

УДК 532.517.2:538.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ГАРТМАНА

А. М. САГАЛАКОВ

(Новосибирск)

В рамках линейной теории исследуется устойчивость течения Гартмана при произвольных магнитных числах Рейнольдса. Исходная трехмерная задача сведена к эквивалентной двумерной. С помощью теории возмущений найдены асимптотические выражения для собственных значений. Указано на целесообразность различения в ряде случаев двух типов возмущений — «магнитного» и «гидродинамического». Рассмотрены простые свойства устойчивости для частных примеров. Обобщен известный результат Лундквиста. Применяется энергетический подход к проблеме устойчивости.

Описаны результаты численных экспериментов, связанных с решением линейной проблемы устойчивости. Обнаружена своеобразная картина устойчивости. Имеются несколько типов неустойчивости, причем они могут развиваться одновременно. Гидродинамические и магнитные явления очень сложно взаимодействуют друг с другом. Магнитное поле может как увеличивать устойчивость течения, так и уменьшать ее.

1. Исследуется устойчивость течения проводящей вязкой несжимаемой жидкости между параллельными идеально проводящими пластинами поперек внешнего однородного магнитного поля. Задача линейной теории сводится к отысканию собственных значений для следующей задачи [1]:

$$(U - c)(\psi'' - k^2\psi) - U''\psi + \frac{i}{\alpha R}(\psi^{IV} - 2k^2\psi'' + k^4\psi) =$$

$$= \frac{G^2}{RR_m} [H_x(\Phi'' - k^2\Phi) - \frac{i}{\alpha}(\Phi''' - k^2\Phi') - H_x''\Phi]$$
(1.1)

$$H_x\psi - \frac{i}{\alpha}\psi' = (U - c)\Phi + \frac{i}{\alpha R_m}(\Phi'' - k^2\Phi)$$

$$\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = \Phi(\pm 1)$$

$$\left(U = \frac{\operatorname{ch} G - \operatorname{ch} Gy}{\operatorname{ch} G - 1}, \quad H_x = \frac{R_m \operatorname{sh} Gy - y \operatorname{sh} G}{G \operatorname{ch} G - 1} \right)$$

Здесь U и H_x — соответственно профиль скорости и профиль напряженности продольного магнитного поля, ψ и Φ — комплексные амплитуды поперечных компонент возмущений скорости и поля, $c = X + iY$ — комплексная фазовая скорость возмущений, собственное значение задачи, k — модуль волнового вектора, $\alpha = k_x$, R — число Рейнольдса, R_m — магнитное число Рейнольдса, G — число Гартмана.

Значения $Y < 0$ соответствуют затуханию возмущений, значения $Y > 0$ — росту. Система координат выбрана таким образом, что ось x направлена вдоль потока, а ось y — перпендикулярно пластинам. В качестве характерной длины принята полуширина канала L_0 , в качестве характерной скорости — скорость потока на оси канала V_0 , в качестве характерной напряженности магнитного поля — напряженность внешнего магнитного поля H_0 .

В случае малых R_m задача, связанная с анализом модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда с однородными граничными условиями

для ψ и ψ' , подробно изучена в [1, 2]. Эта задача на собственные значения для ряда других U детально рассмотрена в работах [3-5].

Отдельные соображения относительно устойчивости течения Гартмана при произвольных R_m высказаны в статьях [6, 7]. Ниже предпринимается попытка получить достаточно полную картину устойчивости для произвольных R_m .

2. Сведем исходную трехмерную задачу к эквивалентной двумерной преобразованиями, подобными проделанным Хантом для случая однородного продольного магнитного поля [8]¹. Для этого положим в исходных уравнениях

$$\alpha R = k\bar{R}, \quad \alpha R_m = k\bar{R}_m, \quad \alpha\Phi = \tilde{\Phi} \quad (2.1)$$

Определив зависимость $\bar{R}_* = f(R_m, G)$, можно проанализировать поведение $R_* = f^\circ(R_m, G)$ без проведения дополнительных расчетов. Пусть θ — угол между направлением волнового вектора k и направлением потока. Тогда

$$R_* = \min_{\theta} \frac{f(R_m \cos \theta, G)}{\cos \theta}$$

В дальнейшем, следовательно, будет рассматриваться эквивалентная двумерная задача. Знак тильды далее опускаем, а в (1.1) положим $k = \alpha$.

Полезно определить асимптотические выражения для c_n . Рассмотрим случай малых αR , αR_m . Пользуясь теорией возмущений, ищем решение в виде

$$\Phi = \varepsilon\Phi_0 + \varepsilon^2\Phi_1 + \dots, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \dots, \quad c = \varepsilon^{-1}c_0 + c_1 + \varepsilon c_2 + \dots$$

Здесь $\varepsilon = \alpha R$. Считаем дополнительно величину α^2 малой. Тогда в нулевом приближении получим

$$\begin{aligned} \Phi_0'' + i\delta c_0\Phi_0 &= -\delta\psi_0', \quad \psi_0^{IV} + i c_0\psi_0'' = -(G^2/\delta)\Phi_0''' \quad (-1 < y < 1) \\ \psi_0(\pm 1) = \psi_0'(\pm 1) &= \Phi_0(\pm 1) = 0, \quad (\delta = R_m/R) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь δ — магнитное число Прандтля. Нулевое приближение (2.2) оказывается эквивалентным рассмотрению покоящейся жидкости. Последняя задача изучалась в [10], где, однако, принимались во внимание только симметричные (по ψ) решения. В этом случае счетное множество собственных значений определяется в виде

$$\begin{aligned} c_n^{(0)} &= -i(\alpha R)^{-1} \left[\frac{(1+\delta)\pi^2(n+1)^2}{8\delta} \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{\pi(n+1)}{2\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{(1-\delta)^2}{16\delta} \pi^2(n+1)^2 - G^2} \right] \quad (2.3) \\ &(n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

Здесь $c_n^{(0)} = c_{0n}(\alpha R)^{-1}$. Анализ антисимметричных по ψ возмущений сводится к поиску корней сложного трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \left[k_1^3 (\operatorname{th} k_2 - k_2) - k_2^3 (\operatorname{th} k_1 - k_1) - \frac{\lambda}{1+\delta} (k_2 \operatorname{th} k_1 - k_1 \operatorname{th} k_2) \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$k_{1,2} = \sqrt{-1/2(\lambda - G^2) \pm \sqrt{1/4(\lambda - G^2)^2 - a\lambda^2}}, \quad \lambda = ic_0(1+\delta)$$

$$a = \delta(1+\delta)^{-2}$$

¹ Пример компланарного магнитного поля рассматривался еще рядом авторов, в частности, в [9].

В общем случае для нахождения корней (2.4) необходимы численные расчеты.

Проанализируем найденное выражение для c_n (2.3). Пока величина, стоящая под знаком радикала, положительна возмущения затухают монотонно. С ростом числа Гартмана величина под знаком радикала может стать отрицательной, что соответствует возникновению колебательных возмущений уже в нулевом приближении. (Подобные эффекты для случая покоящейся жидкости в полости достаточно произвольной формы были подробно проанализированы в [11].) Наличие осциллирующих возмущений сопряжено с конечной проводимостью жидкости. Они исчезают, когда $\delta \rightarrow 0$ (при фиксированной величине G). Ясно, что здесь фазовая скорость может принимать значения большие единицы, в отличие от задач с малыми R_m . Как и следовало ожидать, величина Y в (2.3) всегда отрицательна.

Когда $G \rightarrow 0$ в (2.3), получим

$$c_n^{(0)-} = -i \frac{\pi^2(n+1)^2}{4\alpha R}, \quad c_n^{(0)+} = -i \frac{\pi^2(n+1)^2}{4\alpha R_m} \quad (2.5)$$

Верхний индекс минус или плюс соответствует знаку радикала в (2.3). Выражение $c_n^{(0)-}$ — приближенно справедливо и для $n = 2, 4, 6 \dots$, а выражение для $c_n^{(0)+}$ справедливо и для $n = 0, 2, 4 \dots$. Эти спектральные номера отвечают антисимметричным возмущениям.

Когда δ мало, выполняются приближенные равенства

$$c_n^{(0)-} = -i \frac{\pi^2(n+1)^2 + 4G^2}{4\alpha R}, \quad c_n^{(0)+} = -i \frac{\pi^2(n+1)^2 + 4G^2}{4\alpha R_m} \quad (2.6)$$

Первое соотношение (2.6) совпадает с полученным в [2] асимптотическим выражением. В случае больших δ найдем для симметричных возмущений приближенные соотношения, которые будут совпадать с (2.6) после перестановки верхнего индекса.

Определение следующих приближений в рядах теории возмущений осложняется наличием точек кратности уже в нулевом приближении. Условием применимости формулы (2.3) помимо малости величин αR , αR_m будет требование

$$|c_n^{(0)}| \gg \max(|U|, |U''|)$$

Найдем теперь коротковолновую асимптотику. Воспользуемся тем фактором, что магнитное поле слабо воздействует на коротковолновые возмущения. Поэтому для нахождения асимптотики магнитное поле можно не принимать во внимание. При больших α затухание будет значительным и формой профиля скорости можно пренебречь. Легко определить, что

$$c_n^{(0)} = -\alpha/R, \quad c_n^{(0)} = -\alpha/R_m \quad (n \ll \alpha, \alpha \gg \max(1, G)) \quad (2.7)$$

Уже формулы (2.3) и (2.7) наводят на мысль о целесообразности различения двух типов возмущений — магнитного и гидродинамического. Эти понятия для случая покоящейся жидкости введены в [11]. В общем случае тип возмущений не выражен. Данное обстоятельство сопряжено с наличием точек кратности в спектре малых возмущений.

В формуле (2.3) при $\delta < 1$ знак минус перед радикалом соответствует возмущениям гидродинамического типа, а знак плюс — возмущениям магнитного типа. При $\delta > 1$ такое сопоставление знаков изменится на обратное. В формулах (2.7) первое соотношение связано с колебаниями гидродинамического типа, а второе соотношение — с колебаниями магнитного типа.

Тип возмущений явно определен, когда $H_0 = 0$. При этом приходим к двум различным задачам на собственные значения. Для ψ получаем уравнение Орра — Зоммерфельда, а для Φ — следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{i}{\alpha R_m}(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) + (U - c)\Phi = 0 \quad (-1 < y < 1), \quad \Phi(\pm 1) = 0 \quad (2.8)$$

Легко видеть, что уравнение возмущений (2.8) не содержит решений с $Y > 0$. Действительно, из (2.8) найдем

$$Y = - \int_{-1}^{+1} (|\Phi'|^2 + \alpha^2 |\Phi|^2) dy \left(\alpha R_m \int_{-1}^{+1} |\Phi|^2 dy \right)^{-1}, \quad Y < -\alpha/R_m \quad (2.9)$$

Фазовая скорость таких колебаний магнитного типа находится в пределах интервала, определяемого неравенствами

$$\min_y U < X < \max_y U$$

Возмущения поля и скорости в общем случае тесно переплетаются друг с другом. Когда $H_0 \neq 0$, существуют, однако, два простых примера, в которых магнитные и гидродинамические эффекты выделяются «в чистом» виде. Ясно, что, когда R_m мало, магнитная часть спектра лежит глубоко в области устойчивости. При $R_m \rightarrow 0$ соответствующие декременты затухания стремятся к ∞ . В данной ситуации для анализа устойчивости достаточно ограничиться гидродинамической частью спектра. Если же мало R , то определяющую роль в анализе устойчивости играет магнитная часть спектра. При $R \rightarrow 0$ существуют такие собственные значения, которые не изменяются при таком предельном переходе. Однако они изменяются при уменьшении или увеличении R_m . Имеются такие собственные значения, которые не претерпевают изменений при $R_m \rightarrow 0$. Формулы, приведенные выше, непосредственно указывают на данные обстоятельства. В общем случае эти факты отмечались в ходе проведения численных экспериментов.

Интересно выяснить, существует ли неустойчивость, связанная с магнитной частью спектра. Рассмотрим случай малых αR и больших R_m . Пусть $G \ll 1$. Допустим, что магнитной вязкостью в нестационарных процессах можно пренебречь. Разлагая U и H_x в ряд по G , получим в нулевом приближении

$$U = 1 - y^2, \quad H_x = 1/3 R_m (y^3 - y)$$

Уравнение устойчивости потока в этом приближении имеет вид

$$\psi^{IV} - 2\alpha^2 \psi'' + \alpha^4 \psi = -i\alpha G^2 R_m \left[f \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \frac{f}{U - c} \psi - f'' \frac{f}{U - c} \psi \right] \\ (-1 < y < 1, \quad \psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0, \quad f = 1/3 (y^3 - y)) \quad (2.10)$$

Число определяющих параметров снижается здесь с трех (R, R_m, G) до одного — величины $G^2 R_m$. Если уравнение (2.10) имеет решения с $Y > 0$ (на что указывают проведенные численные эксперименты), то ясно, что неустойчивость может существовать при весьма малых числах Рейнольдса. Критерии подобия R и R_m оказываются в некотором смысле сходными между собой. Как бы ни было мало значение одного из них, найдется такое большое значение другого, что поток будет неустойчивым.

Определим асимптотическое значение критического магнитного числа Рейнольдса при малых R и G . Оно, очевидно, имеет вид

$$R_{m*} \sim G^{-2} \quad (2.11)$$

Как и следовало ожидать, $R_{m*} \rightarrow \infty$, когда $G \rightarrow 0$.

Пусть далее G велико, $\alpha R_m \gg G^2$, $\alpha \ll 1$, а остальные предположения прежние. Длинноволновые возмущения «не чувствуют» узкой пристенной зоны, где происходит основное изменение скорости и напряженности магнитного поля. Поэтому можно считать, что

$$U = 1, \quad H_x = -(R_m / G)y \quad (2.12)$$

Учитывая все это, определим задачу на собственные значения

$$\psi^{IV} = - \frac{i(\alpha R_m)^2}{\alpha R_m(1-c) - iG^2} y(y\psi)'' \quad (-1 < y < 1) \quad (2.13)$$

$$\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0$$

Анализ устойчивости в данном случае проводится просто. Из (2.13) получим

$$\int_{-1}^{+1} |\psi''|^2 dy \left(\int_{-1}^{+1} |(y\psi)'|^2 dy \right)^{-1} = \frac{i(\alpha R_m)^2}{\alpha R_m(1-c) - iG^2} \quad (2.14)$$

Соотношение (2.14) приводит к выводу, что

$$Y < -G^2 / \alpha R_m \quad (2.15)$$

Если сделанные предположения корректны, то следует отметить, что поток устойчив в рассматриваемой области параметров. Небезынтересно указать на сходство полученного результата со случаем приосевых возмущений [2] для $R_m \ll 1$, когда определяется неравенство, подобное (2.15) с заменой R_m на R .

Если R_m мало, а $G \gg 1$, то удастся, как показал Лундквист [12], найти вид зависимости R_* от G с точностью до постоянной пропорциональности. Обобщим этот результат на случай произвольных R_m .

Когда G велико, профиль скорости вырождается в экспоненциальный, а профиль магнитного поля вблизи стенки приближается выражением

$$H_x = R_m / G^{-1} (\exp [G(y-1)] - 1) \quad (y > 0) \quad (2.16)$$

Положим

$$\xi = G(y-1), \quad \alpha_+ = \frac{\alpha}{G}, \quad R_+ = \frac{R}{G}, \quad R_{m+} = \frac{R_m}{G} \quad (2.17)$$

Подставив (2.17) в исходное уравнение с учетом аппроксимаций H_x и U , придем к задаче на собственные значения, в которой будут фигурировать только переменные ξ , α_+ , R_+ , R_{m+} (считаем, что $G \rightarrow \infty$). Определив вначале зависимости $R_{+*} = f(R_{m+})$ и $\alpha_{+*} = g(R_{m+})$, получим асимптотические выражения

$$R_* = Cf \left(\frac{R_m}{G} \right), \quad \alpha_* = Gg \left(\frac{R_m}{G} \right). \quad (2.18)$$

При малых R_m / G функции f и g практически постоянны и выражения (2.18) сопрягаются с асимптотикой Лундквиста. Пусть $f(x_0)$ ($x_0 = R_{m0} / G$) отличается от значения $f(0)$ (точнее $f(\varepsilon)$, где ε — малая постоянная) на некоторую заданную величину, например на 2%. Будем увеличивать значение R_m от R_{m0} . Как бы ни было велико R_m , найдется такая большая ве-

личина G , что $R_m / G = x_0$. Итак, при $R_m < x_0 G$ будет иметь место неустойчивость, описываемая предельными соотношениями при $R_m \rightarrow 0$ (с заданной точностью).

Зависимости (2.18) будут оставаться справедливыми, если $g(x)$ с ростом x не убывает.

3. Рассмотрим некоторые простые следствия, к которым приводит энергетический метод [13, 14]. Пусть вначале магнитное поле отсутствует. Из анализа, проведенного в [14], ясно, что в данном случае $R_* = R_{m*} = 49.9$. Квадрат со сторонами, равными 49.9, будет представлять собой область на плоскости RR_m , которая соответствует устойчивости по отношению к произвольным возмущениям.

В [14] указывалось на два частных класса решений соответственно с возмущениями скорости $u_i \equiv 0$ и возмущениями магнитного поля $h_i \equiv 0$. Хотя с формальной точки зрения это обстоятельство необходимо учитывать, оно не является естественным с физической точки зрения. Действительно в присутствии магнитного поля возмущения u_i и h_i связаны друг с другом. Реализации $u_i \equiv 0$ (равно как и $ch_i \equiv 0$) следует рассматривать как нефизические.

Предположим выполнимость условий, при которых было найдено асимптотическое выражение (2.11). Тогда систему уравнений Эйлера — Лагранжа [14] приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{2}{G^2 R_m} (u'' - k^2 u) &= -\frac{q^2}{U'} v + i\alpha\rho, & i\alpha u + i\beta w + v' &= 0 \\ \frac{2}{G^2 R_m} (v'' - k^2 v) &= -\frac{q^2}{U'} u + \rho' & (q &= R_m^{-1} H_x') \\ \frac{2}{G^2 R_m} (w'' - k^2 w) &= i\beta\rho \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ρ — множитель Лагранжа, u, v, w — фурье-образы соответственно x, y, z -компонент скорости, $\beta = k_z$. Таким образом приходим к задаче Орра с эффективным градиентом скорости

$$U' = (3y^2 - 1)^2 / 18y$$

Эта задача может быть решена по методике, разработанной в [14, 15]. Пусть минимум собственных значений $G^2 R_m$ есть Ω . Тогда найдем асимптотическое выражение

$$R_{m*} = \Omega G^{-2} \quad (3.2)$$

Из (2.11) и (3.2) делаем вывод, что при малых R и G величина R_{m*} с уменьшением G увеличивается обратно пропорционально G^2 как по линейной теории, так и по энергетическому методу. Множитель пропорциональности должен быть, разумеется, больше в линейной теории.

Предположим далее выполнимость условий, при которых было получено асимптотическое выражение (2.18). Проведем преобразование, подобное (2.17), определим асимптотическое выражение

$$R_* = G f_e(R_m / G) \quad (f_e(0) = 19.5) \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) справедливо только для достаточно коротковолновых возмущений, чтобы игнорирование ядра потока было оправдано. Здесь тоже получили результат, вполне аналогичный таковому в линейной теории. Следует ожидать, что и в данной ситуации функция $f_e(x)$ будет слабо зависеть от x при небольших значениях R_m / G .

4. Переходим к описанию численного метода, использованного в расчетах по линейной теории.

Исходную систему уравнений (1.1) приведем к виду

$$\begin{aligned} P' &= aR + bF + c\psi + d\Phi + e\varphi \\ \varphi' &= \gamma\Phi + \tau\psi + \kappa F \\ \psi' &= F, \quad F' = R, \quad R' = P, \quad \Phi' = \varphi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Коэффициенты a, b, c, \dots в (4.1), являющиеся функциями y , находятся из сравнения с (1.1). Преобразование системы к (4.1) позволяет выбрать для численного решения определенную схему прогонки в дифференциальной форме [16, 17]. Стандартный вариант [16, 17] приводит к весьма громоздким правым частям нелинейной системы уравнений. Численная реализация такой схемы была бы сопряжена с огромными затратами машинного времени. Воспользуемся идеей упрощения правых частей нелинейной системы уравнений, предложенной в [18]. Будем использовать в отличие от [18] три схемы прогонки (выбор варианта прогонки, естественно, неоднозначен). Это позволит найти оптимальный вариант и поможет избежать ошибки в процессе проведения сложных расчетов.

Использованные схемы прогонки определяются из следующих соотношений

$$\begin{pmatrix} P \\ \Phi \\ \varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi \\ F \\ R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R \\ P \\ \varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi \\ F \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F \\ \varphi \\ P \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi \\ \Phi \\ R \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Здесь A — квадратная матрица. Уравнения для элементов матриц находятся при дифференцировании (4.2).

Вначале на малом расстоянии от стенок канала интегрируется линейная система (4.1), находится фундаментальная система ее решений и рассчитываются начальные данные для нелинейной системы уравнений. После этого переходим к интегрированию нелинейной системы уравнений для A_{ij} . Итерационный процесс для нахождения корней характеристического уравнения организуется как обычно.

Используя свойства симметрии U и антисимметрии H_x , можно показать, что достаточно ограничиться рассмотрением двух типов возмущений. Первый тип определяется возмущениями, симметричными по ψ (антисимметричными по Φ), второй тип — возмущениями, антисимметричными по ψ . Первый тип возмущений будем условно называть симметричным, а второй — антисимметричным.

Если расчеты проводятся по полуширине канала с учетом симметрии задачи, то характеристическое уравнение определяется на оси канала. Например, для второй схемы (4.2) получим в симметричном случае $A_{21} = 0$, в антисимметричном случае $A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32} = 0$.

Способ решения задачи с учетом симметрии значительно экономичнее. Затраты машинного времени примерно в два раза меньше, чем в случае, когда интегрирование проводится по ширине канала. Однако этот способ не может быть применен, по-видимому, в общем случае для расчетов при больших α .

Опыт проведения численных экспериментов показывает, что из приведенных схем наиболее подходящим вариантом прогонки является второй, который и был преимущественно использован в вычислениях. Если сравнивать, например, первый и второй варианты прогонки, то следует отметить, что для второй схемы затраты машинного времени оказываются в 1.5—2 раза меньше. Поведение функций $A_{ij}(y)$ второго варианта прогонки на участке интегрирования является в некотором смысле более плавным.

Численные эксперименты проводились на БЭСМ-6. Собственные значения находились с заданной точностью (обычно три значащих цифры). Контрольные расчеты были выполнены на примере течения Гартмана при малых R_m и дали хорошее совпадение с результатами, полученными в [2]. Кроме того, было рассчитано первое собственное значение в зависимости от R_m для сопоставления с формулой (2.3).

5. Общая картина устойчивости рассматриваемого течения оказывается весьма сложной. Считаю целесообразным вначале рассмотрение неустойчивости «по частям».

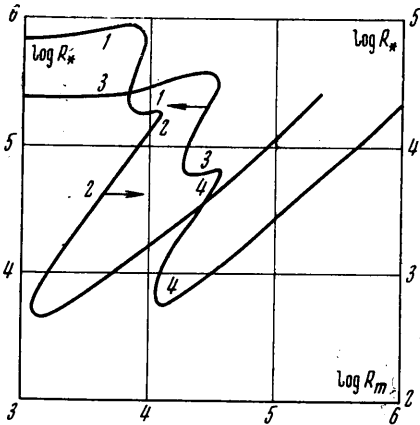
Прежде всего для характерных чисел Гартмана изучим тип неустойчивости, исчезающий при $R \rightarrow 0$.

Случай небольших G представлен примером $G = 3$ на фиг. 1 (правая шкала для R_*). Область неустойчивости отделяется от устойчивой зоны кривыми 1, 2. Такое разделение одной окаймляющей кривой на две условно. Переход между ними хотя и довольно резкий, но все же, по-видимому, без точки излома. Эта неустойчивость сопряжена с симметричными возмущениями и первым собственным значением, если иметь в виду соответствие примеру малых α .

Начиная с $R_m = 500$, величина R_* отличается от своего предельного значения при $R_m \rightarrow 0$ не более чем на 2%. Приведем численный пример, демонстрирующий предельный переход, когда $R_m \rightarrow 0$. (В дальнейшем параметры, соответствующие локальным максимумам зависимостей $Y_n(\alpha)$, будем помечать нижним индексом нуль.) Ниже приведено положение локального максимума функции $Y_1(\alpha)$, сопряженной с неустойчивостью при $R = 6.6 \cdot 10^4$. Поведение функции $Y_0(R_m)$ отражает тенденцию к некоторой стабилизации потока с ростом R_m .

R_m	X_0	Y_0	α_0
426	0.166	$-2.57 \cdot 10^{-4}$	0.96
184	0.166	$-1.73 \cdot 10^{-4}$	0.96
120	0.166	$-1.55 \cdot 10^{-4}$	0.96

Максимальное значение R_* на кривой, окаймляющей область неустойчивости, оказывается равным $8.7 \cdot 10^4$, тогда как при $R_m \rightarrow 0$ $R_* = 6.75 \cdot 10^4$. Сначала с ростом R_m критические числа Рейнольдса просто несколько возрастают. Далее картина устойчивости становится более сложной. Например, для случая $R_m = 7.9 \cdot 10^3$ при изменении R обнаружим своеобразную смену стабильности потока по отношению к данному типу возмущений.



Фиг. 1

Течение устойчиво до $R = 1.32 \cdot 10^3$. Далее имеет место неустойчивость, которая сменяется устойчивостью при $R = 10^4$. В диапазоне $R = 1.82 \cdot 10^4 \div 4.35 \cdot 10^4$ поток вновь устойчив, затем следует зона стабильности до $R = 8.5 \cdot 10^4$. Наконец, при $R > 8.5 \cdot 10^4$ поток всегда неустойчив.

Величина α_* на окаймляющей кривой 1 изменяется незначительно. Предельное значение α_* при $R_m \rightarrow 0$ равно 0.94. Когда $R_m = 5.26 \cdot 10^3$, получим $\alpha_0 = 0.91$, $X_0 = 0.155$.

Переходим к описанию области неустойчивости, окаймленной кривой 2. Видим, что эта область простира-

ется до таких «малых» магнитных чисел Рейнольдса, где предельное решение еще справедливо с хорошей точностью. В большей части образованного района неустойчивости $\delta \sim 1$. Здесь следует ожидать наибольшего переплетения магнитных и гидродинамических эффектов.

Минимальная величина R_m , при которой появляется дополнительная неустойчивость такого типа, равна $1.15 \cdot 10^3$. Минимальная величина R_* оказывается равной $4.35 \cdot 10^2$. Здесь магнитное поле оказывает явно дестабилизирующее воздействие, что приводит к резкому падению критических чисел Рейнольдса по сравнению со случаем $H_0 = 0$.

Продемонстрируем, как изменяется величина Y_0 , характеризующая декремент нарастания (равный αY_0) при $R = 5.82 \cdot 10^3$.

R_m	X_0	Y_0	α_0
$6.63 \cdot 10^3$	0.203	$3.1 \cdot 10^{-3}$	0.813
$2.01 \cdot 10^4$	0.126	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.842
$3.92 \cdot 10^4$	0.0849	$4.81 \cdot 10^{-3}$	1.05

Величина X_0 монотонно убывает с ростом R , а зависимость $Y_0(R_m)$ ведет себя подобно функции $Y_0(\alpha)$ для течения Пуазейля в общей гидродинамике. Образуется своего рода «нейтральная кривая» на плоскости RR_m .

Значения α_* и X_* для $\min R$ равны соответственно 1.15 и 0.259. За область «носика» нейтральной кривой α_* и X_* монотонно убывают.

Рассмотрим такой же тип неустойчивости при $G = 6$. На фиг. 1 кривая, окаймляющая область неустойчивости, состоит из двух линий 3 и 4 (это разделение, как и при $G = 3$, условно). Данный пример «средних» чисел Гартмана напоминает в целом случай, разобранный выше, но вся картина смещается на плоскости RR_m вверх как по R , так и по R_m .

Проанализируем случай больших G (по-прежнему ограничиваясь частным типом возмущений). Численные расчеты проводились при $G = 10$.

На фиг. 2 сплошная линия отделяет область устойчивости от неустойчивой зоны. Данная кривая условно делится на три части, обозначенные цифрами 1, 4, 5. Эта неустойчивость сопряжена с симметричными возмущениями. При больших G нарастающими могут быть и антисимметричные колебания.

Область неустойчивости потока по отношению к антисимметричным возмущениям выделена пунктирной линией, которая целиком лежит внутри зоны неустойчивости течения по отношению к симметричным возмущениям. Для данного типа колебаний симметричные возмущения наиболее опасны, т. е. именно они контролируют устойчивость потока.

Когда $R_m < 10^3$, значения R_* отличаются от своих предельных величин не более чем на 2% как для симметричной, так и для антисимметричной ветвей. Поскольку число Гартмана $G = 10$ уже достаточно большое для определения асимптотических зависимостей, то величину $R_m/G = 10^2$ можно принять в качестве характерного параметра x_0 (см. п. 2). Окончательно приходим к выводу, что предельная зависимость не будет нарушаться с точностью, указанной выше, если

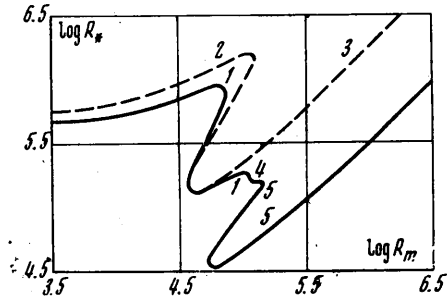
$$R_m < 10^2 G \quad (G \geq 10) \quad (5.1)$$

При $x_0 = 10^3$ отличие от асимптотического выражения составляет порядка 10%. Можно сказать, что предельная зависимость будет нарушаться незначительно пока

$$R_m < 10^3 G \quad (G \geq 10) \quad (5.2)$$

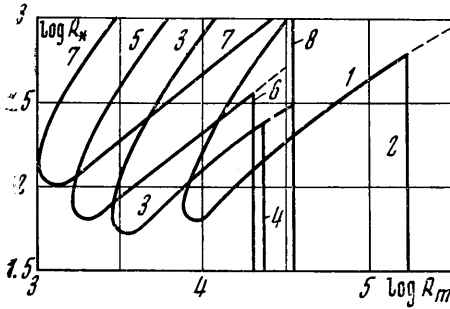
Интересно было выяснить, изменяется ли что-нибудь в полном спектре малых возмущений для области значений R_m , удовлетворяющих требованиям (5.1), (5.2). В этих целях проведены численные расчеты при $R_m = 10^3$, $R = 6 \cdot 10^5$ в диапазонах $\alpha = 10^{-5} \div 10^4$, $n = 1 \div 5$. Установлено, что гидродинамическая часть спектра практически не претерпевает изменений по сравнению с асимптотическим поведением.

Значения α_* с ростом R_m вначале убывают для обеих неустойчивых ветвей. Поэтому при $R_m > 10^4$ асимптотические соотношения для больших G , полученные в п. 2, перестают быть справедливыми. Величины критических волновых чисел становятся такими, что возмущения чувствуют весь профиль скорости. Далее, начиная с области, где окаймляющая кривая загибается в сторону уменьшения R_* , значения α_* быстро возрастают. Эффект локальности начинает играть существенную роль, что приводит к



Фиг. 2

слияниям симметричных и антисимметричных зависимостей. Максимальная величина $\alpha_* = 2.33$ значительно превышает свое предельное значение. Она достигается в районе локального минимума R_* . По мере возрастания величин R_* критические волновые числа начинают вновь убывать и эффект локальности перестает работать. Характер однородных граничных условий на оси становится существенным и соответствующие зависимости расслаиваются. В дальнейшем значения α_* только убывают, поэтому симметричные и антисимметричные возмущения ведут себя различным образом.



Фиг. 3

Результаты, полученные в п. 2, определяют поведение при увеличении G того участка окаймляющей кривой, где симметричные и антисимметричные возмущения сливаются. Найдем здесь

$$\begin{aligned} R_* G^{-1} &= \text{const}, \\ R_m G^{-1} &= \text{const} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Значения постоянных в (5.3) изменяются от точки к точке. В частности, поведение локального

минимума R_* при больших G определяется асимптотической зависимостью $R_* = 1.3 \cdot 10^4 G$.

При больших R_* , R_m величины α_* становятся малыми и осуществляется выход на простые асимптотические зависимости. Так, например, для случая кривой 3 обнаружено, что, начиная со значений $R_m > 3 \cdot 10^6$, с хорошей точностью выполняются асимптотические равенства

$$R_* = 1.8 R_m, \quad (\alpha R)_* = 0.7 \cdot 10^6 G \quad (\alpha_* \rightarrow 0)$$

6. Выше установлено, что случай малых G соответствует резкому уменьшению величин R_* по сравнению с примером течения без магнитного поля. Проанализируем этот эффект более подробно.

Рассмотрим поведение нейтральной кривой (определенной указанным выше способом) с уменьшением G . Прежде всего отметим, что эта «петля», ограничивающая область неустойчивости, не может безгранично смещаться влево на плоскости RR_m . Действительно при $R \rightarrow 0$ должно быть справедливо известное предельное решение. Следовательно должен существовать минимум величины R_m (равной R_{m0}), определяющей то значение R_m , при котором впервые появляется неустойчивость для сравнительно небольших R .

Численные эксперименты показывают, что минимум $R_{m0}(G)$ достигается при $G \approx 1.5$ и равен $\approx 10^3$. При этом минимальная величина R_* , которую будем обозначать через R_{*0} , равна $\approx 10^2$.

На фиг. 3 показан ряд петель для малых G . Кривые 1, 3, 5, 7 соответствуют числам Гартмана 0.5, 0.75, 1, 1.5. Видно, что значения R_{m0} с ростом G смещаются вправо. При $G = 0.5$ уже получим $R_{m0} = 7.4 \cdot 10^3$.

Минимум $R_{*0}(G)$, равный 55, достигается при меньшей величине $G = 0.75$, нежели для функции $R_{m0}(G)$. Фазовая скорость, как и в предыдущих примерах, максимальна в районе носика и убывает за этой областью. Для $G = 1.5$ максимальное значение $X_{\max} = 0.29$ на нейтральной кривой. Волновые числа вдоль нейтральных кривых как обычно убывают за районом носика.

Асимптотическое поведение таких петель при $G \rightarrow 0$ представлено ниже. Последнее значение можно принять в качестве асимптотического выражения R_{*0} при $G \rightarrow 0$.

G	0.5	0.133	0.0665	0.0371
R_{*0}	63	120	125	126

Численный анализ, проделанный для носиков нейтральных кривых, показывает: при $G \rightarrow 0$ они смещаются на плоскости RR_m вправо таким образом, что для каждой их точки $R_m G^2 = \text{const}$. Магнитное число Рейнольдса, соответствующее величинам R_{*0} , при малых G определяется по асимптотической формуле

$$R_m = 3.16 \cdot 10^3 G^{-2}$$

Результаты, полученные выше, согласуются с аналитической оценкой, приведенной в п. 2. Величины R_m оказываются в данном случае достаточно малыми, а X и R_m таковы, что магнитной вязкостью в нестационарных процессах можно пренебречь. Действительно, необходимые условия этой аппроксимации

$$|1 - c| \gg (\alpha R_m)^{-1}, \quad |c| \gg (\alpha R_m)^{-1}$$

в рассматриваемом примере явно выполняются.

7. Численные эксперименты указывают на наличие неустойчивости при $R \rightarrow 0$ (и фиксированных R_m и G). Для исследуемого течения помимо зависимости $R_*(R_m)$ можно определять и функции $R_{m*}(R)$. (При графическом построении таких функций значение R_m будем по-прежнему наносить на оси абсцисс).

Проанализируем вначале нестабильность потока по отношению к возмущениям с небольшими X . Данная неустойчивость порождается симметричными возмущениями. С ростом G величины R_{m*} данной неустойчивости быстро увеличиваются, поэтому наибольший интерес представляет случай небольших G . На фиг. 3 области правее прямых 8, 6, 4, 2 соответствуют неустойчивости такого типа для $G = 1.5, 1, 0.75, 0.5$. Видно, что зависимости $R_{m*}(R)$ при небольших R практически постоянны, как и функции $R_*(R_m)$ для небольших R_m . Увеличение должно привести к тому, что прямые, указанные выше, будут загибаться вправо на плоскости RR_m .

Заметим, что имеется наиболее опасное число Гартмана G_0 , при котором R_{m*} минимально. Из фиг. 3 приходим к выводу, что $G_0 \approx 1$ и лежит в интервале (0.75, 1.5). Соответствующая величина $R_{m*} \approx 2 \cdot 10^4$.

На результирующих окаймляющих кривых, связанных с двумя различными типами неустойчивости, в точках излома фазовые скорости и критические волновые числа претерпевают скачок конечной величины.

С увеличением G минимальные значения $R_{m*}(R)$ быстро возрастают. Если при $G = 1.5 \min R_{m*}(R) = 3.5 \cdot 10^4$, то для $G = 3$ имеем $\min R_{m*}(R) = 2.82 \cdot 10^5$. При малых G будет выполняться асимптотическая зависимость, подобная (6.1). Имея в виду данные при $G = 0.5$, оценим

$$\min R_{m*} \sim 0.5 \cdot 10^5 G^{-2} \quad (G \rightarrow 0) \quad (7.1)$$

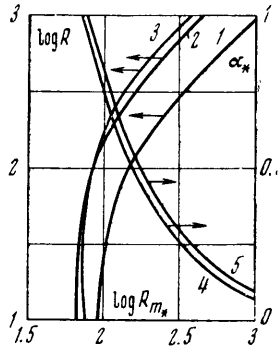
Другим типом неустойчивости, не исчезающей при $R \rightarrow 0$, является нестабильность потока по отношению к антисимметричным возмущениям. Величины R_{m*} оказываются здесь значительно меньшими, чем в примере, рассмотренном выше. Характерно также отличие фазовых скоростей, которые в данном случае порядка 1.

Пусть $G = 3$. На фиг. 4 кривая 1 отделяет область устойчивости от неустойчивой зоны. Асимптотические равенства при $R \rightarrow 0$ имеют вид

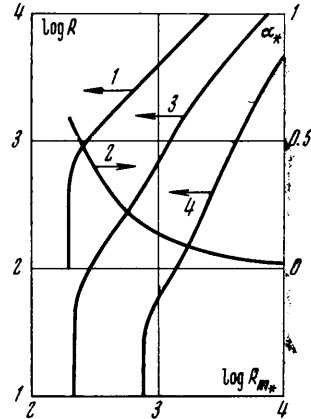
$$R_{m*} = 89, \quad \alpha_* = 0.905, \quad X_* = 0.913 \quad (7.2)$$

Пока величины δ большие значения R_{m*} практически постоянны. Это неудивительно, если принять во внимание предыдущий анализ. Далее с ростом R окаймляющая кривая загибается вправо и выходит на асимптотическую зависимость

$$R_{m*} = 1.07 R \quad (R \rightarrow \infty) \quad (7.3)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

При увеличении R критическое волновое число монотонно убывает и выходит на асимптотику

$$\alpha_* = 88/R_{m*} \quad (R \rightarrow \infty) \quad (7.4)$$

Дополнительный численный анализ показывает, что эта неустойчивая ветвь не является единственной. В частности, здесь имеется еще одна окаймляющая кривая, на которой

$$R_{m*} = 1.17R, \quad \alpha_* = 3.28 \cdot 10^3 / R_{m*} \quad (R \rightarrow \infty) \quad (7.5)$$

Соотношения (7.3) (7.4) значительно отличаются от (7.5). Однако с уменьшением R обе неустойчивые ветви сближаются и сливаются при $R \sim 10^2$, т. е. в том районе, где нарушается асимптотическое поведение зависимости $R_{m*}(R)$ при малых R .

Средние числа Гартмана представлены на фиг. 4 примером $G = 6$ (кривая 3 — зависимость $R_{m*}(R)$, кривая 5 — зависимость $\alpha_*(R_{m*})$).

Переходим к случаю $G = 10$. На фиг. 5 нанесены зависимости R_{m*} и α_* от R (соответственно кривые 1 и 2). Предельные соотношения имеют вид

$$R_{m*} = 196, \quad X_* = 1, \quad \alpha_* = 0.585 \quad (R \rightarrow 0)$$

$$R_{m*} = 0.26R, \quad X_* = 0.976, \quad \alpha_* = 130 / R_{m*} \quad (R \rightarrow \infty) \quad (7.6)$$

Ниже на примере $G = 10$ проиллюстрирован предельный переход при $R \rightarrow 0$ и фиксированном $R_m = 900$.

R	X_0	Y_0	α_0
540	1	$1.29 \cdot 10^{-2}$	0.158
111	1.01	$8.67 \cdot 10^{-3}$	0.148
5	1.01	$7.31 \cdot 10^{-3}$	0.145

Предельная зависимость практически достигается уже при $R = 5$. Эти собственные значения соответствуют возмущениям магнитного типа.

Проведенный анализ показывает, что должно быть наиболее опасное число Гартмана G_0 , при котором величина $\min R_{m*}(R)$ минимальна. Численные расчеты определяют

$$G_0 = 4.5, \quad R_{m*}(G_0) = 66, \quad \alpha_*(G_0) = 1.05 \quad (R \rightarrow 0)$$

Минимум пологий. На фиг. 4 (кривые 2 и 4) представлены зависимости $R_{m*}(R)$ и $\alpha_*(R_{m*})$ для $G = 4.78$.

Рассмотрим случай малых G . На фиг. 5 изображены кривые, отделяющие неустойчивую зону для $G = 0.5$ (кривая 4) и $G = 1.5$ (кривая 3). При $G \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое выражение

$$R_{m*} = 101 G^{-2} (G \rightarrow 0, R \rightarrow 0) \quad (7.7)$$

Формула (7.7) вполне применима при $G \lesssim 0.1$ и $R_{m*} \gg R$.

Сложнее обстоит дело с нахождением предельных соотношений при $G \gg 1$.

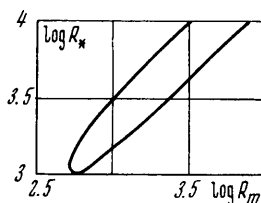
Выше было показано, что при малых R и больших G вообще невозможна неустойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям, если магнитной вязкостью можно пренебречь в нестационарных процессах. Заметим, однако, что с ростом G условия пренебрежения магнитной вязкостью перестают выполняться. Это уже наглядно видно на примере $G = 10$. В данном случае на границе устойчивости фазовые скорости близки к 1, а величины R_m не слишком велики. Поэтому $|1 - c| \sim (\alpha R_m)^{-1}$.

Имеются основания считать, что неустойчивость при малых R быстро исчезает при увеличении G . Численные эксперименты указывают на то, что при больших G области неустойчивости потока по отношению к антисимметричным возмущениям представляют собой зоны, ограниченные петлеобразными кривыми, подобными рассмотренным выше.

На фиг. 6 представлена нейтральная кривая на плоскости RR_m для $G = 13$. Максимальное значение $\alpha_* \approx 0.3$ на границе устойчивости достигается в районе минимума R_* . Далее при движении вдоль окаймляющей кривой критические волновые числа убывают. Асимптотическое значение δ на левой стороне петли равно 0.31, на правой — 0.75.

8. На основе полученных выше результатов составим общую картину устойчивости. Изучим вначале роль трехмерных возмущений. Простейшие случаи, описываемые, например, формулами (7.1) — (7.7), анализируются сразу без применения графического построения. Непосредственно убеждаемся в том, что двумерные возмущения являются наиболее опасными. То же самое имеет место и в общем случае. Это заключение отличается от результатов для плоских течений в продольном магнитном поле, для которых теорема Сквайра, вообще говоря, неприменима.

Опишем итоговую картину устойчивости для характерных чисел Гартмана. Пусть вначале $G = 3$. Легко видеть, что область стабильности потока на плоскости RR_m будет конечной. Она ограничивается результирующей кусочно-гладкой кривой, состоящей из двух гладких ветвей. Первая кривая продолжается непосредственно из области малых R_m , а вторая линия связана с неустойчивостью течения по отношению к антисимметричным возмущениям. Пересечение этих ветвей происходит при $R_m = 10^4$. Следовательно, при $R_m > 10^4$ поток неустойчив по отношению к малым возмущениям для всех R . Можно также убедиться, что при $R > 8.7 \cdot 10^4$ имеет ме-



Фиг. 6

сто неустойчивость для всех R_m (случаи $R = 0$, $R_m = 0$ здесь и ниже не принимаются во внимание).

Подобными кривыми отделяется зона стабильности течения при $G = 6$ и 10. В первом случае находим, что при $R_m > 3.4 \cdot 10^4$ поток неустойчив для всех R , а при $R > 3.7 \cdot 10^5$ он неустойчив для всех R_m . Для $G = 10$ течение нестабильно при $R_m > 7.3 \cdot 10^4$ для всех R . Если $R > 8.7 \cdot 10^5$, то оно неустойчиво при всех R_m .

Для малых G область устойчивости будет, вероятно, конечной как бы ни было мало G (но отлично от нуля). При $G = 1$ это утверждение проверено непосредственно численным расчетом.

Сложнее дело обстоит со случаем больших G (фактически $G > 10$). Здесь выяснено преимущественно поведение гидродинамической ветви неустойчивости (см. п. 1). Отдельные данные установлены в п. 7. Для примера больших G трудно составить достаточно полную картину устойчивости.

В неустойчивой области имеется целый ряд разновидностей нарастающих колебаний с разными волновыми числами, декрементами нарастания и фазовыми скоростями. Данное обстоятельство наглядно указывает на то, что имеется несколько типов неустойчивостей, причем они могут развиваться одновременно.

Магнитные и гидродинамические явления очень сложно взаимодействуют друг с другом. Образуются своеобразные зоны перемежаемости устойчивости. Магнитное поле может как увеличивать устойчивость течения, так и уменьшать ее.

Природа неустойчивости носит разный характер в разных участках зоны нестабильности. Причиной неустойчивости при небольших R_m является «парадоксальное» действие вязкости. Потеря устойчивости приведет здесь к образованию турбулентного движения, напоминающего в какой-то мере течение при отсутствии магнитного поля. Потеря устойчивости при $R_m \gg 1$ будет связана с перестройкой конфигурации магнитного поля. Возможно развитие сложного нестационарного движения жидкости и силовых линий.

Из результатов предыдущих пунктов видно, что потеря устойчивости может развиваться при сколь угодно малых R (но отличных от нуля). Этот пример соответствует большой вязкости ν . Смещения элементов жидкости в процессе развития неустойчивости должны быть сопряжены здесь с большими энергетическими затратами. Легко видеть, что и энергия поля неограниченно возрастает, когда $\nu \rightarrow \infty$, а G фиксировано.

Если $\nu \rightarrow \infty$, а величины H_0 и R_m постоянны, то значения G уменьшаются и критические магнитные числа Рейнольдса возрастают. Случай достаточно большой вязкости соответствует здесь устойчивости потока.

Влияние проводимости σ на устойчивость течения исследовалось, как правило, при фиксированных G . Следует помнить, что данный пример не совпадает со случаем $H_0 = \text{const}$. Если H_0 фиксировано, то с ростом σ величина G возрастает как $\sqrt{\sigma}$. Выберем некоторую точку на плоскости RR_m для какого-нибудь значения G и будем увеличивать σ (и соответственно R_m) при $G = \text{const}$ и затем при $H_0 = \text{const}$. Очевидно, что влияние проводимости в этих двух примерах не обязано быть одинаковым. Например, положим в качестве исходной точки $R = 1$, $R_m = 10$, $G = \sqrt{10}$ и увеличим σ в 10 раз. Если при этом $G = \text{const}$, то попадем в неустойчивую зону, а если $H_0 = \text{const}$, то остоаемся в пределах устойчивой зоны.

Величина продольного магнитного поля H_x при больших G имеет порядок R_m / G в основной области течения. Увеличение напряженности магнитного поля при фиксированном R_m приводит к уменьшению натяжения силовых линий магнитного поля, поэтому с ростом G тенденция к спрям-

лению силовых линий должна уменьшаться. Такая стабилизирующая роль магнитного поля была в какой-то степени проиллюстрирована численными расчетами. Ясно, что при этом будет повышаться устойчивость и в гидродинамической области.

Стационарное решение Гартмана справедливо при всех R и R_m . Поэтому могло казаться, что, накладывая слабое внешнее магнитное поле, можно получать какие угодно большие индуцированные поля с ростом проводимости среды. Однако, начиная с некоторых значений R и R_m , в системе развивается неустойчивость и такой генератор магнитного поля не реализуется в действительности. Результаты данной работы накладывают ограничения на величины напряженности магнитного поля H_x , которое может генерироваться таким ламинарным движением среды.

Автор благодарит М. А. Гольдштика за внимание к работе, В. А. Сапожников и В. Н. Штерна за полезные обсуждения.

Поступило 30 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Lock R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, Ser. A, vol. 233, No. 1192.
2. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Устойчивость плоскопараллельных магнито-гидродинамических течений в поперечном магнитном поле. ПМТФ, 1970, № 3.
3. Сагалаков А. М. Устойчивость плоского течения Куэтта — Пуазейля в присутствии магнитного поля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
4. Сагалаков А. М. Устойчивость плоского магнито-гидродинамического течения Куэтта с асимметричным профилем скорости. ПМТФ, 1971, № 3.
5. Сагалаков А. М. Численный анализ устойчивости некоторых асимметричных течений. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», 1971, т. 2, № 4.
6. Павлов К. Б., Тарасов Ю. А. Об устойчивости течения вязкой проводящей жидкости между параллельными плоскостями в перпендикулярном магнитном поле. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
7. Тверской Б. А. Об устойчивости течения хорошо проводящей жидкости поперек магнитного поля. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 2.
8. Hunt J. C. R. On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields. Proc. Roy. Soc., 1966, Ser. A, vol. 293, p. 342.
9. Wooler P. T. Instability of flows between parallel planes with a coplanar magnetic field. Phys. Fluids, 1961, vol. 4, pp. 24—27.
10. Schuler M. Magneto-hydrodynamische Störungen eines ruhen den Mediums in ebenen Kanal bei Wirkung eines transversalen Magnetfelds. Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1968, Bd 10, Nr 4, 5.
11. Шлиомис М. И. Осциллирующие возмущения в проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
12. Каулинг Т. Г. Магнитная гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
13. Carmi S., Lala S. D. D. Universal stability of hydromagnetic flows. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, pt 4.
14. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Энергетический анализ устойчивости магнито-гидродинамических течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
15. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Энергетический анализ устойчивости плоскопараллельных течений с точкой перегиба профиля скорости. ПМТФ, 1971, № 6.
16. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Труды II Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости, Новосибирск, «Наука», 1969.
17. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости. ПМТФ, 1970, № 2.
18. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в кольцевом канале. Изв. АН СССР, ЖМГ, 1971, № 4.