве истинной некоторую $Z^*(p, i)$ и внося в функцию $Z = Z^*(1 + \delta Z / Z)$ заранее известные относительные погрешности $\delta Z / Z$, исследуем влияние ошибок аппроксимации на результаты расчетов в этом случае.



Фиг. 2

На фиг. 1 приведены результаты расчетов при использовании аппроксимации только одной функции $Z(p, i)$ (кривой 3 соответствует $\delta Z / Z = 0.033$). Хотя погрешность аппроксимации примерно та же по величине, что и в остальных случаях, приведенных на этой фигуре, результаты расчетов практически не отличаются от точных.

На фиг. 2, 3 приведены результаты расчетов обтекания цилиндра равновесно диссоциирующим воздухом для условий полета в атмосфере Земли на высоте $H \approx 60$ км со скоростью $V_\infty = 7400$ м/сек. Сплошными линиями нанесены результаты, полученные с использованием точных таблиц [1-3], кружками — результаты с использованием аппроксимаций, предложенных в работе [5].

В этой работе аппроксимируется также только одна функция $Z(p, i)$, точность аппроксимации порядка 1%. Как видно, результаты расчетов (не только давление на поверхности цилиндра и форма ударной волны, но и параметры в поле течения между ударной волной и поверхностью цилиндра) практически совпадают.

Заметим, что при аналогичных погрешностях отдельной аппроксимации двух функций $a(p, i)$ и $\rho(p, i)$ отличие, например, в давлении на поверхности цилиндра составило бы более 10%.

Следует отметить, что если в случае, приведенном на фиг. 1, в качестве истинного уравнения состояния было выбрано уравнение состояния совершенного газа, т. е. функция $Z^*(p, i) = \text{const}$, то для условий, рассмотренных на фиг. 2, 3

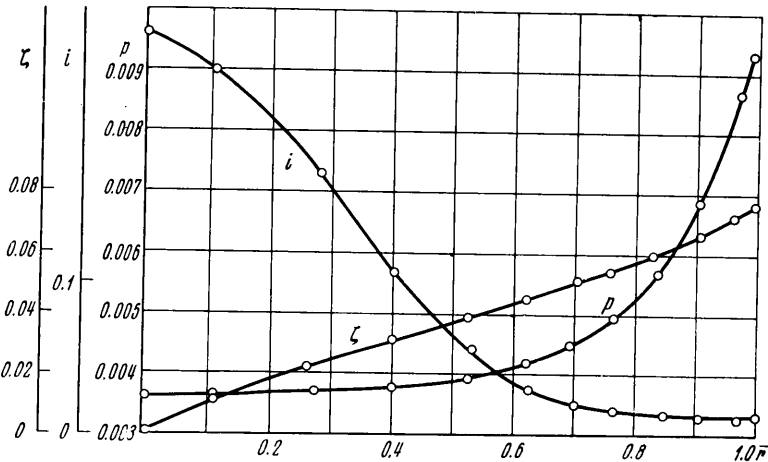
$$Z^*(p, i) \neq \text{const}, \quad \frac{\partial Z^*}{\partial p} \neq 0, \quad \frac{\partial Z^*}{\partial i} \neq 0$$

Приведенные результаты показывают, что влияние погрешностей аппроксимации оказывается много большим в случае раздельной аппроксимации двух термодинамических функций.

Этот факт объясняется, по-видимому, тем обстоятельством, что при раздельной аппроксимации двух термодинамических функций, не учитывающей их внутренней взаимосвязи, нарушается первый закон термодинамики. Действительно, пусть аппроксимируются две термодинамические функции ($\rho = \rho(p, i)$ и $a = a(p, i)$). Из первого закона термодинамики при постоянной энтропии получим

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial i} \quad (2.3)$$

При раздельной аппроксимации функций $\rho(p, i)$ и $a(p, i)$ соотношение (2.3) не будет выполняться, следовательно, не будет выполняться и первый закон термодинамики.



Фиг. 3

Таким образом, использование раздельных аппроксимаций двух термодинамических функций может приводить к ошибкам, существенно превышающим погрешности аппроксимаций, поэтому предпочтительнее использовать хотя может быть и менее точные аппроксимации, но одной термодинамической функции.

В заключение автор благодарит В. В. Лулева за полезное обсуждение и помощь.

Поступило 8 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Самуйлов Е. В., Стаханов И. П., Плешанов А. С., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12000° К и давлений от 0.001 до 1000 атм). М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С., Самуйлов Е. В., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 12000 до 20000° К и давлений от 0.001 до 10000 атм). М., Изд-во АН СССР, 1959.
3. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С., Самуйлов Е. В., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000° К и давлений от 0.00001 до 100 атм). М., ВЦ АН СССР, 1962.
4. Лулев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равномерно диссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.
5. Синченко С. Г. Аппроксимация термодинамических функций воздуха. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, № 4.