6. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двоякой кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.
7. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями включая реакции ионизации. Отчет Ин-та механ. МГУ, № 1016, 1969.
8. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
9. Goldstein M. E. New formulation of the multicomponent laminar boundary layer problem. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 4.

---

УДК 533.6.011

# ЗАМЕЧАНИЕ К ВОПРОСУ О ПОЛУЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

О. Г. ГОМАН

(*Днепропетровск*)

Приводятся два примера применения к гиперболическим задачам преобразования, связывающего аналитические и $p$-аналитические функции.

Известно, что выражения вида

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi(x, r) r\, dr}{\sqrt{y^2 - r^2}}, \qquad \Phi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty \frac{\varphi(x, r) r\, dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \tag{1}$$

преобразуют гармоническую функцию на плоскости $\Phi(x, y)$ в пространственную осесимметричную гармоническую функцию $\varphi(x, r)$ [1].

Однако, как показала П. Я. Полубаринова-Кочина [2], преобразование (1) не переводит плоский источник в пространственный осесимметричный источник. То же самое можно сказать и о других элементарных особенностях на плоскости и в пространстве. Это вызвано тем, что указанное преобразование меняет вид граничных условий на эквивалентных поверхностях в плоскости и пространстве.

Тем не менее если известен общий вид решения плоской задачи через неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий, то преобразования (1) можно использовать для получения общего решения эквивалентной осесимметричной задачи. Проиллюстрируем сказанное двумя примерами.

*1. Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля и тела вращения без угла атаки.* Потенциал плоского течения удовлетворяет уравнению

$$-\operatorname{ctg}^2 \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (\operatorname{ctg} \mu = \sqrt{M^2 - 1}) \tag{2}$$

и граничным условиям на головной волне Маха и теле

$$\Phi = 0, \quad y \geqslant x \operatorname{tg} \mu; \qquad \partial\Phi / \partial y = UR', \quad y = R(x) \tag{3}$$

Осесимметричное течение описывается уравнением со следующими условиями:

$$-\operatorname{ctg}^2 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

$$\varphi = 0 \quad (r \geqslant x \operatorname{tg} \mu), \qquad \partial\varphi / \partial r = UR' \quad (r = R(x))$$

В данном случае следует применять второе преобразование (1), так как рассматриваемое течение внешнее. Обращением этого преобразования является

$$\varphi(x, r) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{r\, \partial r} \int_r^\infty \frac{\Phi(x, y) y\, dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \tag{5}$$

Если при $y \to \infty$ $\Phi \to 0$ и $\partial\Phi / \partial y \to 0$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_r^\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \tag{6}$$

Так как решением уравнения (2) (с учетом условия 3)) является

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} f(x - y \operatorname{ctg} \mu) - f(0) & (x - y \operatorname{ctg} \mu \geqslant 0) \\ 0 & (x - y \operatorname{ctg} \mu < 0) \end{cases}$$

то из (5) получим обычный вид для осесимметричного потенциала $\varphi$ [3]

$$\varphi(x, r) = \frac{\operatorname{ctg}\mu}{\sqrt{\pi}} \int\limits_r^{x \operatorname{tg}\mu} \frac{f'(x - y \operatorname{ctg}\mu)\, dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} = \frac{\operatorname{ctg}\mu}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x - r \operatorname{ctg}\mu} \frac{f'(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - r^2 \operatorname{ctg}^2 \mu}}$$

Функция $f'(x)$ подлежит определению из граничного условия, которое согласно (6) приводится к известному уравнению

$$-\frac{\operatorname{ctg}\mu}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int\limits_0^{x - r \operatorname{ctg}\mu} \frac{f''(\xi)(x-\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - r^2 \operatorname{ctg}^2\mu}} \Bigg|_{r = R(x)} = UR'(x)$$

Задача с углом атаки решается аналогично.

*2. Гармонические колебания тонкого профиля и осесимметричного тела в сверхзвуковом потоке.* Представляя потенциал плоскопараллельного и осесимметричного течения соответственно в виде

$$\Phi(x, y) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{M^2}{M^2 - 1}\frac{x}{U}\right)\right], \quad \psi(x, r) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{M^2}{M^2 - 1}\frac{x}{U}\right)\right] \cos\gamma$$

($\gamma$ — меридиональный угол), для $\Phi$ и $\psi$ будем иметь уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \operatorname{tg}^2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + c^2 \Phi = 0 \qquad \left(c = \frac{\omega}{U} M \operatorname{tg}^2 \mu\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \operatorname{tg}^2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2}\right) + c^2 \psi = 0 \tag{8}$$

со следующими условиями: $\Phi = \psi = 0$ на головной волне и $\partial\Phi / \partial y = F(x)$, $\partial\psi / \partial r = f(x)$ на теле.

Полагая $\psi = \partial\varphi / \partial r$, для $\varphi$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \operatorname{tg}^2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + c^2 \varphi = 0 \tag{9}$$

связанное преобразованием (1) с уравнением (7). Используя решение уравнения (7) [4]

$$\Phi(x, y) = -\int\limits_0^{x - y \operatorname{ctg}\mu} J_0\left(c\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2 \operatorname{ctg}^2\mu}\right) V(\xi)\, d\xi$$

из (5) получаем вид решения уравнения (9)

$$\varphi(x, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{r\, \partial r} \int\limits_r^{x \operatorname{tg}\mu} \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \int\limits_0^{x - y \operatorname{ctg}\mu} J_0\left(c\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2 \operatorname{ctg}^2\mu}\right) V(\xi)\, d\xi$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int\limits_0^x \frac{I_0(ct) t\, dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{\sin cx}{c}$$

будем иметь

$$\varphi(x, r) = -\frac{\operatorname{ctg}^2\mu}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x - r \operatorname{ctg}\mu} \frac{\cos\left(c\sqrt{(x-\xi)^2 - r^2 \operatorname{ctg}^2\mu}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - r^2 \operatorname{ctg}^2\mu}} V(\xi)\, d\xi$$

что совпадает с результатом, полученным обычным путем [3].

Поступило 14 VI 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев, Изд. Киевск. ун-та, 1965.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о получении осесимметричных течений из плоскопараллельных. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н., Захарченко В. Ф. Аэродинамика ракет. М., «Высшая школа», 1968.
4. Майлс Дж. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.